

Étude analytique et numérique de la convection naturelle bidiffusive dans un milieu poreux confiné.

Smail BENISSAAD^{1*}, Nabil OUAZAA¹

¹Laboratoire d'énergétique appliquée et de pollution. Département de génie mécanique. Université Mentouri – Constantine – 25000 Constantine. Algérie.

* (auteur correspondant : benissaad.smail@gmail.com)

Résumé - Dans le cas d'une cavité allongée soumise à des flux uniformes de chaleur et de masse, il est possible d'utiliser l'hypothèse d'un écoulement parallèle pour obtenir une solution analytique décrivant les champs de fonction de courant, de température et de concentration dans la région centrale de la cavité. Les résultats obtenus ont montré un excellent accord entre la solution analytique et la simulation numérique. Dans cette étude l'effet des paramètres de contrôle sur l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse, dans le système étudié, a été déterminé.

Nomenclature

A	rapport d'aspect géométrique, L'/H'	T	température adimensionnelle, $(T' - T'_0)/\Delta T^*$
D	diffusivité solutale, $m^2.s^{-1}$	t	temps adimensionnel, $t'\alpha_p/H'^2$
Da	nombre de Darcy, K/H'^2	ΔT^*	température caractéristique, $q'H'/k_p$
g	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$	(u, v)	vitesses adimensionnelles dans les directions (x, y) , $(u'H'/\alpha_p, v'H'/\alpha_p)$
H'	hauteur de l'enceinte, m	(x, y)	coordonnées cartésiennes adimensionnelles, $(x'/H', y'/H')$
j'	flux de masse constant (par unité de surface), $kg.m^2.s^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
K	perméabilité du milieu poreux, m^2	α_p	diffusivité thermique du milieu poreux saturé, $k_p/(\rho C)_f, m^2.s^{-1}$
k	conductivité thermique du milieu poreux saturé, $W.m^{-1}.K^{-1}$	β_S	coefficient d'expansion solutal, $kg.mol.L^{-1}$
L'	longueur de l'enceinte, m	β_T	coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
Le	nombre de Lewis, α_p/D	ε	porosité adimensionnelle, ε'/σ
N	rapport des forces de volumes, $\beta_S\Delta S^*/\beta_T\Delta T^*$	ϑ	viscosité cinématique du fluide, $m^2.s^{-1}$
Nu	nombre de Nusselt, Eq. (27)	ρ	densité du fluide, $kg.m^{-3}$
P	pression adimensionnelle, $(P' - P'_0)H'^2/\rho_0\alpha_p^2$	(ρC)	capacité calorifique, $W.K^{-1}$
Pr	nombre de Prandtl, ϑ/α_p	σ	rapport des capacités calorifiques $(\rho C)_p/(\rho C)_f$
q'	flux de chaleur constant (par unité de surface), $W.m^{-2}$	Ψ	fonction de courant adimensionnelle, Ψ'/α_p
R_T	nombre de Rayleigh-Darcy thermique, $g\beta_T K H' \Delta T^*/\alpha_p \vartheta$	<i>Indices et exposants</i>	
S	concentration adimensionnelle, $(S' - S'_0)/\Delta S^*$	0	état de référence
Sc	nombre de Schmidt, ϑ/D	t	thermique
Sh	nombre de Sherwood, Eq. (28)	s	solutale
ΔS^*	concentration caractéristique, $j'H'/D_p$	p	poreux
		f	fluide

1. Introduction

De nombreuses recherches ont été menées sur la modélisation du phénomène de la convection double diffusive. Une synthèse très détaillée des travaux effectués dans le passé,

pour les milieux poreux, est présentée dans le livre de Nield et Bejan [1]. Murray et Chen [2] ont été les premiers à étudier expérimentalement la convection double diffusive dans un milieu poreux. Une bonne concordance pour le nombre de Rayleigh thermique critique a été obtenue entre les expériences et la théorie de la stabilité linéaire. Amahmid *et al.* [3] ont utilisé le modèle de Brinkman pour étudier analytiquement et numériquement la convection naturelle thermosolutale dans une couche poreuse verticale soumise à des flux de chaleur et de masse uniformes. Ils ont calculé les nombres de Rayleigh critiques caractérisant l'apparition des mouvements convectifs analytiquement en fonction des nombres de Lewis Le et de Darcy Da . Il a été trouvé que le nombre de Rayleigh thermique critique augmente lorsque Da augmente ou lorsque Le tend vers l'unité. Bahloul *et al.* [4] ont examiné les écoulements dans une cavité horizontale soumise à des flux verticaux de chaleur et de masse avec l'effet Soret. Ils ont démontré que la solution prend la forme d'une bifurcation qui peut être sous critique ou fourche. Bourich *et al.* [5] ont analysé numériquement la convection double diffusive dans une cavité poreuse carrée dont les parois horizontales sont chauffées à des températures constantes et des concentrations sont appliqués sur les parois verticales.

Le but de ce travail est d'étudier analytiquement et numériquement, l'influence du nombre de Rayleigh thermique R_T , sur l'écoulement et le transfert de chaleur et de masse couplé, dans un milieu poreux, soumis à des flux constants de chaleur et de masse.

2. Géométrie et modèle mathématique

On considère une cavité rectangulaire de hauteur H' et de longueur L' (Fig. 1) contenant un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Les parois horizontales de la cavité sont soumises à des flux uniformes de chaleur q' et d'espèce j' , tandis que les parois verticales sont considérées adiabatiques et imperméables. On suppose que la solution est un fluide newtonien et incompressible, la matrice poreuse est isotrope, perméable et homogène, l'écoulement est supposé laminaire, il n'y a ni réaction chimique ni source de chaleur et de masse, le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable et les interactions entre le transfert de chaleur et de masse sont négligeables. En considérant l'approximation de Boussinesq et en utilisant le modèle de Darcy, les équations sans dimensions régissant ce problème sont :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{Pr}{Da} u \quad (2)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{Pr}{Da} v + Pr R_T (T + NS) \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (4)$$

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{Le} \nabla^2 S \quad (5)$$

En plus du rapport d'aspect de l'enceinte A , la mise en forme adimensionnelle de ces équations, a permis de mettre en évidence six paramètres caractéristiques, à savoir le nombre de Rayleigh-Darcy thermique R_T , le rapport des forces de volume N , le nombre de Prandtl Pr , le nombre de Lewis Le , le nombre de Darcy Da et la porosité normalisée ε du milieu poreux.

• Conditions aux limites

Conditions hydrodynamiques :

$$x = \pm \frac{A}{2}, \forall y : \Psi = u = v = 0 ; y = \pm \frac{1}{2}, \forall x : \Psi = u = v = 0 \quad (6.1)$$

Conditions thermiques et massiques :

$$x = \pm \frac{A}{2}, \forall y : \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = 0 ; y = \pm \frac{1}{2}, \forall x : \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} = -1 \quad (6.2)$$

3. Méthode numérique

La méthode numérique des volumes finis est employée pour discrétiser le domaine physique et les différentes équations différentielles aux dérivées partielles adimensionnelles du modèle mathématique. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour la résolution séquentielle des systèmes des équations de discrétisation. Dans le cas où le régime est permanent, la convergence est vérifiée après chaque itération. Le régime permanent est atteint lorsque les bilans d'énergie et de matière sont satisfaits et la différence entre deux valeurs successives au temps t et $t + \Delta t$ des variables u , v , T et S doit être négligeable telle que :

$$\text{Max}(|(\phi_{i,j}^{t+\Delta t} - \phi_{i,j}^t)/\phi_{i,j}^{t+\Delta t}|) \leq 10^{-5} \quad (7)$$

Où ϕ est une variable dépendante, Δt étant l'incrément de temps et les indices i et j indiquent un point quelconque du maillage. Le code de calcul numérique élaboré, a été validé en comparant les résultats de cette étude avec ceux obtenus par d'autres auteurs.

4. Solution analytique

Dans le cas d'une cavité horizontale ayant un grand rapport d'aspect ($A \geq l$), le problème peut être simplifié d'une manière significative par l'approximation de l'écoulement parallèle et des solutions analytiques approximatives sont possibles. Ce concept a été utilisé par plusieurs auteurs. Ceci permet de négliger la composante de la vitesse perpendiculaire aux parois horizontales tels que : $u(x, y) = u(y)$ et $v(x, y) = 0$.

Dans ce cas, la fonction de courant Ψ dépend uniquement de l'ordonnée y :

$$\Psi(x, y) = \Psi(y) \quad (8)$$

Les profils de température et de concentration au cœur de la cavité sont alors donnés par :

$$T(x, y) = C_T x + \theta_T(y) \quad (9)$$

$$S(x, y) = C_S x + \theta_S(y) \quad (10)$$

Où C_T et C_S sont des constantes exprimant les gradients de température et de concentration, respectivement, suivant la direction x , θ_T et θ_S sont les champs adimensionnels de température et de concentration. En substituant les équations (8), (9) et (10) dans (2), (3), (4) et (5) on obtient le système d'équations différentielles adimensionnelles suivant :

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} = -R_T(C_T + NC_S) \quad (11)$$

$$\frac{d^2\theta_T}{dy^2} = C_T \frac{d\Psi}{dy} \quad (12)$$

$$\frac{d^2\theta_S}{dy^2} = Le C_S \frac{d\Psi}{dy} \quad (13)$$

Après intégration de l'Eq. (11) et en satisfaisant l'Eq. (6.1), on obtient :

$$\Psi(y) = \Psi_0(1 - 4y^2) \quad (14)$$

Où Ψ_0 est la fonction de courant au centre de la cavité. Elle a pour expression :

$$\Psi_0 = \frac{R_T}{8} (C_T + NC_S) \quad (15)$$

Après intégration des Eqs. (12) et (13) avec les conditions aux frontières (6.2), on obtient :

$$\theta_T(y) = \frac{C_T\Psi_0}{3} (3y - 4y^3) - y \quad (16)$$

$$\theta_S(y) = \frac{LeC_S\Psi_0}{3} (3y - 4y^3) - y \quad (17)$$

En substituant, respectivement, les Eqs. (9) et (10) dans les Eqs. (16) et (17), on obtient les équations suivantes des profils de la température et de la concentration :

$$T(x, y) = C_T x + \frac{C_T\Psi_0}{3} (3y - 4y^3) - y \quad (18)$$

$$S(x, y) = C_S x + \frac{LeC_S\Psi_0}{3} (3y - 4y^3) - y \quad (19)$$

Après l'intégration les bilans d'énergie et de masse sur un volume de contrôle, en tenant compte des conditions aux limites (6.2), on obtient les expressions suivantes pour C_T et C_S :

$$C_T = \frac{4b\Psi_0}{3(2b+\Psi_0^2)} \quad (20)$$

$$C_S = \frac{4bLe\Psi_0}{3(2b+\Psi_0^2Le^2)} \quad (21)$$

Avec : $b = \frac{15}{16}$

En combinant (15) avec (20) et (21) et après arrangement, on obtient alors une équation de cinquième ordre de la fonction de courant Ψ_0 tel que :

$$\Psi_0[Le^4\Psi_0^4 - 2bLe^2\Psi_0^2d_1 - b^2d_2] = 0 \quad (22)$$

Avec : $d_1 = \frac{R_T}{12}Le(Le + N) - (Le^2 + 1)$; $d_2 = \frac{R_T}{3}Le^2(1 + NLe) - 4Le^2$

On a cinq solutions dont l'une est nulle et correspond à l'état du fluide au repos : $\Psi_0 = 0$. Les quatre autres solutions sont les solutions convectives données par :

$$\Psi_0 = \pm \frac{\sqrt{b}}{Le} \left[d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

La naissance de la convection se fait selon deux types de bifurcation. Le premier type est une bifurcation supercritique dont le seuil de convection se produit avec une amplitude nulle ; $\Psi_0 = 0$ et il est donné par le nombre de Rayleigh supercritique R_{TC}^{sup} . Le second type de bifurcation est une bifurcation souscritique pour laquelle le seuil de convection se produit avec une amplitude finie ; $\Psi_0 \neq 0$ et il est donné par le nombre de Rayleigh souscritique R_{TC}^{sub} .

- **Rayleigh supercritique** : il est exprimé en fonction de R^{sup} ($R^{sup} = 12$) et de N par :

$$R_{TC}^{sup} = \frac{R^{sup}}{(1+NLe)} \quad (24)$$

- **Rayleigh souscritique** : il est exprimé en fonction de R^{sup} et de N par :

$$R_{TC}^{sub} = \frac{R^{sup}(Le+1)[(Le-N)(Le-1)+2\sqrt{NLe(Le-1)(1-Le)}}{Le(Le+N)^2} \quad (25)$$

L'amplitude de la fonction de courant au point de bifurcation est donnée par :

$$\Psi_0 = \pm \frac{\sqrt{bd_1}}{Le} \quad (26)$$

- **Nombre de Nusselt** : Il peut être exprimé en fonction de Ψ_0 et de b par :

$$Nu = \frac{6(\Psi_0^2+2b)}{\Psi_0^2+12b} \quad (27)$$

- **Nombre de Sherwood** : Il peut être exprimé en fonction de Ψ_0 et de b par :

$$Sh = \frac{6(\Psi_0^2Le^2+2b)}{\Psi_0^2Le^2+12b} \quad (28)$$

5. Résultats et discussions

Pour examiner l'influence de R_T sur l'écoulement, on a fait varier ses valeurs selon que les forces volumes sont purement thermiques, coopérantes ou opposantes. Dans le cas de $N = 0$ la force de volume solutale est nulle. L'écoulement au sein de la cavité est alors contrôlé uniquement par le flux de chaleur uniforme imposé. La figure 2 illustre le diagramme de bifurcation de Ψ_0 en fonction de R_T . On remarque qu'une bifurcation de type fourche s'est produite pour un nombre de Rayleigh critique $R_{TC}^{sup} = 12$. Pour des valeurs de $R_T < 12$, on est en présence de la conduction pure. Mais, pour des valeurs de $R_T > 12$, l'intensité de l'écoulement augmente et deux mouvements convectifs en sens opposés sont possibles, en plus de la conduction pure. La figure 3 montre les lignes courant et les isothermes en cavité allongée pour différentes valeurs de R_T correspondant à des valeurs inférieure au nombre de Rayleigh critique R_{TC}^{sup} , supérieure à R_{TC}^{sup} et assez supérieure à R_{TC}^{sup} . Dans les trois cas, la structure de l'écoulement est unicellulaire et s'amplifie avec l'augmentation de R_T . On constate que cette cellule est plus allongée pour $R_T = 80$, ce qui illustre clairement la validité

de l'écoulement parallèle dans la région centrale de la cavité essentiellement lorsque la valeur de R_T augmente. La variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh thermique R_T est représentée sur la figure 4. Pour des valeurs de $R_T < 12$, le nombre de Nusselt $Nu = 1$; ce qui présente la conduction pure et pour $R_T > 12$, Nu augmente jusqu'à une valeur asymptotique égale à 6 d'après l'expression analytique de Nu (Eq. 27). Dans le cas où $N > 0$, les forces de volume thermique et solutale coopèrent et contribuent à l'augmentation de l'intensité de l'écoulement, la courbe de bifurcation obtenue pour $N=0.4$ est donnée sur la figure 5. Pour cette situation la convection dite supercritique est obtenue pour un nombre de Rayleigh supercritique correspondant à $R_{TC}^{sup} \simeq 6.67$, qui est inférieur au nombre de Rayleigh critique $R^{sup} = 12$, prédit lorsque le système est déstabilisé seulement par la force thermique. On constate également que l'intensité de l'écoulement s'accroît avec R_T . Les variations des taux de transfert de chaleur et de masse sont représentées par les figures 6 et 7, en fonction de R_T . Pour $R_T < 3.67$, on a $Nu=1$ et $Sh=1$ ce qui présente la conduction pure et pour $R_T > 3.67$, Nu et Sh augmentent jusqu'à une valeur asymptotique de Nusselt et de Sherwood égale à 6. Dans le cas où $N < 0$, les forces de volume thermique et solutale sont opposées. La figure 8 illustre le diagramme de bifurcation de Ψ_0 en fonction de R_T obtenue pour le cas de $N = -0.4$. La convection survient selon une bifurcation souscritique avec une amplitude finie Ψ_0 . Le nombre de Rayleigh souscritique est égal à 29.45 pour les valeurs de Le et de N considérés. Quant au nombre de Rayleigh supercritique, il est égal à 60. Pour des valeurs de R_T comprises entre ces deux limites, la solution analytique prédit cinq solutions possibles. La première correspond au régime conductif (état de repos, $\Psi_0 = 0$) et les quatre autres correspondent aux régimes convectifs d'écoulements à amplitude finie. On voit bien ici que la solution analytique représentée par les lignes continues est en excellent accord avec la solution numérique représentée par des points. Les figures 9 et 10 présentent la variation des nombres de Nusselt et de Sherwood en fonction de R_T . Pour chaque nombre, on remarque l'existence de deux solutions. L'une, étant stable, augmente avec R_T ; elle commence de $R_{TC}^{sub} = 29.45$ et correspond à $Nu=1.28$ et $Sh=1.96$, jusqu'à la valeur asymptotique de $Nu=6$ et $Sh=6$. L'autre solution, étant instable, est limitée entre $R_{TC}^{sub} = 29.45$ et $R_{TC}^{sup} = 60$, elle débute de $Nu=1.28$ et $Sh=1.96$, puis descend jusqu'à la valeur limite de $Nu=1$ et $Sh=1$.

6. Conclusion

Les résultats obtenus ont permis, la validation de l'utilisation de l'approximation de l'écoulement parallèle, et ont montré un excellent accord entre la solution analytique et la simulation numérique, la détermination de l'influence de R_T sur l'intensité de l'écoulement, le transfert de chaleur et matière et le calcul exacte du nombre de Rayleigh thermique critique.

Références

- [1] D. A. Nield, A. Bejan, *Convection in Porous Media*, third ed., Springer-Verlag (2006).
- [2] B. T. Murray, C. F. Chen, Double-diffusive convection in a porous medium, *J. Fluid Mech.*, 201 (1989), 147–166.
- [3] A. Amahmid, M. Hasnaoui, P. Vasseur, Étude analytique et numérique de la convection naturelle dans une couche poreuse de Brinkman doublement diffusive, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 42-15 (1999), 2991-3005.
- [4] A. Bahloul, N. Boutana, P. Vasseur, Double-diffusive and Soret induced convection in a shallow horizontal porous layer, *J. Fluid Mech.*, 491 (2003), 325–352.
- [5] Bourich M., Amahmid A., Hasnaoui M., Double diffusive convection in a porous enclosure submitted to cross gradients of temperature and concentration. *Energy Conversion and Management*, 45 (2004) 1655-1670.

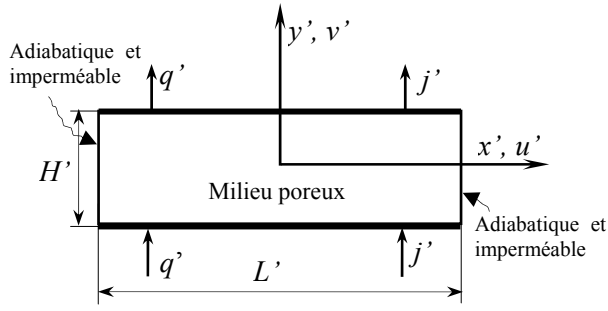


Figure 1 : Géométrie du problème considéré.

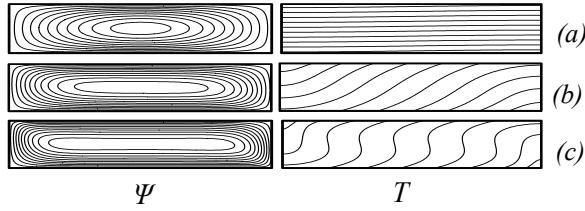


Figure 3 : Influence du nombre de Rayleigh sur Ψ et T : $A = 4$, $Le = 2$ et $N = 0$. (a) $R_T = 6$; (b) $R_T = 20$; (c) $R_T = 80$.

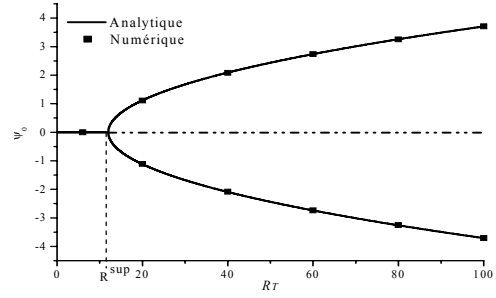


Figure 2 : Diagramme de bifurcation pour $A = 4$, $Le = 2$ et $N = 0$.

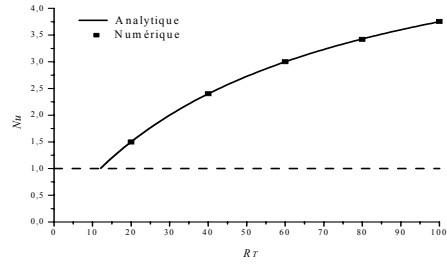


Figure 4 : Influence du nombre de Rayleigh sur Nu : $A = 4$, $Le = 2$ et $N = 0$.

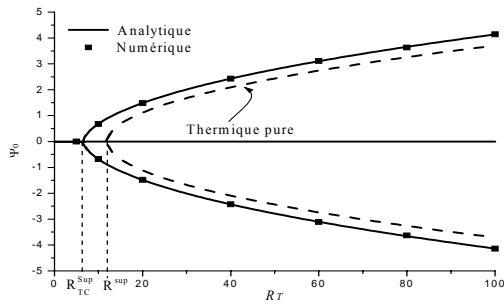


Figure 5 : Diagramme de bifurcation pour $A = 4$, $Le = 2$ et $N = 0.4$.

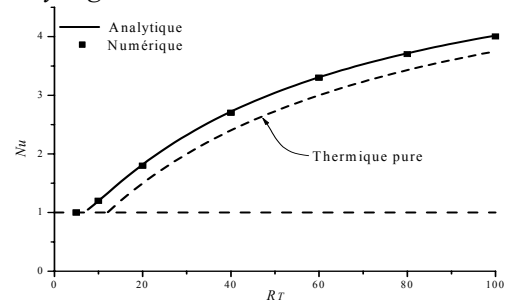


Figure 6 : Influence du nombre de Rayleigh sur Nu : $A = 4$, $Le = 2$ et $N = 0.4$.

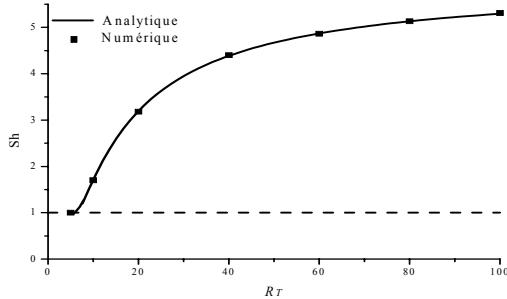


Figure 7 : Influence du nombre de Rayleigh sur Sh : $A = 4$, $Le = 2$ et $N = 0.4$.

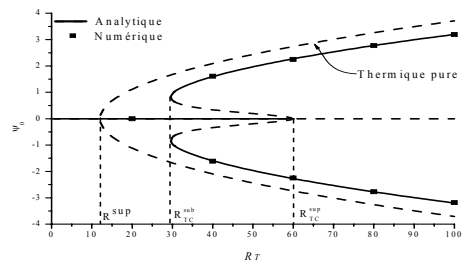


Figure 8 : Diagramme de bifurcation pour $A = 4$, $Le = 2$ et $N = -0.4$.

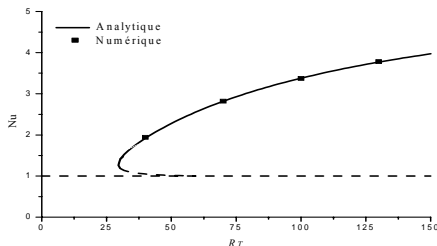


Figure 9 : Influence du nombre de Rayleigh sur Nu : $A = 4$, $Le = 2$ et $N = -0.4$.

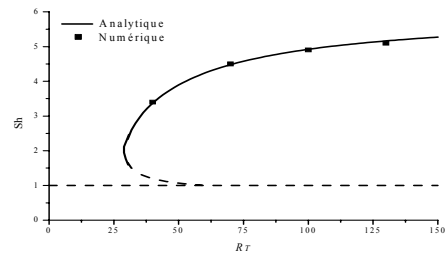


Figure 10 : Influence du nombre de Rayleigh sur Sh : $A = 4$, $Le = 2$ et $N = -0.4$.