

Application d'une méthode meshless à l'étude des transferts couplés conduction-rayonnement

Chengan WANG, Hamou SADAT, Vital LE DEZ

Institut Pprime, UPR CNRS 3346, Université de Poitiers, 40 Avenue du recteur Pineau, 86022 Poitiers
chengan.wang@etu.univ-poitiers.fr

Résumé - On présente une méthode de type meshless pour résoudre des problèmes de transferts couplés faisant intervenir le rayonnement et la conduction. La méthode des ordonnées discrètes est utilisée pour traiter l'équation du transfert radiatif dans la formulation du second ordre en flux pairs. La discrétisation spatiale de l'équation du transfert radiatif et de l'équation de la chaleur est effectuée par approximation glissante à moindres carrés. Deux exemples permettent de montrer la bonne précision de la méthode.

Nomenclature

A^M matrice d'approximation diffuse au point M

$\langle p(M_i, M) \rangle$ vecteur ligne des monômes

$L(\Omega)$ luminance directionnelle pour une direction de propagation Ω , $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$

L^o luminance de corps noir du milieu, $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$

L_p^o luminance surfacique de corps noir, $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$

J nombre de directions discrètes Ω

k conductivité thermique, $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

M point courant

N paramètre entre conduction et rayonnement, $N = k \cdot \beta / 4\sigma T_{ref}^3$

\hat{n} normale extérieure à la surface

T_{ref} température de la référence, K

$W(\Omega)$ poids associé à une direction discrète

Symboles grecs

ω_R albédo

ω fonction de pondération

α vecteur de l'estimée des dérivées partielles successives

φ champ scalaire

λ ouverture des fenêtres de pondération

κ coefficient d'absorption, m^{-1}

σ coefficient de diffusion, m^{-1}

β coefficient d'extinction, m^{-1}

Ω direction de propagation

Φ fonction de phase de diffusion

ε émissivité d'une surface

Indices et exposants

o corps noir

p paroi

1. Introduction

Le phénomène du couplage entre le rayonnement et la conduction thermique apparaît dans de nombreuses applications industrielles (fours, chambres de combustion...). Quand les géométries sont complexes, on utilise généralement pour la résolution numérique la méthode des éléments finis [1]-[4] ou la méthode des volumes de contrôle basée sur un maillage en éléments finis [5]. Dans le présent article, on propose une méthode de collocation utilisant l'approximation glissante à moindres carrés [6]. Cette méthode a été utilisée pour résoudre des problèmes de conduction [7] et de convection 2D [8]-[10] et 3D [11]. En ce qui concerne le rayonnement, il a été montré que la formulation en variables secondaires était plus stable que la formulation en variables primaires de l'équation du transfert radiatif [12]. Wang et al [13] ont ensuite traité des problèmes de rayonnement dans des géométries complexes

bidimensionnelles et tridimensionnelles. Nous décrivons dans les paragraphes suivants l'approximation utilisée ainsi que la formulation mathématique des équations. Deux exemples qui permettent d'illustrer la précision de la méthode proposée sont enfin présentés.

2. L'approximation glissante à moindres carrés

Considérons un champ scalaire $\varphi(x, y)$ défini dans un domaine bidimensionnel sur lequel on choisit n points de référence $M_i(x_i, y_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. A partir d'un point de calcul $M(x, y)$ on cherche une estimée φ_i^* du champ φ_i , sous la forme d'un développement de Taylor tronqué à un ordre choisi (ici à l'ordre 2) :

$$\varphi_i^*(x_i, y_i) = \langle p(M_i, M) \rangle \cdot \langle \alpha_M \rangle^T \quad (1)$$

$$\text{avec} \quad \langle p(M_i, M) \rangle = \langle 1, (x_i - x), (y_i - y), (x_i - x)^2, (x_i - x)(y_i - y), (y_i - y)^2 \rangle \quad (2)$$

$$\text{et} \quad \langle \alpha_M \rangle^T = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \rangle^T \quad (3)$$

Les différents coefficients α_i correspondent, à une constante près, aux dérivées successives du champ scalaire au point M_i . On connecte ensuite les variables généralisées aux valeurs connues par minimisation de l'erreur quadratique qui s'exprime par :

$$I(\alpha_M) = \sum_{i=1}^n \left\{ \omega(M_i, M) \cdot \left[\varphi_i - \langle p(M_i, M) \rangle \cdot \langle \alpha_M \rangle^T \right]^2 \right\} \quad (4)$$

$$\text{où} \quad \omega(X, X_i - X) = \exp \left[-3 \ln(10) \cdot \left(\frac{|X_i - X|}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (5)$$

$$\omega(X, X_i - X) = 0 \quad \text{si} \quad (X_i - X)^2 > \lambda^2$$

$\omega(M_j, M)$ est une fonction de pondération continue, positive, maximale en M_i et décroissant rapidement quand on s'en éloigne : ainsi $\omega(M_j, M)$ définira le nombre de nœuds voisins connectés au nœud de calcul. La minimisation de $I(\alpha_M)$ par rapport à $\langle \alpha_M \rangle^T$, c'est-à-dire $\frac{\partial I(\alpha_M)}{\partial \alpha_i} = 0$, conduit au système matriciel :

$$[A^M] \cdot \langle \alpha_M \rangle^T = \langle B^M \rangle^T \quad (6)$$

$$\text{où} \quad [A^M] = \sum_{i=1}^n \omega(M_i, M) \cdot \langle p(M_i, M) \rangle^T \langle p(M_i, M) \rangle \quad (7)$$

$$\text{et} \quad \langle B^M \rangle^T = \sum_{i=1}^n \omega(M_i, M) \cdot \langle p(M_i, M) \rangle^T \cdot \varphi_i \quad (8)$$

La résolution du système précédent permet d'exprimer les dérivées successives de φ^* en fonction des valeurs du champ aux points voisins puisque l'on a :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \varphi(x, y)^* & \alpha_2 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^* & \alpha_3 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^* \\
\alpha_4 &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^* & \alpha_5 &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^* & \alpha_6 &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)^*
\end{aligned} \tag{9}$$

3. Formulation en variables paires

Dans un milieu semi-transparent émettant, absorbant et diffusant, l'équation du transfert radiatif (ETR) s'écrit, après avoir remplacé le terme intégral de diffusion par son approximation discrète, sous la forme classique, le long d'une trajectoire caractérisée par sa direction Ω_i et son abscisse curviligne s :

$$\frac{dL(\Omega_i)}{ds} = -\beta L(\Omega_i) + \kappa L^o + \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{j=1}^J L(\Omega'_j) \Phi(\Omega'_j, \Omega_i) W(\Omega'_j) \tag{10}$$

$i=1, \dots, J$ est l'ordre de la direction discrète Ω_i , κ , σ et β sont les coefficients d'absorption, de diffusion et d'extinction du milieu supposé gris. L^o est la luminance de corps noir du milieu et $\Phi(\Omega'_j, \Omega_i)$ est la fonction de phase de diffusion entre les directions Ω'_j et Ω_i , $W(\Omega'_j)$ étant le poids associé à la direction discrète j pour la quadrature angulaire choisie. Tous les résultats présentés ont été obtenus avec la quadrature d'ordre 6 (S6).

Les conditions aux limites pour une paroi réfléchissant le rayonnement de façon purement diffuse, s'écrivent après avoir transformé l'intégrale de réflexion en une somme discrète :

$$L(\Omega_i) = \varepsilon L_p^o + \frac{1-\varepsilon}{\pi} \sum_{\hat{n} \cdot \Omega'_j < 0} L(\Omega'_j) |\hat{n} \cdot \Omega'_j| W(\Omega'_j) \tag{11}$$

Où ε est l'émissivité de la surface et L_p^o la luminance de corps noir à la paroi de normale intérieure \hat{n} .

En appelant $L^+(\Omega)$ et $L^-(\Omega)$ les intensités relatives aux directions positive + et négative -, il vient pour les variables paires et impaires :

$$F(\Omega) = L^+(\Omega) + L^-(\Omega), G(\Omega) = L^+(\Omega) - L^-(\Omega) \tag{12}$$

En injectant alors les luminances + et - dans l'ETR (10) il vient [14]:

$$\frac{1}{\beta} \frac{d^2 F_i}{ds^2} - \beta F_i + 2\kappa L^o + \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{j=1}^{J/2} (A_{ij} F_j + B_{ij} G_j) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{dF(\Omega)}{ds} = -\beta G(\Omega) \tag{14}$$

Les matrices A_{ij} et B_{ij} s'expriment respectivement par $[\Phi(\Omega'_j, \Omega_i) + \Phi(\Omega'_j, -\Omega_i)] W(\Omega'_j)$ et $[\Phi(\Omega'_j, \Omega_i) - \Phi(\Omega'_j, -\Omega_i)] W(\Omega'_j)$. Quant aux conditions aux limites, elles s'écrivent dans le cadre de ce formalisme:

$$\frac{1}{2} \left(F_i - \text{sign}(\hat{n} \cdot \Omega'_i) \frac{1}{\beta} \frac{dF_i}{ds} \right) = \varepsilon L_p^o + \frac{1-\varepsilon}{\pi} \sum_j \frac{1}{2} (F_i - \text{sign}(\hat{n} \cdot \Omega'_j) G_i) |\hat{n} \cdot \Omega'_j| W(\Omega'_j) \tag{15}$$

4. L'équation d'énergie

En régime stationnaire et en présence du rayonnement et de la conduction, l'équation de l'énergie s'écrit:

$$k\Delta T - \nabla \cdot \vec{q}_r = 0 \quad (16)$$

Où \vec{q}_r est le vecteur flux radiatif.

Pour un milieu gris dont l'indice de réfraction vaut 1, la divergence du flux radiatif s'écrit :

$$\nabla \cdot \vec{q}_r = \kappa(4\pi L^o - H) \quad (17)$$

Où H est le rayonnement incident défini par $H = \int_{2\pi} F(\Omega)d\Omega$. Les 2 équations (16) et (17)

conduisent finalement à écrire:

$$\Delta T = \frac{\kappa}{k}(4\pi L^o - H) = \frac{\kappa}{k}(4\sigma T^4 - H) \quad (18)$$

Un processus itératif est enfin mis en place pour résoudre l'équation (18).

On définit le paramètre N par $N = k \cdot \beta / 4\sigma T_{ref}^3$ où k est la conductivité thermique, β le coefficient d'extinction, caractérisant l'influence de la conduction relativement au rayonnement.

En chaque point de la discrétisation, l'approximation décrite plus haut permet d'exprimer les dérivées partielles en fonction des températures ou des luminances aux nœuds voisins du point considéré (sélectionnés par la fonction de pondération choisie). Ceci conduit à une équation algébrique par nœud de calcul. Le système algébrique global obtenu est enfin résolu par la méthode du double gradient conjugué.

5. Résultats

5.1. Anneau cylindrique

On considère ici le problème couplé de conduction et rayonnement dans un espace annulaire cylindrique de longueur infinie (figure 1). Le milieu est considéré comme étant absorbant, émettant et diffusant. Les rayons des cylindres intérieur et extérieur permettent de définir les deux épaisseurs optiques qui sont fixés à : $\beta R_1=1$ et $\beta R_2=2$, respectivement. Les deux surfaces cylindriques sont maintenues à deux températures T_1 et T_2 telles: $T_1/T_2=10$ et l'émissivité des parois est égale à $\varepsilon=0.5$. On montre sur la figure 3 l'influence de l'albédo sur la température pour une valeur du paramètre conducto-radiatif égale à $N=0.03$. La figure 4 présente quant à elle l'influence de l'émissivité des parois sur la température dans le cas non diffusant ($\omega_R=0$) et pour $N=0.01$. On voit bien sur les deux figures que les résultats obtenus sont très proches des résultats de la référence [3] obtenus par une méthode de volumes finis.

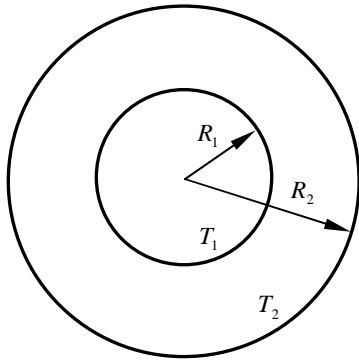


Figure 1 : Anneau cylindrique et ses conditions aux limites

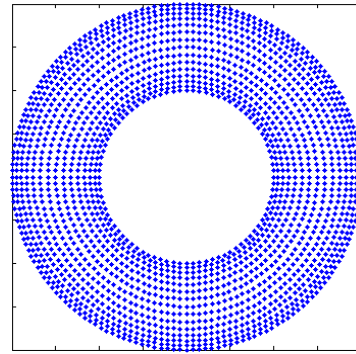


Figure 2 : Maillage

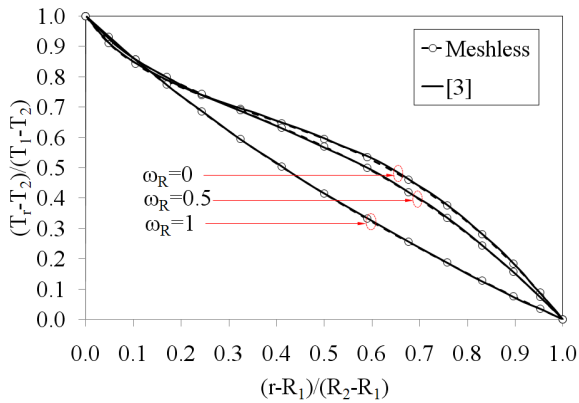


Figure 3 : Variation de la température en fonction du rayon pour différentes valeurs de ω_R

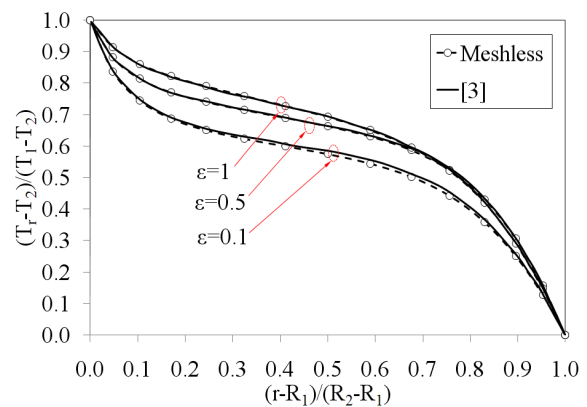


Figure 4 : Variation de la température en fonction du rayon pour différentes valeurs de ϵ

5.2. Géométrie cylindrique

Ce deuxième exemple est relatif à une enceinte cylindrique (figure 5) dont la base est maintenue à une température T_c tandis que toutes les autres parois sont à une température T_f telle que $T_{froid}/T_{chaude} = 0.5$. Toutes les parois de l'enceinte sont noires et le milieu est émettant et absorbant. Ce problème tridimensionnel a été traité en [5] par une méthode volumes finis. La Figure 6 montre la variation de la température le long de la direction z en $x=0$ et $y=0$ et pour un paramètre conducto-radiatif N variant de 0.01 à 10. Les résultats sont ici aussi très proches des résultats de référence pour toutes les valeurs de N .

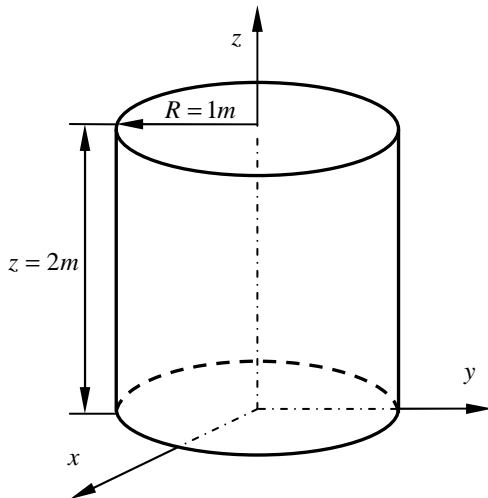


Figure 5 : Géométrie cylindrique

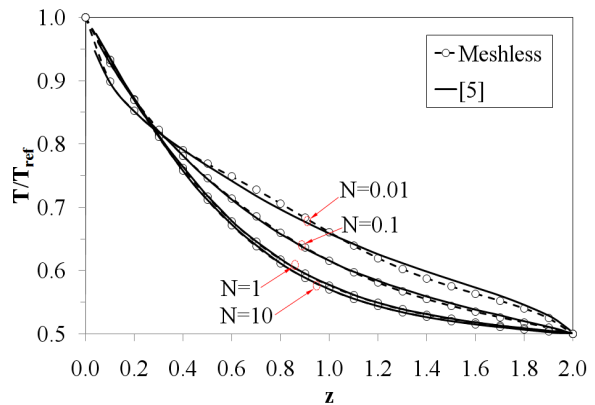


Figure 6 : Influence de N sur la température suivant z en $x = 0$ et $y = 0$

6. Conclusion

Une méthode de type « meshless » est utilisée pour résoudre le transfert couplé conduction-rayonnement dans des géométries de forme complexe. Bien qu'elle utilise un nuage de points de discrétisation, la méthode n'utilise pas d'éléments finis géométriques et des structures de données associées. Elle est donc parfaitement indiquée pour le traitement de problèmes à frontières mobiles. Deux exemples ont permis d'illustrer la précision de la méthode. L'extension de cette approche à la prise en compte de la convection est en cours.

Références

- [1] M.M. Razzaque, J.R. Howell, and D.E. Klein, Coupled Radiative and Conductive Heat Transfer in a Two-Dimensional Rectangular Enclosure with Gray Participating Media Using Finite Elements, *J. Heat Transfer*, 106 (1984), 613–619.
- [2] S.P. Burns, J.R. Howell, D.E. Klein, Empirical evaluation of an important approximation for combined-mode heat transfer in a participating medium using the finite element method, *Numerical Heat Transfer, Part B*, 27 (1995), 309–322.
- [3] M. Sakami, A. Charette, and V. Le Dez, Application of the Discrete Ordinates Method to Combined Conductive and Radiative Heat Transfer in a Two-Dimensional Complex Geometry, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 56-4 (1996), 517–533.
- [4] L. M. Ruan, M. Xie, H. Qi, W. An, H. P. Tan, Development of a finite element model for coupled radiative and conductive heat transfer in participating media, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 102-2 (2006) 190–202.
- [5] P. Talukdar, F.V. Issendorff, D. Trimis, C.J. Simonson, Conduction–radiation interaction in 3D irregular enclosures using the finite volume method, *Heat Mass Transfer*, 44 (2008), 695–704.
- [6] B. Nayroles, G. Touzot and P. Villon, L'approximation diffuse, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313 (1991) 293–296.
- [7] H. Sadat, N. Dubus, L. Gbahoué, T. Sophy. On the Solution of Heterogeneous Heat Conduction Problems by a Diffuse Approximation Meshless Method. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 50-6 (2006), 491–498.
- [8] H. Sadat, S. Couturier, Performance and accuracy of a meshless method for laminar natural convection. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 37-4 (2000), 455–467.
- [9] T. Sophy, H. Sadat, L. Gbahoué. Convection thermomagnétique dans une cavité différentiellement chauffée, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 32-7 (2005), 923–930.
- [10] T. Sophy, H. Sadat, R. Bouard. Calcul de l'écoulement autour d'un cylindre semi-circulaire par une méthode de collocation, *C. R. Mécanique*, 330 (2002), 193–198.
- [11] T. Sophy, H. Sadat and C. Prax, A meshless formulation for three dimensional laminar natural convection. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 41 (2002), 433–445.
- [12] H. Sadat, On the use of a meshless method for solving radiative transfer with the discrete ordinates formulation, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 101-2 (2006), 263–268.
- [13] C.-A. Wang, H. Sadat, V. Le dez and D. Lemonnier, Meshless method for solving radiative transfer problems in complex two-dimensional and three-dimensional geometries, *International Journal of Thermal Sciences*, 49-12 (2010), 2282–2288.
- [14] K.B. Cheong, T.H. Song, Examination of solution methods for the second-order discrete ordinate formulation. *Numer Heat Transf B*, 27 (1995), 155–173.