

# Nouvelle approche pour le traitement du problème de Stefan par la méthode de Gaz sur Réseaux

Soumia ADDAKIRI<sup>1,2,\*</sup>, El Alami SEMMA<sup>1</sup>, Mohammed EL GANAOU<sup>3</sup>, Bernard PATEYRON<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université Hassan I, laboratoire de mécanique management Industriel et Innovation,, FST de Settat B.P. 577, Settat, Maroc

<sup>2</sup> Université de Limoges/CNRS, SPCTS, 6638, 123, Albert-Thomas, 87000 Limoges, France

<sup>3</sup> Université Henri Poincaré Nancy 1, LERMAB – Institut Carnot, IUT-HP de Longwy, 54000 France.

\*(auteur correspondant : [soumia\\_a@yahoo.com](mailto:soumia_a@yahoo.com))

**Résumé-** Dans le travail présenté, un nouveau modèle pour le traitement des phénomènes de changement de phase solide/liquide est développé sur la base de la méthode de Gaz sur Réseaux (GR) connus sous le nom de Lattice Boltzmann Methods (LBM). Ce nouveau modèle est fondé sur le calcul de l'image des fonctions de distribution lors du passage d'une phase à l'autre. Le problème classique de Stefan du changement de phase solide/liquide est considéré comme test de cette étude.

## Nomenclature

u	vitesse	$ms^{-1}$	$\delta t$	pas de temps
T	température	$K$	$\tau$	temps de relaxation
P	pression	$Pa$	w	coefficient de pondération
t	temps	$s$	$\delta x$	constante du réseau
v	viscosité cinématique	$m^2/s$	$\Omega$	opérateur de collision
$c_s$	vitesse du son sur le réseau	$m/s$	f	fonction de distribution
L	chaleur latente	$J/kg$	$f^{eq}$	fonction de distribution à l'équilibre
$\rho$	masse volumique	$kg/m^3$		

## 1. Introduction

L'écoulement du fluide et les effets thermiques associés au cours du changement de phase [1-3], sont d'un grand intérêt dans les applications d'ingénierie telles que le stockage d'énergie, la croissance cristalline, l'industrie métallurgique...

Dans ces problèmes, une frontière déformable sépare généralement les deux phases solide et liquide. Elle se développe et progresse dans le matériau au cours du processus. Les propriétés thermo-physiques peuvent varier de manière considérable d'une phase à l'autre. De plus un couplage important est mis en jeu à l'interface par le transport de masse et d'énergie d'une phase à l'autre. Dans ce type de problèmes, la position et la

forme de l'interface ne sont pas identifiées a priori et constituent des inconnues du problème.

## 2. Modèle mathématique

### 2.1. La méthode de Gaz sur réseaux (LBM)

La fonction de distribution  $f_i(x,t)$  traduit la probabilité de trouver une particule au site  $x$  à l'instant  $t$ , se mouvant dans une direction  $i$  à la vitesse  $e_i = \Delta x_i / \Delta t$ . L'équation de «lattice Boltzmann» de la fonction de distribution d'une particule est donnée par [4,5]:

$$\partial_t f_i(\mathbf{x},t) + \mathbf{e}_i \cdot \nabla f_i(\mathbf{x},t) = \Omega_i(f) \quad (1)$$

$\Omega_i(f)$  représente l'évolution d'une particule après collision. En adoptant l'approximation simple de temps de relaxation dite BGK, la forme linéarisée de l'opérateur de collision est obtenue:

$$\Omega_i(f) = \frac{1}{\tau} (f_i^{eq}(\mathbf{x},t) - f_i(\mathbf{x},t)) \quad (2)$$

Où  $\tau$  est le temps de relaxation vers l'état d'équilibre, et  $f_i^{eq}(x,t)$  la fonction de distribution à l'équilibre. L'introduction de la formule de l'opérateur de collision dans l'équation (1), mène à l'équation de réseau BGK (modèle LBGK) :

$$\partial_t f_i(\mathbf{x},t) + \mathbf{e}_i \cdot \nabla f_i(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\tau} (f_i^{eq}(\mathbf{x},t) - f_i(\mathbf{x},t)) \quad (3)$$

L'intégration de cette équation dans le temps, donne la forme simplifiée de l'équation dite de « lattice Boltzmann » :

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{\tau} (f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)) \quad (4)$$

La méthode LB est ainsi complètement définie par le choix de la fonction de distribution à l'équilibre [6], qui est relative au modèle choisi. Pour le modèle monodimensionnel noté D1Q3 (modèle à 3 vitesses discrètes), La fonction de distribution à l'équilibre est explicitée sous la forme suivante :

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left[ 1 + \frac{3(\hat{e}_i u)}{c_s^2} + \frac{9(\hat{e}_i u)^2}{2c_s^4} - \frac{3u^2}{2c_s^2} \right], i = 0, \dots, 2 \quad (5)$$

Les quantités hydrodynamiques macroscopiques sont déterminées par les moments dans l'espace de phase :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

$$\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{e}_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

### 2.2. Problème de Stefan

Le modèle le plus simple des phénomènes de changements de phase est le problème classique de Stefan [7] ou problème à frontière mobile. La formulation de Stefan d'un problème de changement de phase liquide solide se fonde sur l'écriture de l'équation de diffusion de l'énergie par conduction (dite formulation de Stefan à deux phases) dans

chacune des phases. Dans le cas monodimensionnel, les équations aux dérivées partielles régissant la conduction thermique dans les deux phases s'écrivent :

Dans la phase solide :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (T < T_F) \quad (8.a)$$

Dans la phase liquide :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_l \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (T > T_F) \quad (8.b)$$

Telle que  $\alpha$  représente la diffusivité thermique et s'écrit en fonction de la conductivité du matériau  $\alpha = k / \rho C_p$ . Les indices  $s$  et  $l$  représentent les phases solide et liquide respectivement.

### 2.2.1 La solution de Neumann

Une solution analytique de l'évolution de la position du front de solidification en fonction du temps s'écrit [7] :

$$X(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha t} \quad (9)$$

Où  $X(t)$  est la position de l'interface solide/liquide et  $\lambda$  une constante donnée par la relation suivante :

$$\frac{K_l}{K_s} \sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_l}} \left[ \frac{T_f - T_h}{T_f - T_c} \right] \frac{e^{-\lambda^2 \frac{\alpha_s}{\alpha_l}}}{\text{erfc}(\lambda \sqrt{\alpha_s / \alpha_l})} = \frac{\lambda h_f \sqrt{\pi}}{c(T_m - T_c)} \quad (10)$$

Et :

$$T(X, t) = \begin{cases} T_0 + (T_F - T_0) \frac{\text{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right)}{\text{erf}(\lambda)}, & X < X(t) \quad (\text{solide}) \\ T_i - (T_i - T_F) \frac{\text{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\alpha_l t}}\right)}{\text{erfc}(\lambda \sqrt{\alpha_s / \alpha_l})}, & X > X(t) \quad (\text{liquide}) \end{cases} \quad (11)$$

### 2.2.2 Nouveau modèle : Images des particules (IP)

Le calcul des variables macroscopiques par la méthode de Lattice Boltzmann nécessite la détermination de chacune des fonctions de distribution selon le modèle LBM choisi. Or, pour les problèmes impliquant un changement de phase, on se confronte à une variation des valeurs de ces fonctions en passant d'un milieu à un autre. Dans ce contexte, nous proposons ce nouveau modèle (IP) à valider par application au problème monodimensionnel de Stefan.

Ainsi, ce modèle repose sur le fait que les fonctions de distribution doivent être corrigées à l'interface entre les deux phases solide et liquide.

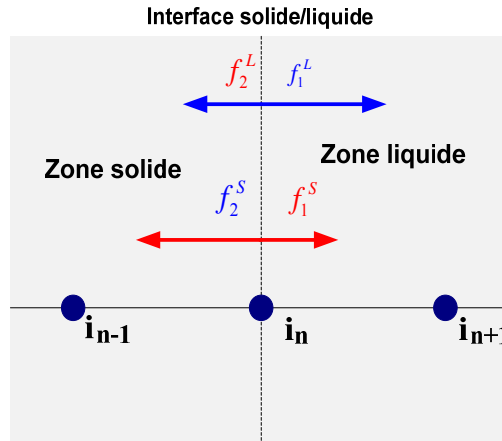


Figure 1: Configuration du nouveau modèle (IP) pour le traitement du problème de Stefan 1D.

La figure 1 représente les fonctions de distribution de chaque côté de l'interface de contact entre les deux milieux solide et liquide. Il s'agit dans ce modèle de corriger les valeurs des fonctions de distribution lors du passage d'un milieu à un autre. Dans le cas monodimensionnel, il est supposé que lors de la propagation, les fonctions de distributions changent de valeurs d'une manière proportionnelle. Ainsi les fonctions de distribution seront liées par la relation suivante:

$$\begin{cases} f_3^l = \alpha f_3^s \\ f_2^s = \beta f_2^l \end{cases} \quad (11)$$

Le modèle (IP) consiste à déterminer les paramètres de correction  $\alpha$  et  $\beta$  en considérant la relation de passage à l'interface, relative au problème de Stefan :

$$\begin{cases} T_l = T_s \\ q_l = q_s + \rho L \frac{\partial X}{\partial t} \end{cases} \quad (12)$$

Où  $T_s$  et  $T_l$  ( $q_s$  et  $q_l$ ) décrivent respectivement les températures (flux) à l'interface des deux milieux solide et liquide,  $X$  la position de l'interface et  $L$  la chaleur latente.

### 3. Résultats et discussion

Pour l'application de ce modèle (IP) aux conditions de transmission lors d'un changement de phase, une barre semi infinie est considérée, initialement à une

température froide ( $T=-0.1$ ). Une température chaude ( $T=1.0$ ) est appliquée sur le côté gauche de la barre. Le transfert de chaleur est supposé purement conductif.

Un maillage (lattice) de  $Lx=200$  est considéré. L'évolution de la position du front de solidification en fonction du temps est examinée, les résultats numériques sont comparés aux résultats analytiques. La figure 2 montre un bon accord des résultats numériques (LBM) avec les estimations analytiques pour une valeur de Stefan  $Ste=2.5$ . Cette validation montre la capacité du nouveau modèle LBM (IP) à décrire avec précision l'évolution de l'interface solide/liquide en mode conductif.

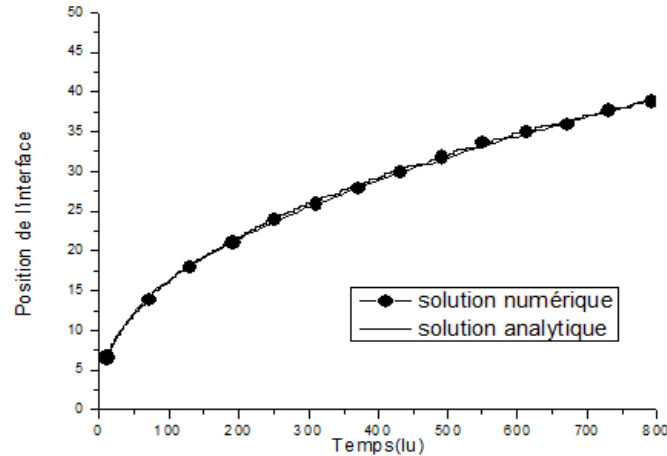


Figure 2 : Comparaison des résultats LBM aux résultats analytiques pour le problème de Stefan 1D.

Enfin, les effets de la variation de la chaleur latente sur l'évolution de la position de l'interface solide/liquide sont étudiés. La figure 3 montre que la progression du front de solidification est accélérée par l'augmentation du nombre de Stefan (diminution de la chaleur latente).

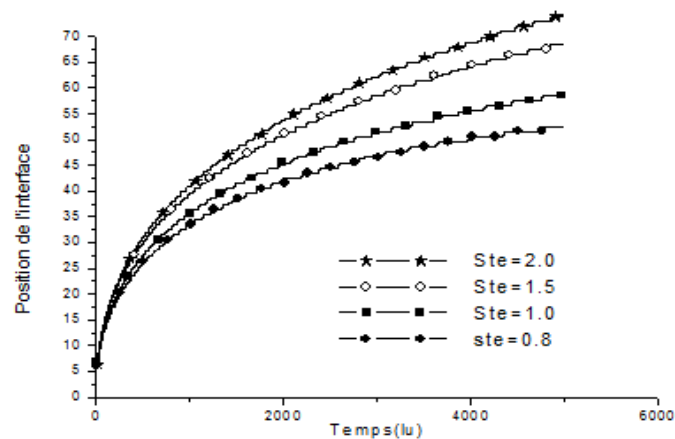


Figure 3 : Évolution de la position de l'interface solide/liquide pour différents nombre de Stefan.

## 4. Conclusion

Ce travail présente un nouveau modèle de traitement du problème de Stefan par la méthode de « Lattice Boltzmann ». Les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats analytiques et encouragent le développement du présent modèle pour le traitement spécifique des problèmes avec transmission à l'interface présents dans de nombreux procédés tels que le traitement de la résistance thermique de contact.

## Remerciements

Conseil Régional du Limousin pour l'appui de la mobilité France Maroc.

## Références

- [1] E. Semma, M. El Ganaoui, R. Bennacer, A. A. Mohamad Investigation of flows in solidification by using the lattice Boltzmann method, *Int. J. Th. Sci.*, 47 (2008), 201-208.
- [2] E. Semma, S. Addakiri, M. El Ganaoui, R. Bennacer, A non-uniform lattice Boltzmann coupled to the finite volumes method for solving phase change problems, *Finite volumes for complex applications V*, 641--648, ISTE, London, 2008.
- [3] S. Addakiri, E. Semma, M. El Ganaoui, B. Pateyron, Numerical study of melting/solidification by a hybrid method coupling a lattice boltzmann and a finite volumes approaches, *Defect and Diffusion Forum Vols. 283-286 (2009)* pp 477-482.
- [4] S. Chen and G. D. Doolen , Lattice Boltzmann method for fluids flow, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 30, pp. 329-364, 1998.
- [5] L.-S. Luo, The lattice-gas and lattice Boltzmann methods: Past, Present, and Future, *Proceedings of the International Conference on Applied Computational Fluid Dynamics*, Beijing, China, pp. 52-83, 2000.
- [6] S. Succi, *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*, Oxford Science Publications (2001).
- [7] V. Alexiades and Alan D. Solomon, *Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes*, Taylor & Francis, 1993.