

Étude numérique des transferts thermo-convectifs dans un canal d'air vertical à flux imposé

Zoubir Amine^{1*}, Shihe Xin¹, Stéphanie Giroux-Julien¹, Christophe Ménézo^{1,2}

¹ Centre de Thermique de Lyon (CETHIL), UMR 5008/INSA/UCBL Lyon1, Villeurbanne, France

² LOCIE, UMR 5271, Université de Savoie, Le Bourget-Du-Lac Cedex, France

* (auteur correspondant: amine.zoubir@insa-lyon.fr)

Résumé - Le présent travail concerne une étude numérique de l'écoulement de convection naturelle (air) ainsi que le couplage convection/rayonnement de surfaces dans un canal vertical chauffé partiellement en densité de flux de chaleur sur l'une de ses parois, l'autre paroi étant adiabatique. Une nouvelle stratégie pour imposer les conditions aux limites entrée/sortie en vitesse et pression est proposée. Les résultats dans le cas de la convection pure sont comparés au benchmark [8]. Dans le cas du couplage convection/rayonnement, les effets du rayonnement des parois sur la structure de l'écoulement sont discutés.

Nomenclature

d	largeur du canal, m	α	diffusivité thermique de l'air, m^2/s
g	accélération de la pesanteur, $9.81m/s^2$	β	coefficient d'expansion thermique de l'air, $1/K$
Nu_y, \bar{Nu}	nombre de Nusselt local et moyen	ε	émissivité
p	pression, Pa	λ	conductivité thermique de l'air, $W/m.K$
q	densité de flux de chaleur, W/m^2	σ	constante de Stephane-Boltzmann, $W/m^2.K^4$
Ra	nombre de Rayleigh	ν	viscosité cinématique, m^2/s
t	temps, s	<i>Indices et exposants</i>	
T	température, K	r	référence
T_0	température d'entrée du fluide, K	c	correction
<i>Symboles grecs</i>		w	paroi

1. Introduction

Bien que de nombreux travaux expérimentaux et numériques aient été publiés sur la convection naturelle dans un canal ouvert, ce problème reste difficile à résoudre lorsque la modélisation s'appuie sur la forme complète des équations de Navier-Stokes, la seule qui permet d'aborder des écoulements avec recirculation dans une configuration telle que le canal. L'écriture des conditions aux limites entrée/sortie reste une question largement ouverte. Imposer un profil de vitesse à l'entrée du canal s'avère très délicat dans ce cas [1]. Pour éviter cela, Ramanathan et al. [2] ont mis le canal dans une large cavité isotherme. Les résultats obtenus sont en accord avec l'étude expérimentale de Wirtz and Stutzman [3] seulement pour le cas de nombres de Rayleigh faibles. Cette étude a engendré des temps de calcul importants vu le domaine modélisé. Kettleborough [4] a utilisé un volume fictif à l'entrée du canal, Bianco et al. [5] et Giroux et al. [6] ont eu la même approche en rajoutant un volume artificiel en sortie du canal. Ces conditions aux limites se traduisent par des gradients nuls en vitesse ou en vorticité (type Neumann). En analysant l'opérateur de Stokes provenant de la discrétisation des équations de Navier Stokes à l'aide de la décomposition en valeurs singulières, Le Quéré [7] a montré que certains choix de conditions aux limites entraînent une augmentation de la dimension du noyau de l'opérateur de Stokes, ce qui donne une infinité de solutions au problème. Cette problématique ressurgit quand des conditions aux limites de type Neumann sont imposées sur la composante normale de la vitesse à l'entrée et en sortie du canal. Cela est vrai car le triplet $(u,v,p)=(0,0,1)$ est solution du problème homogène de Stokes indépendamment des conditions aux limites. Le Quéré [7] a montré qu'un profil de Poiseuille pour la vitesse et une pression linéaire selon y (hauteur du canal) satisfont au problème de Stokes homogène. Si une solution des équations non-homogènes est obtenue, elle n'est alors pas unique à partir du moment où cette solution modifiée par n'importe quel profil de

Poiseuille est encore solution des équations non-homogènes (infinité de solutions). Cette indétermination peut expliquer les discordances observées dans les études numériques. Dans le cas de l'étude de Kettleborough [4], la dimension du noyau de Stokes est de 3, ce qui veut dire que le problème de Stokes admet trois valeurs singulières correspondant à trois modes singuliers, un mode connu $(u,v,p)=(0,0,1)$ et deux autres inconnus. Quant aux études précédemment citées [5], [6], la dimension du noyau de Stokes est de 4, trois modes singuliers sont inconnus. Le problème de Stokes admet alors une infinité de solutions.

Imposer la vitesse verticale à l'entrée d'un canal ouvert est incompatible avec le cas de la convection naturelle. La seule possibilité serait de mettre sa dérivée verticale égale à 0. Il semble logique de dire que l'écoulement rentre verticalement, donc d'imposer une vitesse horizontale à 0. En sortie, dans le cas d'un canal suffisamment long, il paraît logique d'imposer les mêmes conditions aux limites qu'à l'entrée. Cela donne une dimension du noyau de l'opérateur de Stokes de 2 [7]. Une condition de plus sur le traitement des conditions aux limites est nécessaire afin d'obtenir l'unicité de la solution. Dans le but d'avoir une solution unique des équations de Navier-Stokes dans le cas du benchmark [8], nous modifions les champs de vitesse et de pression par le mode de Poiseuille appartenant au noyau de l'opérateur de Stokes [7] afin de vérifier la condition de Bernoulli à l'entrée du canal. Après avoir validé notre méthode en convection pure, nous introduisons le couplage convection/ rayonnement de surfaces et mettons en évidence l'influence du rayonnement sur la structure de l'écoulement pour une émissivité faible de 0.1. Nous présentons la formulation mathématique du problème, l'étude numérique et les résultats avant de conclure.

2. Formulation mathématique

Le problème étudié est un canal ouvert défini dans le benchmark [8] (Figure 1). Une paroi est chauffée partiellement (densité de flux constante), l'autre est adiabatique. Le canal de longueur L , de largeur d et de rapport de forme $A = L/d = 10$ est rempli d'air dont le nombre de Prandtl est égal à $Pr=0.71$. L'écoulement est supposé incompressible, laminaire et bidimensionnel. Le mouvement d'air est gouverné par les équations de Navier-Stokes sous l'hypothèse de Boussinesq. Après l'introduction des variables adimensionnelles:

$$X = \frac{x}{d}, Y = \frac{y}{d}, V = \frac{v}{U_r}, U = \frac{u}{U_r}, Ra = \frac{g\beta q_w d^4}{\nu\alpha\lambda}, P = \frac{p}{U_r^2}, \theta = \frac{T-T_0}{\Delta T}, \Delta T = \frac{q_w d}{\lambda}, L_r = d,$$

$$U_r = \sqrt{\frac{g\beta d^2 q_w}{Pr\lambda}} = \frac{\alpha}{d} Ra^{1/2}, t_r = \frac{d}{U_r} = \frac{d^2}{\alpha} Ra^{-1/2},$$

les équations adimensionnelles correspondantes sont présentées en (1). Pour le cas du canal ouvert considéré, les conditions aux limites sont formulées suivant l'équation (2).

Nous négligeons dans une première approximation les flux longitudinaux en sortie du canal car les gradients thermiques transverses au canal sont plus importants. Cette condition de flux nul suppose que l'écoulement est parfaitement établi (isothermes perpendiculaires à la section de sortie)

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{Pr}{Ra^{1/2}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{Pr}{Ra^{1/2}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + Pr\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Ra^{1/2}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \end{cases} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial\theta)/(\partial X) = 0; V = 0; U = 0; \text{ à } X = 1, 0 \leq Y \leq A \\ (\partial\theta)/(\partial X) = -1; V = 0; U = 0; \text{ à } X = 0, A/4 \leq Y \leq 3A/4 \\ (\partial\theta)/(\partial X) = 0; V = 0; U = 0; \text{ à } X = 0, 0 \leq Y < A/4 \text{ et } 3A/4 < Y \leq A \\ \theta = 0; (\partial V)/(\partial Y); U = 0; P = -0.5 \left(\int_0^1 V(X,0) \right)^2 \text{ à } Y = 0, 0 \leq X \leq 1 \\ (\partial\theta)/(\partial Y) = 0; (\partial V)/(\partial Y) = 0; U = 0; P = 0 \text{ si } V > 0 \text{ à } Y = A, 0 \leq X \leq 1 \\ \theta = 0; (\partial V)/(\partial Y) = 0; U = 0; P = 0 \text{ si } V \leq 0 \text{ à } Y = A, 0 \leq X \leq 1 \end{array} \right. \quad (2)$$

On suppose que le fluide entrant dans le canal est à la température extérieure. Seule une simulation intégrant la totalité de l'environnement permettrait de simuler complètement ce problème (option qui n'a pas été choisie dans le benchmark [8]). Dans le cas du couplage convection/rayonnement seules les conditions aux limites thermiques pariétales sont à changer. L'air est supposé transparent, les parois verticales sont considérées grises, diffuses et opaques ayant une émissivité $\varepsilon = 0.1$. L'entrée et la sortie du canal sont considérées telles des parois fictives assimilées à un corps noir avec $\varepsilon = 1$. Sous forme adimensionnée avec $q_r^* = q_r / q_w$, les conditions aux limites pariétales s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\partial\theta)/(\partial X) + q_r^* = -1 \text{ à } X = 0, A/4 \leq Y \leq 3A/4 \\ -(\partial\theta)/(\partial X) + q_r^* = 0 \text{ à } X = 0, 0 \leq Y < A/4 \text{ et } 3A/4 < Y \leq A \\ -(\partial\theta)/(\partial X) - q_r^* = 0 \text{ à } X = 1, 0 \leq Y \leq A \end{array} \right. \quad (3)$$

3. Méthodes numériques

Les équations de Navier-Stokes (1) sont discrétisées par des schémas du type différences finies d'ordre 2 en temps et en espace. Les variables (U, V, P) sont localisées sur un maillage décalé. Le couplage vitesse-pression est résolu via une méthode de projection. Après discrétisation en temps, nous obtenons le système d'équations de Stokes instationnaire qui se met sous forme d'équations de Helmholtz. Le mode de Poiseuille appartenant au noyau de l'opérateur de Stokes est utilisé pour corriger la vitesse et la pression afin de satisfaire la condition de Bernoulli à l'entrée du canal (voir § 4). Le problème radiatif est discrétisé sur le même maillage que pour les équations de Navier-Stokes afin de connaître la distribution locale du flux radiatif sur les deux parois verticales. La densité de flux au pas de temps $n+1$ est calculée sous forme matricielle via la méthode des radiosités, elle s'écrit :

$$q_r^{*(n+1)} = [I_d - F] J^{*(n+1)} \quad (4)$$

avec $J_i^{*(n+1)} = (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j^{*(n+1)} + \left(\varepsilon_i \sigma (\Delta T \theta_i^{n+1} + T_0)^4 \right) / q_w$, $J_i^* = J_i / q_w$ est la radiosité adimensionnée,

I_d est la matrice identité, N est le nombre total des éléments de surfaces et F_{ij} est le facteur de forme qui représente la fraction d'énergie radiative qui part de la surface i et arrive sur la surface j . En 2D les facteurs de forme sont analytiques [9].

Les conditions aux limites thermiques qui couplent θ et q_r^* instantanées sont traitées en temps de manière semi-implicite : $\tilde{q}_r^{*(n+1)} = 2q_r^{*(n)} - q_r^{*(n-1)}$ [9]. À titre d'exemple, pour $X = 1, 0 \leq Y \leq A$: $-(\partial\theta^{n+1})/(\partial X) - \tilde{q}_r^{*(n+1)} = -(\partial\theta)/(\partial X) - 2q_r^{*(n)} + q_r^{*(n-1)}$. Ce traitement nous permet d'obtenir d'abord θ^{n+1} et ensuite $q_r^{*(n+1)}$ en résolvant le problème radiatif (4).

4. Contrôle des conditions aux limites dynamiques

Dans cette section nous expliquons comment corriger la vitesse et la pression dans le cadre de la méthode de projection afin de satisfaire la condition de Bernoulli à l'entrée du canal. La méthode de projection consiste à trouver d'abord un champ de vitesse de prédiction (U^*, V^*) et ensuite les champs de vitesse et de pression de correction afin de satisfaire la contrainte d'incompressibilité [10]. À l'étape de projection, nous imposons une condition aux limites de

type Dirichlet homogène en pression à l'entrée et en sortie du canal. Étant donné que ces conditions aux limites ne permettent pas de vérifier la condition de Bernoulli, nous essayons de la remplir à l'aide du mode singulier de l'opérateur de Stokes instationnaire [7]: nous obtenons pour cela, une correction de plus sur la pression et la vitesse globales.

4.1. Mode de Poiseuille

Pour obtenir le mode de Poiseuille, nous résolvons l'équation de Helmholtz (5) sous forme adimensionnée et discrète en temps en supposant un gradient de pression constant entre l'entrée et la sortie du canal :

$$\left(\frac{3}{2\Delta t} - \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{1/2}} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) V_p(X) = \frac{1}{A} \quad \text{avec } \Delta t \text{ est le pas de temps} \quad (5)$$

Nous rappelons que, si une solution des équations non-homogènes est obtenue, cette solution modifiée par le mode singulier $(0, V_p, 1-Y/A)$ fois une constante quelconque, $k_c (0, V_p, 1-Y/A)$ est encore solution des équations non-homogènes [7].

4.2. Correction des champs de vitesse et de pression

Soient V^n et P^n qui vérifient: $P_e^n = -0.5 \left(\int_0^1 V(X,0)^n dX \right)^2$. Dans l'étape de projection, on résout l'équation de Poisson de $\phi = \tilde{P}^{n+1} - P^n$ avec ϕ homogène à l'entrée et à la sortie du canal, donc $\tilde{P}_e^{n+1} = P_e^n$. Après l'étape de projection, \tilde{V}^{n+1} et \tilde{P}^{n+1} ne satisfont pas la condition de Bernoulli : $\tilde{P}_e^{n+1} \neq -0.5 \left(\int_0^1 \tilde{V}(X,0)^{n+1} dX \right)^2$. Nous devons donc corriger la vitesse et la pression de manière à satisfaire Bernoulli :

$$P_e^{n+1} = -0.5 \left(\int_0^1 V(X,0)^{n+1} dX \right)^2 \quad (6)$$

avec $V(X,Y)^{n+1} = \tilde{V}(X,Y)^{n+1} + V_c(X)$, $V_c(X) = P_c V_p(X)$ et $P^{n+1} = \tilde{P}^{n+1} + P_c \left(1 - \frac{Y}{A} \right)$. Le mode singulier $(0, V_p, 1-Y/A)$ est pondéré par P_c . On développe l'équation (6) et on obtient alors pour P_c l'équation du second degré (7). On obtient deux solutions différentes en P_c . L'une d'elles, très grande en valeur absolue, conduit à des vitesses négatives à l'entrée du canal. Nous avons opté pour la solution ayant la plus petite valeur absolue et un sens physique.

$$P_c^2 \left(\int_0^1 V_p(X) dX \right)^2 + P_c \left[2 + 2 \left(\int_0^1 V_p(X) dX \right) \left(\int_0^1 \tilde{V}(X,0)^{n+1} dX \right) \right] + \left(\int_0^1 \tilde{V}(X,0)^{n+1} dX \right)^2 + 2P_e^n = 0 \quad (7)$$

5. Résultats et discussions (régime stationnaire)

Les figures 2 et 3 représentent deux coupes horizontales de la vitesse verticale à l'entrée et en sortie du canal. Les profils sont comparés avec ceux du LIMSIS et du TREFLE [8]. Les profils sont en excellent accord avec les résultats du TREFLE, tandis qu'ils présentent une différence de 5% en valeur maximale de la vitesse en entrée V_e à $Y=0$ et moins de 0.1% à $Y=A$ sur la vitesse en sortie V_s en comparant avec les résultats du LIMSIS (voir tableau 1). Quant aux profils de température en sortie du canal illustrés dans la figure 4, les résultats des trois études sont en bon accord. La comparaison des nombres de Nusselt local $Nu_y = \frac{1}{\theta(0,Y)}$ pour

différentes hauteurs du canal, de Nusselt moyen $\bar{Nu} = \frac{2}{A} \int_{A/4}^{3A/4} Nu_y(0,Y)$ le long de la zone chauffée

et la vitesse moyenne en sortie du canal $\bar{v}_s = \int_0^1 V(X,A) dX$ dans le cas de la convection pure est montré dans le tableau 1. Le nombre de Nusselt local présente une différence de l'ordre de

0.3% en moyenne, tandis que la vitesse moyenne en sortie du canal est différente de moins de 1% du résultat du TREFLE et d'environ 3% avec celui du LIMSI. Ainsi, pour la même géométrie et les mêmes conditions aux limites, notre code permet de retrouver quasiment les mêmes résultats obtenus dans le benchmark [8]. La démarche utilisée dans le traitement des conditions aux limites pour satisfaire la condition de Bernoulli à l'entrée du canal est validée. Dans le cas de figure du benchmark [8], l'unicité de la solution est obtenue en modifiant les champs de vitesse et de pression à l'aide du mode singulier de l'opérateur de Stokes instationnaire. Par ailleurs, on observe des vitesses négatives en sortie du canal (voir figure 3). Quand le chauffage est non-symétrique, l'air le long de la paroi adiabatique (non chauffée) n'est pas soumis à la force d'Archimède. D'autre part, le long de la paroi chauffée se développe une couche limite convective dans laquelle le débit massique augmente avec le mouvement ascendant du fluide. Pour alimenter cette couche limite, la conservation de la masse exige une recirculation alimentée par le haut le long de la paroi non-chauffée. Le calcul du débit entrant en sortie du canal G_{es} est illustré dans le tableau 1. Le débit mesuré dans notre étude est différent respectivement de 0.4% et de 14% comparé aux débits calculés par le TREFLE et le LIMSI. La figure 5 représente les lignes de courant dans le canal avec et sans rayonnement. En présence du rayonnement avec une émissivité de 0.1 pour les deux parois, la paroi adiabatique chauffe et crée une deuxième couche limite convective faible qui vient alimenter l'écoulement par le bas. C'est la raison pour laquelle l'écoulement ne présente pas de recirculation vers la sortie contrairement au cas de la convection pure. La figure 6 représente le profil de température à $Y=A$ en convection pure et pour le couplage convection/rayonnement. La température de sortie au niveau de la paroi chaude diminue d'environ 22 %. Celle de la paroi adiabatique augmente légèrement.

$Ra = 5.10^5$ $A = 10$	\bar{Nu}	$Nu_{A/2}$	$Nu_{3A/4}$	Nu_A	\bar{v}_s	G_{es}	V_e max	V_s max
<i>CETHIL</i>	6.93	6.23	5.66	11.9	0.1100	0.0249	0.1651	0.4947
<i>TREFLE</i>	6.98	6.22	5.68	11.9	0.1098	0.0250	0.1646	0.4957
<i>LIMSI</i>	6.95	6.25	5.68	12.0	0.1138	0.0213	0.1746	0.4951

Tableau 1 : Comparaison des nombres de Nusselt moyen, local, de la vitesse moyenne à $Y = A$ et des vitesses maximales à $Y = 0$ et $Y = A$

6. Conclusion

Nous avons effectué une étude numérique sur la convection naturelle pure et le couplage convection/rayonnement dans un canal ouvert chauffé partiellement en densité de flux constante. Le code a été validé dans le cas de la convection pure avec le benchmark du GDR AMETH [8]. En présence du rayonnement de parois, la structure de l'écoulement change complètement : l'écoulement de retour observé dans le cas de la convection pure a disparu et le débit a augmenté. D'ailleurs, nous avons constaté un manque de résultats numériques pour valider nos résultats dans le cas du couplage convection/rayonnement. Dans l'avenir, nous comptons qualifier les conditions aux limites utilisées avec des mesures expérimentales et ensuite explorer d'autres types de conditions aux limites afin de définir les mieux appropriées. Nous pourrions finalement étudier l'effet du nombre de Rayleigh, du rapport de forme et des émissivités des parois sur l'écoulement et le transfert thermique dans le canal.

Références

- [1] A.M. Dalbert, J.L. Peube, F. Penot, and J.F. Robert. Etude de l'écoulement dans un collecteur plan. *Revue de Physique Appliquée*, 15(2) :201–206, 1980.
- [2] S. Ramanathan and R. Kumar. Correlations for natural convection between heated vertical plates. *Journal of Heat Transfer (Transactions of the ASME (American Society of Mechanical Engineers), Series C) ;(United States)*, 113(1), 1991.
- [3] RA Wirtz and RJ Stutzman. Experiments on free convection between vertical plates with symmetric heating. *Journal of Heat Transfer*, 104 :501, 1982.

- [4] CF Kettleborough. Transient laminar free convection between heated vertical plates including entrance effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(5) :883–896, 1972.
- [5] N. Bianco and S. Nardini. Numerical analysis of natural convection in air in a vertical convergent channel with uniformly heated conductive walls. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 32(6) :758–769, 2005.
- [6] J. Vareilles H. Pabiou M. Fossa E. Léonardi S. Giroux-Julien, C. Ménézo. Natural convection in a nonuniformly heated channel with application to photovoltaic facades. *Computational Thermal sciences*, 2010.
- [7] Patrick Le Quéré. On the computation of some external or partially enclosed natural convection flows. *The 19th International Symposium on Transport Phenomena*, 1 :1, 17-20 August 2008.
- [8] Regroupement de laboratoires du GDR AMETH. Benchmark sur les transfert thermo-convectifs dans un canal ouvert. Technical report, MSME, TREFLE, LIMSI et LPBS, 2005/2009.
- [9] H. Wang, S. Xin, and P. Le Quéré. étude numérique du couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surfaces en cavité carrée remplie d'air. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(1) :48–57, 2006.
- [10] AJ Chorin. Numerical simulation of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp*, 22 :745–762, 1968.

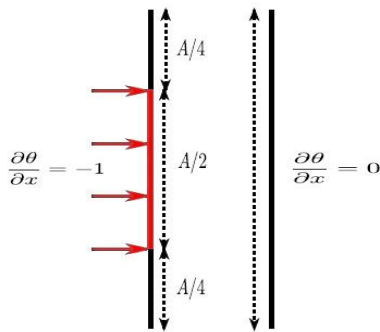


Figure 1 : Géométrie du canal ouvert avec les conditions aux limites thermiques pariétales

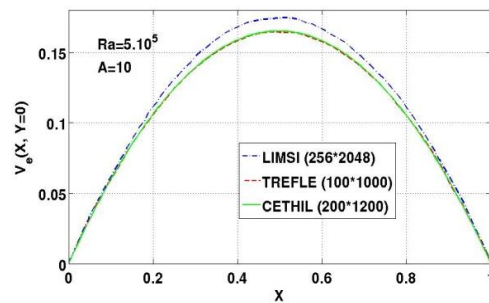


Figure 2 : Vitesse verticale à l'entrée du canal ($Y=0$)

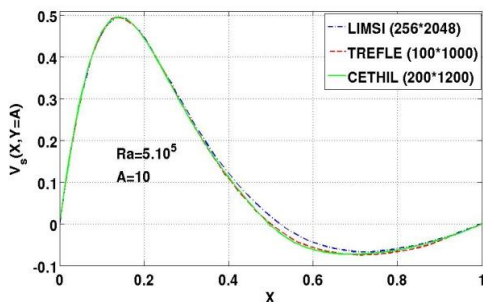


Figure 3 : Vitesse verticale en sortie du canal ($Y=A$) dans le cas de la convection pure

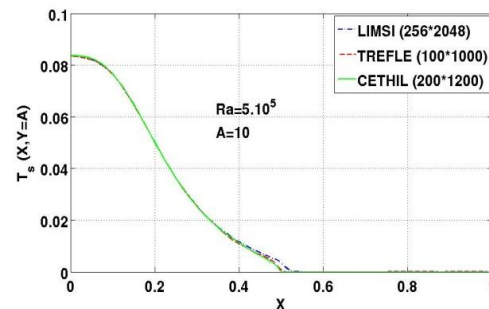


Figure 4 : Température en sortie du canal ($Y=A$) dans le cas de la convection pure

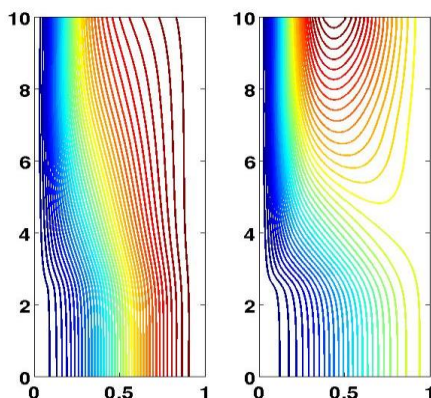


Figure 5 : lignes de courant. Convection pure à droite ; rayonnement/convection à gauche

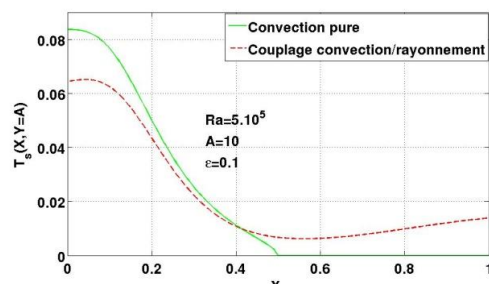


Figure 6 : Influence du rayonnement de surfaces sur la température en sortie du canal ($Y=A$)