

Étude de la convection naturelle thermosolutale dans une enceinte inclinée

Smail BENISSAAD ^{1*}, Assia BOUMARAF ¹, Ahmed DJEBLI ¹

¹Laboratoire d'énergétique appliquée et de pollution. Département de génie mécanique. Université Mentouri – Constantine – 25000 Constantine. Algérie.

* (auteur correspondant : benissaad.smail@gmail.com)

Résumé - Dans ce travail, on a réalisé une étude numérique de la convection naturelle thermosolutale dans une cavité rectangulaire inclinée, remplie par un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Les parois verticales sont soumises à des gradients de température et de concentration constants et les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre les équations gouvernantes. L'influence des différents paramètres de contrôle, sur la structure d'écoulement et sur le transfert de chaleur et de masse, a été examinée.

Nomenclature

A	rapport d'aspect géométrique, L/H	U^*	vitesse caractéristique, α/H
C	concentration adimensionnelle, $(C - C_0)/\Delta C$	(X, Y)	coordonnées cartésiennes adimensionnelles, $(x/H, y/H)$
C_f	coefficient de Forchheimer	<i>Symboles grecs</i>	
D	diffusivité solutale, $m^2.s^{-1}$	α_p	diffusivité thermique du milieu poreux saturé, $k_p/(\rho C)_f, m^2.s^{-1}$
Da	nombre de Darcy, K/H^2	β_C	coefficient d'expansion solutal, $kg.mol.L^{-1}$
g	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$	β_T	coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
H	hauteur de l'enceinte, m	ε	porosité adimensionnelle, ε/σ
K	perméabilité du milieu poreux, m^2	λ	rapport des conductivités thermiques, k_p/k_f
k	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	ϑ	viscosité cinématique du fluide, $m^2.s^{-1}$
L	longueur de l'enceinte, m	ρ	densité du fluide, $kg.m^{-3}$
Le	nombre de Lewis, α_p/D	(ρC)	capacité calorifique, $W.K^{-1}$
N	rapport des forces de volumes, $\beta_C \Delta C / \beta_T \Delta T$	σ	rapport des capacités calorifiques $(\rho C)_p / (\rho C)_f$
P	pression adimensionnelle, $(p - p_0)/P^*$	τ	temps dimensionnel, s
P^*	pression caractéristique, $\rho_0 U^{*2}$	<i>Indices et exposants</i>	
Pr	nombre de Prandtl, ϑ/α_p	0	état de référence
Ra	nombre de Rayleigh thermique, $g\beta_T H \Delta T / \alpha_p \vartheta$	f	fluide
T	température adimensionnelle, $(T - T_0)/\Delta T$	p	poreux
t	temps adimensionnel, τ/t^*	t	thermique
t^*	temps caractéristique, $\sigma H / U^*$	c	concentration
(U, V)	vitesses adimensionnelles dans les directions (X, Y) , $(u/U^*, v/U^*)$		

1. Introduction

L'étude des transferts de chaleur et de masse en milieu poreux s'est particulièrement développée ces dernières années, à cause de leurs applications potentielles dans divers domaines. En effet, le phénomène de la double diffusion peut se produire dans les milieux poreux, telles que la croissance cristalline à partir d'un mélange fondu, les réservoirs pour le stockage de gaz naturel et de déchet radioactif, le transport de polluant dans le sol, etc.

A cet effet, de nombreuses recherches ont été menées sur la modélisation du phénomène de la convection double diffusive en les milieux poreux. Une synthèse très détaillée des travaux effectués dans le passé est présentée dans le livre de Nield et Bejan [1]. Goyeau *et al.* [2] ont étudié la convection naturelle dans des milieux poreux confinés. Ils ont proposé des corrélations pour les transferts de chaleur et de masse dans le cas coopérant. Bennacer *et al.* [3] ont étudié la convection naturelle thermosolutale dans une cavité carrée poreuse avec des gradients horizontaux coopérants imposés de température et de concentration. Les auteurs ont démontré que les propriétés anisotropiques du milieu poreux affectent considérablement les taux de transfert de chaleur et de masse dans la cavité. Une étude numérique de l'écoulement double diffusive opposé dans une cavité poreuse a été réalisée par Younsi *et al.* [4]. Les gradients de température et de concentration ont été imposés horizontalement. Le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer a été utilisé. Les résultats obtenus montrent que l'effet du milieu poreux a été de diminuer la vitesse verticale dans la couche limite. Le transfert de chaleur et de masse et le champ d'écoulement sont aussi affectés profondément.

Dans le présent travail on s'intéresse aux effets de certains paramètres sur l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire ayant un nombre de Prandtl $Pr = 0.71$. Les paramètres de contrôle considérés sont les nombres de Darcy, de Lewis et de Rayleigh et l'angle d'inclinaison de l'enceinte.

2. Géométrie et modèle mathématique

La géométrie étudiée est une cavité rectangulaire ayant un rapport d'aspect $A=4$ et contenant un milieu poreux saturé par un fluide binaire (Fig. 1). Elle est inclinée d'un angle θ par rapport au plan horizontal. Les parois actives (parallèles à l'axe Y) sont soumises à des températures et des concentrations constantes et uniformes. Les autres parois (parallèle à l'axe X) sont supposés adiabatiques et imperméables. On suppose que la matrice poreuse est isotrope et homogène, la solution binaire est un fluide newtonien, incompressible, l'écoulement est laminaire et bidimensionnel, le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable ainsi que l'interaction entre les transferts de chaleur et de masse (effets Soret et Dufour), les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes, l'approximation de Boussinesq est valable. En utilisant le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer, les équations adimensionnelles régissant ce problème sont :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{Pr}{\varepsilon} \nabla^2 U - \frac{Pr}{Da} U - \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \sqrt{U^2 + V^2} U + PrRa(T + NC) \sin\theta \quad (2)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{Pr}{\varepsilon} \nabla^2 V - \frac{Pr}{Da} V - \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \sqrt{U^2 + V^2} V + PrRa(T + NS) \cos\theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \lambda \nabla^2 T \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \left[U \frac{\partial C}{\partial X} + V \frac{\partial C}{\partial Y} \right] = \frac{1}{Le} \nabla^2 C \quad (5)$$

La mise en forme adimensionnelle de ces équations a permis de mettre en évidence les paramètres de contrôle du problème qui sont le nombre de Darcy Da , le nombre de Rayleigh Ra , le rapport des forces de volume N , le nombre de Lewis Le , le nombre de Prandtl Pr et la porosité normalisée ε du milieu poreux, en plus du rapport d'aspect de l'enceinte A .

- **Conditions initiales**

$$\text{Pour } t = 0 : U = V = 0 ; T = C = 0 \quad (6)$$

- **Conditions aux limites**

- Conditions hydrodynamiques :

$$X = 0, \forall Y : U = V = 0 ; Y = 0, \forall X : U = V = 0 \quad (7)$$

- Conditions thermiques et massiques :

$$X = 0, \forall Y : T = 1, C = 0 ; X = 4, \forall Y : T = 0, C = 1 \quad (8)$$

$$Y = 0, \forall X : \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{\partial C}{\partial Y} = 0 ; Y = 1, \forall X : \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{\partial C}{\partial Y} = 0 \quad (9)$$

- **Transfert de chaleur et de masse**

Les transferts de chaleur et de masse sur les parois actives sont exprimés par les nombres moyens de Nusselt \overline{Nu} et de Sherwood \overline{Sh} , respectivement, définis par :

$$\overline{Nu} = \int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)_{X=0} dY \quad (10)$$

$$\overline{Sh} = \int_0^1 \left(\frac{\partial C}{\partial X} \right)_{X=0} dY \quad (11)$$

3. Méthode numérique

La méthode des volumes finis a été utilisée pour la discrétisation des équations modélisantes employant le schéma hybride. Les équations discrétisées sont résolues par une procédure de double balayage (ADI). Le couplage pression-vitesse est résolu par une procédure itérative de correction de la pression employant l'algorithme SIMPLER [5].

Les itérations sont répétées jusqu'à ce que les différences entre deux valeurs successives des variables U , V , T et C et celles des nombres moyens de Nusselt et de Sherwood près des parois actives, entre deux incréments de temps t et Δt , respectivement, soient négligeables tels que :

$$(|(\phi_{i,j}^{t+\Delta t} - \phi_{i,j}^t) / \phi_{i,j}^{t+\Delta t}|) \leq 10^{-4} \quad (12)$$

$$(|\overline{Nu}_{X=0} - \overline{Nu}_{X=4}|) \leq 10^{-3} \quad (13)$$

$$(|\overline{Sh}_{X=0} - \overline{Sh}_{X=4}|) \leq 10^{-3} \quad (14)$$

Le code de calcul élaboré a été validé par comparaison avec les différents résultats numériques disponibles (Goyeau *et al.* [2]), Bennacer *et al.* [3], Younsi *et al.* [4]). Les résultats obtenus indiquent aussi qu'un maillage de 132×68 est suffisant pour assurer une bonne résolution spatiale du problème étudié.

4. Résultats et discussions

4.1. Influence de la perméabilité du milieu poreux

L'examen de l'effet de la perméabilité sur l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur et de masse, est illustré par les résultats numériques obtenus pour différentes valeurs du nombre de Darcy. Les résultats présentés sur la figure 2 illustrent l'effet du nombre de Darcy sur le transfert de chaleur et de masse, pour une large gamme de Da variant de 1 à 10^7 , dans le cas de $N=1$, $Ra=10^6$ et 10^8 , $Le=10$ et $\theta=30^\circ$. Ces résultats montrent que pour les faibles valeurs de la perméabilité ($Da \leq 10^{-6}$), les nombres de Nusselt et de Sherwood demeurent pratiquement constants, le milieu poreux dans cette gamme de Da se comporte comme une paroi imperméable où l'écoulement est presque négligeable. Pour les intermédiaires valeurs de Darcy ($10^{-6} \leq Da \leq 10^{-1}$), on constate une forte augmentation de Nu et de Sh . Pour les valeurs élevées de la perméabilité ($Da \geq 10^{-1}$), les transferts de chaleur et de masse sont encore plus élevés et tendent vers une valeur constante.

La figure 3 illustre les résultats obtenus dans le cas où $Da = 10^{-2}$. On constate, que pour cette valeur du nombre de Darcy, la perméabilité a une forte influence sur la structure de l'écoulement et le transfert thermique et massique. L'écoulement est monocellulaire circulant dans le sens horaire. Les lignes de courant sont confinées près des parois de la cavité, ce qui

traduit l'accélération de l'écoulement. Alors que, les isothermes sont des lignes verticales largement déformés de gauche à droite, sous l'effet de l'intensification de la convection et les isoconcentrations sont confinés près des parois, tandis qu'au centre de la cavité la valeur de la concentration est constante $C=0.5$.

4.2. Influence Du Nombre De Lewis

La figure 4 montre l'effet du nombre de Lewis sur le transfert de chaleur et de masse pour une gamme du nombre de Lewis variant de 0.01 à 100, $N = 1 ; 6 \text{ et } 10$, $Da = 10^{-2}$, $\theta = 30^\circ$ et $Ra = 10^8$. Les résultats obtenus montrent, que pour $Le \leq 10$, les valeurs du nombre de Nusselt diminuent avec l'augmentation du nombre de Lewis. Ce décroissement est dû à la diminution de la force de volume thermique résultant de l'augmentation de Le . Par contre les valeurs du nombre de Sherwood augmentent lorsque la force de volume solutale augmente avec l'accroissement de Le . On remarque qu'au delà de $Le \geq 10$, les valeurs du nombre de Nusselt et du nombre de Sherwood tendent vers des valeurs limites constantes. Les résultats obtenus, pour le cas de $N=10$ et $Le=0.1$ illustrées sur le figure 5, montrent que les isothermes et les isoconcentrations sont des lignes plus concentrées près des deux parois actives. L'écoulement est alors multicellulaire circulant dans le sens horaire, avec la présence de deux cellules secondaires au centre de la cavité en plus de la cellule principale. Quand $Le=10$ (figure 6), les isothermes sont des lignes concentrées près des deux parois actives. Les isoconcentrations sont des lignes confinées au voisinage des parois. Au centre de la cavité $C=0.5$. L'écoulement est monoculaire circulant dans le sens horaire et elle ralentit avec l'augmentation de Le .

4.3. Influence du nombre de Rayleigh

La figure 7 montre l'influence du nombre de Rayleigh sur le transfert de chaleur et de masse, dans le cas de $N=1$, Ra variant de 10^4 à 10^8 , $\theta=0^\circ ; 30^\circ$ et 60° , $Da=10^{-2}$ et $Le=10$. Ces résultats montrent, qu'en dessous de $Ra=10^5$, les valeurs de Nu et Sh sont pratiquement semblables et ont les mêmes valeurs pour les valeurs considérées de θ . Au delà de $Ra > 10^5$, les nombres de Nusselt et de Sherwood s'accroissent d'une façon monotone avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Cet accroissement résulte de l'élévation des forces de volume, thermique et solutale en raison de l'augmentation de R_T . Les résultats illustrés sur la figure 8 dans le cas de $\theta = 30^\circ$ et $Ra=10^4$, montrent une stratification des isothermes dans la direction d'inclinaison de X . Les isoconcentrations sont concentrés plus au voisinage des deux parois actives et au milieu de la cavité on a $C \approx 0.5$. Alors que l'écoulement est monocellulaire circulant dans le sens horaire. Lorsque la valeur du nombre de Rayleigh augmente à 10^8 (figure 9), les résultats obtenus montrent que les isothermes sont des lignes très déformées de gauche à droite et concentrées près des deux parois actives. Les isoconcentrations se confinent au voisinage des parois de la cavité et restent presque constante au centre de la cavité $C \approx 0.5$. L'écoulement est monocellulaire circulant dans le sens horaire et son intensité augmente avec le nombre de Rayleigh. Cette élévation est due à l'accroissement des écarts de température et de concentration résultants de l'augmentation de la valeur de Ra .

4.4. Influence de l'angle d'inclinaison de la cavité

La figure 10 illustre l'influence d'angle d'inclinaison sur le transfert de chaleur et de masse pour $0^\circ < \theta < 90^\circ$. Pour $\theta < 30^\circ$, on constate une augmentation de Nu et de Sh . Ceci est dû à l'accélération de l'écoulement près des parois actives. Pour $30^\circ < \theta < 90^\circ$, on observe une réduction de Nu et de Sh , qui est due à la décélération de l'écoulement près des parois actives.

5. Conclusion

L'étude de la convection naturelle thermosolutale dans une cavité rectangulaire inclinée a permis d'aboutir aux conclusions suivantes. L'intensité de l'écoulement augmente avec le

nombre de Darcy et cette croissance est d'autant plus élevée que le nombre de Rayleigh est élevé. Pour les valeurs du nombre de Darcy les plus faibles, le milieu poreux se comporte comme une paroi imperméable. Alors que, le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation du nombre de Lewis. Ce décroissement est dû à la diminution de la force de volume thermique qui résulte de l'augmentation du nombre de Lewis. La variation du nombre de Rayleigh provoque une augmentation de l'intensité de l'écoulement et cette croissance est due à l'augmentation des écarts de température et de concentration résultants.

Références

- [1] D. A. Nield, A. Bejan, Convection in Porous Media, third ed., Springer-Verlag (2006).
- [2] B. Goyeau, J.-P. Songbe and D. GOBIN, Numerical study of double-diffusive natural convection in a porous cavity using the Darcy-Brinkman formulation. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 39, No. 7, pp. 1363-1378, (1996).
- [3] R. Younsi, A. Harkati and D. Kalache, Numerical simulation of double-diffusive natural convection in porous cavity: opposing flow. *The Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 27, N° 1C, (2002).
- [4] R. Bennacer, A. Tobbal and H. Beji, Convection naturelle Thermosolutale dans une Cavité Poreuse Anisotrope: Formulation de Darcy-Brinkman. *Rev. Energ. Ren.* Vol. 5, pp. 1-21, (2002).
- [5] S.V. Patankar, Numerical Heat transfer and fluid flow, Hemisphere, Washington, DC, (1980).

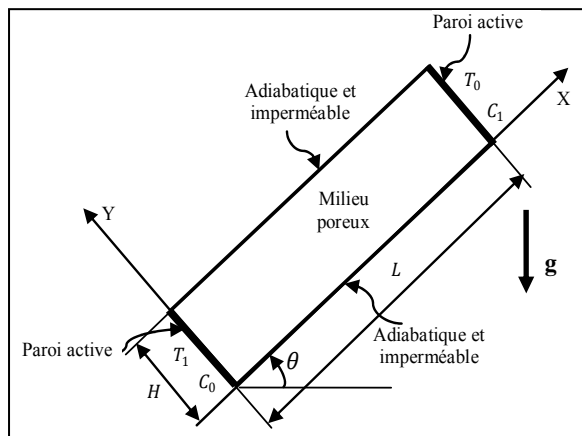


Figure 1 : Géométrie de problème considéré.

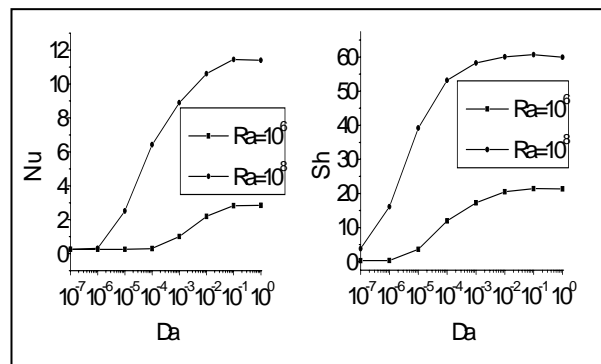


Figure 2 : Influence de Da sur Nu et Sh pour $N=1$, $Le=10$, $\theta=30^\circ$

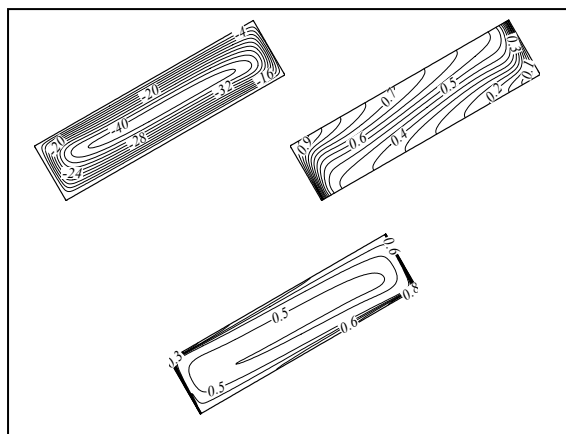


Figure 3 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations : $Da=10^{-2}$, $N=1$, $Le=10$, $\theta=30^\circ$

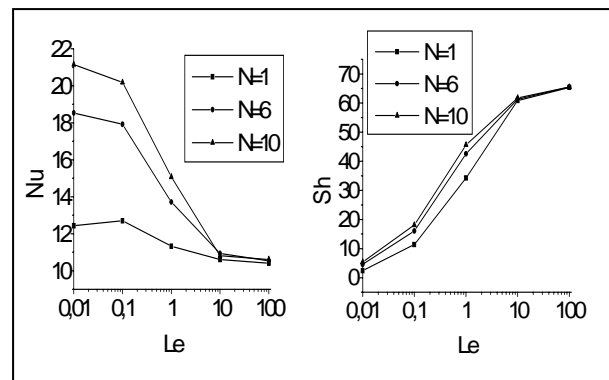


Figure 4 : Influence de Le sur Nu et Sh : $Da=10^{-2}$, $\theta=30^\circ$, $Ra=10^8$

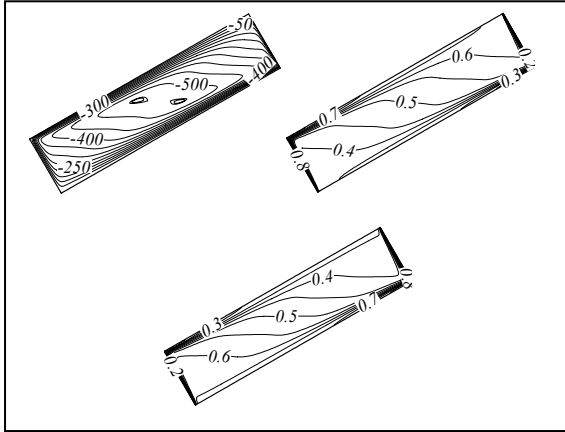


Figure 5 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations : $Le=0.1$, $N=10$, $Ra=10^8$, $Da=10^{-2}$, $\theta=30^\circ$

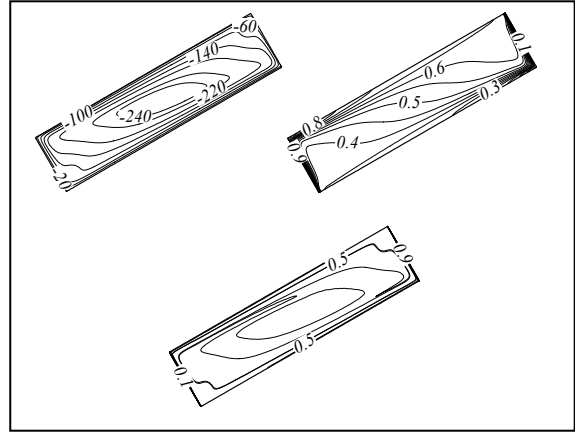


Figure 6 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations : $Le=10$, $N=10$, $Ra=10^8$, $Da=10^{-2}$, $\theta=30^\circ$

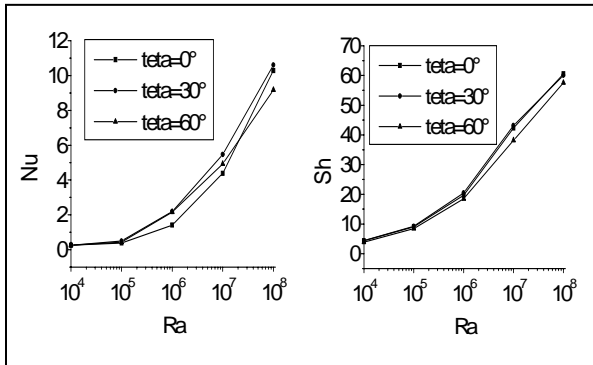


Figure 7 : Influence de Ra sur Nu et Sh : $Le=10$, $N=1$, $Da=10^{-2}$

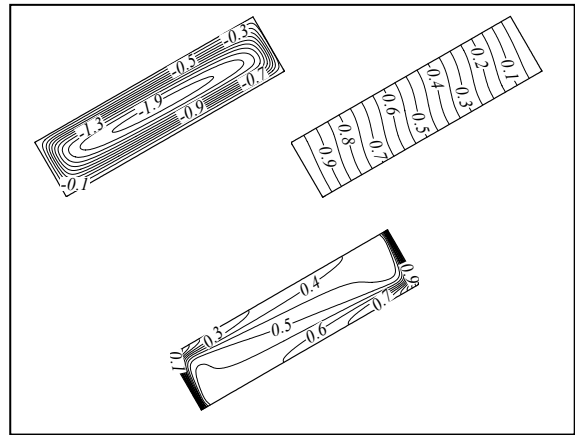


Figure 8 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations : $Ra=10^4$, $Le=1$, $N=10$, $Da=10^{-2}$, $\theta=30^\circ$

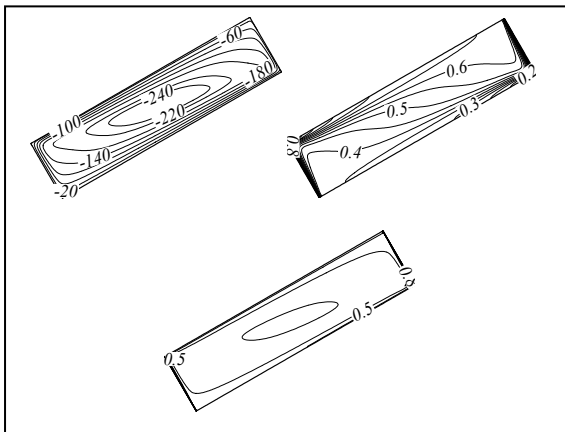


Figure 9 : Lignes de courant, isothermes et isoconcentrations : $Ra=10^8$, $Le=1$, $N=10$, $Da=10^{-2}$, $\theta=30^\circ$

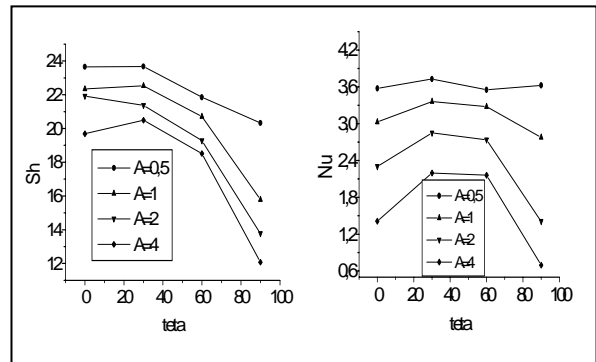


Figure 10 : Influence de θ sur Nu et Sh : $N=1$, $Le=10$, $Ra=10^6$, $Da=10^{-2}$