

# Etude numérique de la fusion d'un bloc solide soumis à un écoulement horizontal : utilisation de la méthode de lattice Boltzmann.

Soumia EDDAKIRI<sup>1</sup>, El Alami SEMMA<sup>1,\*</sup>, Mohammed EL GANAOUT<sup>2</sup>, Rachid BENNACER<sup>3</sup>, Bernard PATHYRON<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique, FST de Settat, B.P. 577, Settat, Maroc

<sup>2</sup>SPCTS UMR 6638 CNRS Université de Limoges. FST, 123 Av Albert Thomas 87060 Limoges

<sup>3</sup>LEEVAM, LEEU University Cergy, Pontoise Rue d'Eragny, Newville sur Oise, 95031 Cergy, Pontoise Cedex, France.

\* auteur correspondant [semmaalama@yahoo.fr](mailto:semmaalama@yahoo.fr)

**Résumé.** La présente étude concerne la fusion d'un bloc froid dans un canal horizontal. Les équations de Navier Stokes et de conservation de l'énergie sont discrétisées à l'aide de la méthode de lattice Boltzmann. Un modèle mixte associant la méthode de suivi du front pour les champs des vitesses et la méthode enthalpique pour le champ thermique est proposé. L'évolution de la forme du bloc et la cinétique de changement de phase dépendent fortement du nombre de Reynolds. Une corrélation sur la variation de la fraction solide est proposée.

## Nomenclature

$H$	Hauteur du canal	<i>Symboles grecs</i>	
$L$	Longueur du canal	$\tau$	Temps de relaxation
$Ar$	Rapport de forme	$w$	Poids nodal
$\mathbf{u}$	Vitesse	$\varepsilon$	Energie
$T$	Température	$\nu$	Viscosité cinématique
$R$	Constante de gaz parfait	$\delta t$	Pas de temps
$P$	Pression	$\delta x$	Constante du réseau
$t$	Temps	$\Omega$	Opérateur de collision
$f^{eq}, g^{eq}$	Fonction de distribution à l'équilibre	$\rho$	Masse volumique
$F, g$	Fonction de la distribution	$\alpha$	Diffusivité thermique
$c_s$	Vitesse de son sur réseau lattice	<i>Indices</i>	
$F$	Force externe	eq	Equilibre
$Nu$	Nombre de Nusselt	max	Maximal
$Ra$	Nombre de Rayleigh	$\iota$	Direction
$Pr$	Nombre de Prandtl	$T$	thermique
$Ste$	Nombre de stefan	m	fusion

## 1. Introduction

Les phénomènes de changement de phase jouent un rôle important dans plusieurs domaines industriels à savoir le traitement de surface, la croissance cristalline, la métallurgie, ... etc. La maîtrise et la quantification des phénomènes liés aux procédés de changement de phase sont des étapes indispensables pour l'amélioration et le développement de ces procédés [1-2].

Plusieurs méthodes ont été utilisées pour simuler numériquement les phénomènes de transfert couplés avec le changement de phase. Les méthodes classiques basées sur la résolution des équations macroscopiques sont limitées dans la description des phénomènes de croissance microscopique. Afin de remédier à cette limitation, la méthode de lattice Boltzmann (LBM) constitue une alternative pour décrire ce type de problèmes [3-6]. D'autre part, la plupart des études des phénomènes de changement de phase solide/liquide en présence de l'écoulement d'une phase fluide ont mis en évidence l'effet de la convection naturelle sur la forme et la position de l'interface solide/liquide [7-8].

La plus part des travaux récents utilisant la méthode LBM dans la résolution des équations relatives aux mouvements fluides se sont concentrés sur les écoulements isothermes et il reste beaucoup d'efforts à déployer pour couvrir d'autres champs disciplinaires couplant les transferts de chaleur et l'écoulement des fluides en régime forcé en présence de changement de phase solide/liquide.

Dans ce travail nous étudions l'effet de l'écoulement forcé sur la fusion d'un bloc solide dans un canal horizontal.

## 2. Le modèle de Lattice Boltzmann (LBM)

### 2.1 modèle LBM pour le champ dynamique

Dans cette étude, la méthode LBM utilisée est basée sur le modèle carré de lattice (Frisch-Hasslacher-Pomeau model). Elle consiste à déterminer la solution de l'équation suivante :

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = \Omega_i \quad (1)$$

avec  $f_i$  la fonction de distribution définie pour un ensemble de particule de vitesse  $\mathbf{c}_i$ . Le terme de collision  $\Omega_i$  utilise l'approximation dite de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) [5].

Le principe de cette approximation est basé sur le fait que le terme de collision  $\Omega_i$  peut être remplacé par une approche linéaire :

$$\Omega_i = -\frac{f_i - f_i^{eq}}{\tau} + \delta_i F_i \quad (2)$$

avec  $\tau$  le temps de relaxation et  $f_i^{eq}$  la fonction de distribution à l'équilibre dépendant des propriétés hydrodynamiques locales.  $\delta_i F$  le champ des forces externes. La présente méthode est complètement définie par le choix de la fonction de distribution à l'équilibre :

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left[ 1 + 3 \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{c^4} \right] \quad (3)$$

avec  $\mathbf{u}$  et  $\rho$  les valeurs macroscopiques respectives de la vitesse et de la densité et  $\omega_i$  les coefficients de pondération suivant chaque direction du réseau lattice.

Les quantités hydrodynamiques macroscopiques sont déterminées à travers les moments dans l'espace de phase :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

$$\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

La procédure de Chapman-Enskog pour la fonction de distribution permet de retrouver les équations de Navier Stokes. La viscosité est reliée au temps de relaxation par la relation :

$$\nu = (\tau_v - \frac{1}{2}) c_s^2 \delta t \quad (6)$$

## 2.2 Modèle LBM pour la température.

Deux équations LBGK ont été utilisées pour résoudre les champs de vitesse et de température. Dans ce contexte, l'évolution de l'équation LBGK pour la température est donnée par :

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_T} (g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (7)$$

avec  $g_i$  la fonction de distribution de l'énergie,  $\tau_T$  le temps de relaxation adimensionnel pour le champ thermique. La température est calculée par la sommation :

$$\rho \varepsilon = \sum_i g_i \quad (8)$$

la diffusivité thermique est reliée au temps de relaxation par

$$\alpha = \frac{1}{3} (\tau_T - \frac{1}{2}) c^2 \delta t \quad (9)$$

## 2.3. Traitement du changement de phase.

Pour résoudre le problème lié au changement de phase, nous avons adopté une méthode enthalpique en considérant la zone de changement de phase comme milieu poreux pour assurer la continuité entre les deux phases solide et liquide [8]. La fusion prend place dans un intervalle de température autour de la température de fusion  $T_f \pm \delta$  (typiquement  $\delta = 5\%$  de  $\Delta T$ ). Le principe de la méthode enthalpique est de séparer la chaleur sensible et la chaleur latente en introduisant la fraction fluide pour désigner la zone de changement de phase et distinguer ainsi les deux phases solide et liquide. Dynamiquement, la zone de changement de phase est traitée comme milieu poreux. L'écoulement dans la zone poreuse dépend de sa perméabilité. La méthode de lattice est introduite en supposant que la population de la densité est uniformément distribuée dans chaque nœud. A chaque pas de temps, une particule se déplace le long d'une distance de 1 ou  $\sqrt{2}$  de l'espace lattice. Si le nœud est totalement solide,  $f_i^*(\mathbf{x}, t)$  est

complètement réfléchi et on a  $f_i(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ . Si le nœud contient une fraction liquide non nulle, seulement une partie de  $f_i^*(\mathbf{x}, t)$  se propage et l'autre partie retourne à la cellule initiale.

### 3. Résultats et discussion

Nous avons considéré le modèle à deux populations pour traiter les deux champs thermique et dynamique. Ce modèle a été validé en considérant une cavité carrée différentiellement chauffée contenant un fluide ayant un nombre Prandtl ( $Pr = 0.71$ ). L'étude a été effectuée pour une vitesse d'entrée allant de  $Ra = 10^3$  à  $Ra = 10^6$ . Les valeurs numériques sont en bon accord avec les résultats de Benchmark de Devahl Davis [9] (tableau 1). D'autre part, nous avons validé le modèle en présence de changement de phase solide/liquide et en conduction pure. Le problème considéré est le cas classique de choc thermique sur la surface d'un liquide (présentant une solution analytique). Le domaine considéré est une cavité rectangulaire horizontalement allongée. Les bords sont tous adiabatiques, sauf la paroi verticale gauche où la température est imposée.

Une solution analytique [1] de l'évolution de l'interface de solidification dans un domaine infini est donnée par la relation:

$$X(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha t} \quad (10)$$

avec  $\lambda$  une constante donnée par l'équation :

$$\sqrt{\pi}\lambda e^{\lambda^2} = Ste \left[ \frac{1}{\text{erf}(\lambda)} + \frac{T_m}{\text{erfc}(\lambda)} \right] \quad (11)$$

Dans ce qui suit nous traitons la fusion d'un bloc solide cylindrique par l'écoulement forcé dans un canal horizontal de rapport de forme 0,04 rempli d'un fluide caractérisé par un nombre de Stefan de 1,2 et un nombre de Prandtl  $Pr = 0.71$ . Les résultats présentés montrent une bonne concordance des résultats numériques (LBM) avec les évaluations analytiques pour  $\lambda = 0,445$ . L'erreur présentée par la considération d'un domaine fini demeure négligeable pour des positions de l'interface ne dépassant pas une limite maximum. Cette validation montre la capacité de la méthode à décrire avec précision l'évolution d'interface solide / liquide.

**Tableau 1.** En gras les présentes valeurs numériques correspondant à un réseau lattice (150x150) pour  $Ra = 10^5$  et 250x250 pour  $Ra = 10^6$ , et les valeurs soulignées sont les résultats de référence [9].

<b>Ra</b>	<b>u<sub>max</sub></b>		<b>v<sub>max</sub></b>		<b>Nu</b>	
$10^5$	<b>68,68</b>	<u>68,59</u>	<b>34,73</b>	<u>34,73</u>	<b>4,521</b>	<u>4,519</u>
$10^6$	<b>220,418</b>	<u>219,36</u>	<b>64.763</b>	<u>64,63</u>	<b>8,814</b>	<u>8,800</u>

Dans ce travail, nous avons considéré une cavité de rapport de forme  $Ar = H/L = 0.5$  et remplie avec un fluide caractérisé par un nombre de Prandtl ( $Pr = 1.0$ ). Une boule solide de rayon  $R = 0.1$  est placée au point de coordonnées (0.5,0.5). Les parois

horizontales sont considérées adiabatiques. A l'entrée, le fluide est porté à une température chaude  $T_C = 1$  et à la sortie on suppose que les flux locaux sont constants.

L'évolution de la fusion de la zone solide est représentée dans la figure 2. L'effet de l'écoulement forcé à travers le canal horizontal est nettement clair. Lorsque la vitesse d'entrée est augmentée, la fusion de la zone solide est accélérée ce qui montre bien l'effet important de l'écoulement forcé sur la fusion d'un bloc solide. La présence de fortes intensités de vitesse en amont du bloc change la forme du bloc qui passe d'une forme circulaire à une forme ovoïdal.

Lorsque l'intensité de la vitesse à l'entrée du bloc augmente, les transferts convectifs du côté aval du bloc augmentent ce qui accélère la fusion du bloc. En fait pour les faibles valeurs de l'intensité de la vitesse à l'entrée, le temps de fusion de bloc reste pratiquement constant avec une valeur proche de 3200 lu, lorsque la vitesse relative augmente et dépasse 0.005 (figure 3), Le temps de fusion en fonction des valeurs importantes de la vitesse peut être estimé par :

$$t_f \propto 1 / \sqrt[3]{U_0} \quad (12)$$

$$\text{ou en fonction du nombre de Reynolds : } t_f \propto 1 / \sqrt[3]{Re} \quad (13)$$

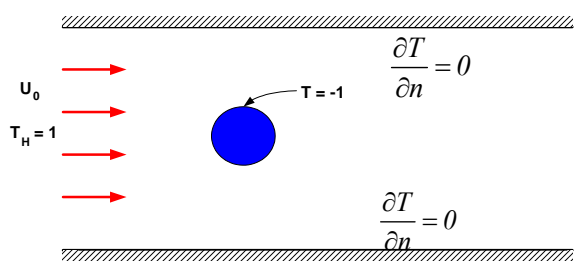
#### 4. Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté les résultats relatifs aux changements de phase solide/liquide d'un bloc solide/liquide en présence d'un écoulement forcé. L'effet de l'intensité de l'écoulement à l'entrée du canal est discuté. Une corrélation liant le temps de fusion en fonction de la vitesse d'entrée est présentée. L'étude est en cours d'extension en considérant l'effet couplé de la convection naturelle et la convection forcée dans un canal horizontal.

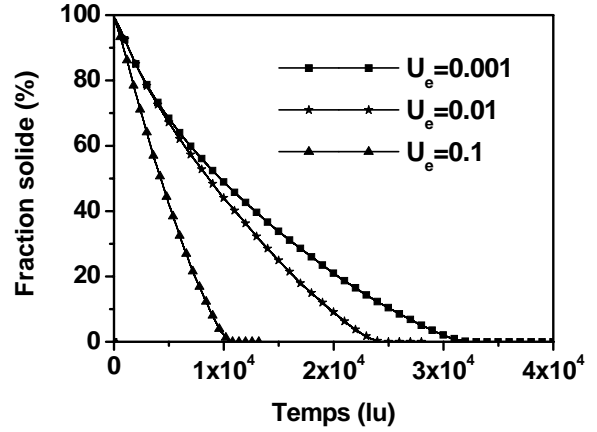
#### 5. Références

- [1] J. Grank (1984), *Free and Moving Boundary Problems*, Clarendon Press, Oxford, U. K.,
- [2] J.C. Brice, (1976), *The growth of crystals from liquids*. North-Hollands, New York,.
- [3] R. Raj, A. Prasad, P.R. Parida, et S. C. Mishra,(2006), *Analysis of solidification of a semitransparent planar layer using the lattice Boltzmann method and the discret transfer method*, Num. Heat Transfer, Part A, 49; 1-21.
- [4] D. Chatterjee et S. Chakraborty, (2006), *A hybrid lattice Boltzmann model for solid liquid phase transition in presence of fluid flow*, Physics Letters A 351, 359-367.
- [5] W. Miller, I. Rasin et S. Succi,(2006), *Lattice Boltzmann phase-field modelling of binary-alloy solidification*, Physics A 362 78-83
- [6] W Miller, S. Succi et D. Mansutti,(2001), *Lattice Boltzmann model for anisotropic liquid-solid phase transition*, Physical Review Letters, V. 86, N° 16
- [7] C. Gau, et R. Viskanta, (1984), *Melting and solidification of a metal system in a rectangular cavity*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 27, pp. 113-123
- [8] J. Kaenton, E. Semma, V. Timchenko, E. Leonardi, M. El Ganaoui, et G. de Vahl Davis, (2004), *Effects of anisotropy and solid/liquid thermal conductivity ratio on flow instabilities during inverted Bridgman growth*. Int. J. Heat and Mass Transfer, 47, 14-16, 3403-3413.

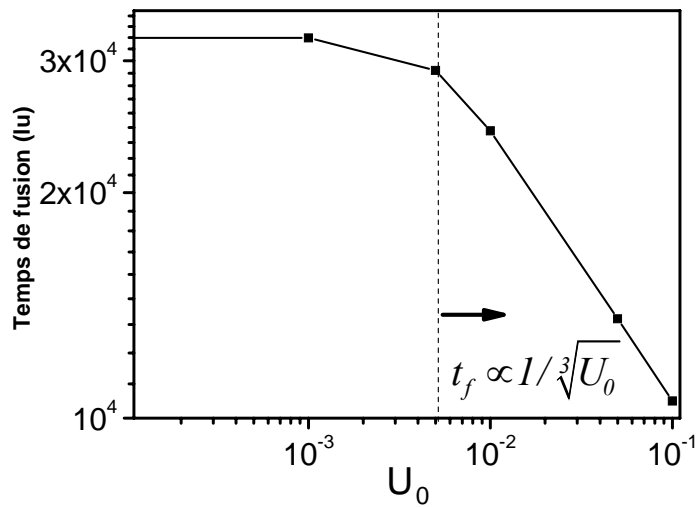
[9] G. Devahl Davis,(1983), *Natural convection of air in a square cavity : a benchmark numerical solution*, Int. J. Numer. Fluid Meth. Fluids 3.



**Figure 1 :** Configuration géométrique



**Figure 2:** Evolution temporelle de la fusion du bloc solide pour différentes valeurs de la vitesse d'entrée du fluide.



**Figure 3 :** Variation du temps de fusion en fonction de la vitesse d'entrée de l'écoulement.