

Application de la méthode de Schmidt avec régénération imparfaite aux 3 types de moteur Stirling. Nouvelles solutions analytiques

Lavinia GROSU⁽¹⁾, Pierre ROCHELLE^(1, 2)

(1) Laboratoire d'Energétique, de Mécanique et d'Electromagnétisme, Université Paris Ouest Nanterre La Défense, France, 50, rue de Sèvres, 92410 Ville d'Avray

(2) Institut Jean Le Rond d'Alembert, Université Paris6, France, 2, place de la gare de Ceinture, 78210 Saint Cyr l'Ecole

Résumé

Dans ce travail nous présentons une étude du cycle moteur Schmidt-Stirling avec le point de vue de l'ingénieur, en proposant des solutions analytiques pour la régénération imparfaite qui réduisent considérablement les temps de calcul. Les contraintes technologiques, paramètres de référence, sont la pression maximale, le volume maximum, les températures extrêmes et la conductance thermique totale, tandis que les variables d'optimisation sont le taux de compression volumétrique, le rapport des volumes morts, le déphasage, le rapport des conductances et le rendement de régénération.

Mots clés

Thermodynamique en dimensions physiques finies, cycle moteur Schmidt-Stirling, contraintes paramétriques de l'ingénieur, optimisation de puissance, solutions analytiques.

Nomenclature

variables

c_v chaleur spécifique à volume constant, $J.kg^{-1}.K^{-1}$

h enthalpie spécifique, $J.kg^{-1}$

K conductance, $W.K^{-1}$

m masse du gaz de travail pour un cycle idéal, kg

n vitesse de rotation, rps

p pression, Pa

Q chaleur, J

r constante du gaz, $J.kg^{-1}.K^{-1}$

T température, K

U énergie interne, J

V volume, m^3

W travail, J

symboles

α rapport des conductances

ε rapport des volumes

γ exposant adiabatique

η rendement

τ rapport des températures des sources

τ_i rapport des températures extrêmes du gaz

ω rapport des volumes balayés par les pistons

indices

C compression

E détente

h volume de gaz chaud

H paroi chaude

in entrée

l volume de gaz froid

L paroi froide

O balayé (volume)

S mort (volume supplémentaire)

rev réversible

R régénérateur

T totale

exposant

* adimensionné

1. Introduction

L'étude du cycle thermodynamique selon la méthode de la Thermodynamique en Dimensions physiques (temps, vitesse, surface...) Finies (TDF) prend en compte des irréversibilités dues au transfert de chaleur fini entre la source (puits, régénérateur) et le fluide de travail, aux frottements interne et externe et aux pertes thermiques. L'optimisation du fonctionnement du moteur est généralement développée en utilisant la masse du gaz de travail comme paramètre de référence. Dans la pratique, les ingénieurs sont amenés à prendre en compte des contraintes techniques et physiques

afin d'introduire des limites liées à la résistance mécanique et thermique du matériau, au volume maximum et à la surface totale des échangeurs. Par conséquent, il serait plus réaliste de remplacer, dans les modèles d'optimisation, la masse de gaz de travail par des paramètres comme la pression maximum (p_{max}), le volume maximum (V_{max}) et la conductance totale (K_T). L'utilisation de la vitesse de rotation comme variable est également d'un intérêt majeur puisque le transfert de masse et de chaleur ainsi que les frottements mécaniques du gaz en dépendent directement et seront naturellement exprimés en fonction de cette variable. Jusqu'à présent, ce point de vue "ingénieur" n'a pas été bien exploité et développé, comme le montre l'étude synthétique des modèles présentée par Durmayaz, et al [1]. Dans ce papier, nous présentons une approche plus appliquée en utilisant la TDF et les grandeurs de référence précitées, afin de développer des solutions analytiques qui amènent à de nouvelles conclusions et qui réduisent considérablement les temps des calculs du problème d'optimisation.

2. Cycle de Schmidt-Stirling avec régénération imparfaite

Les trois configurations classiques de moteur Stirling sont présentées dans la figure 1.

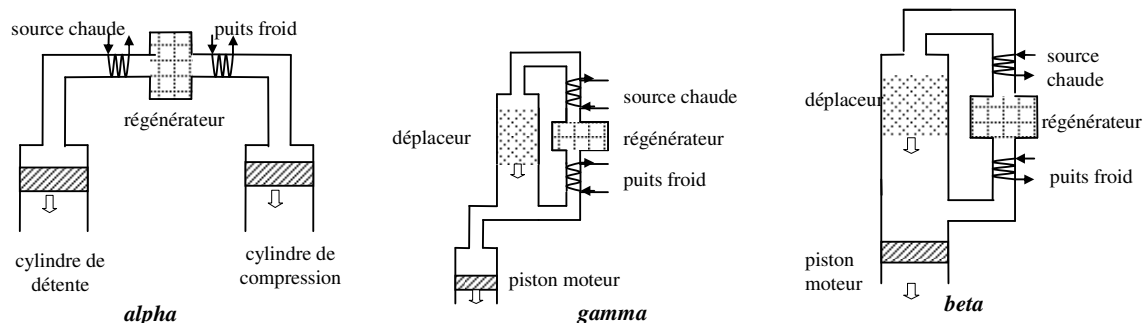


Figure 1 : Les 3 configurations classiques de moteur Stirling

Un modèle classique d'étude du moteur Stirling, plus réaliste que celui du cycle idéal, est le modèle de Schmidt, qui considère les hypothèses suivantes : pression instantanée uniforme dans le moteur ; gaz de travail = gaz parfait ; masse du fluide constante ; température de paroi constante ; mouvement harmonique/sinusoidal des pistons ; température du gaz homogène dans les volumes chaud et froid ; vitesse de rotation constante ; régénération parfaite.

Cette dernière hypothèse implique un stockage-déstockage de chaleur parfait dans le matériau du régénérateur, le gaz sortant du régénérateur à la température du volume adjacent. Dans notre cas de régénération imparfaite, la chaleur perdue par conduction ou d'autres transferts, doit être compensée par une chaleur supplémentaire fournie par la source chaude à chaque cycle, ΔQ_{reg} .

2.1 Expressions des volumes instantanés

Pour les trois types de moteur Stirling, le volume de détente s'écrit sous la forme suivante :

$$V_E = \frac{V_{E0}}{2} \cdot [1 - \cos(\varphi)] \quad (1)$$

où φ est l'angle vilebrequin et V_{E0} est le volume balayé de détente ; dans le cas des types beta et gamma, il correspond au volume balayé par le piston déplaceur.

Le volume de compression est une combinaison de volumes variables et peut être exprimé pour les types beta et gamma, sous la forme :

$$V_C = a_j \cdot \frac{V_{E0}}{2} \cdot [1 + \cos(\varphi)] + \frac{V_{C0}}{2} \cdot [1 - \cos(\varphi - \varphi_0)] - b_j \cdot V_{ol} \quad (2)$$

Les valeurs des coefficients a_j et b_j dépendent du type de moteur et sont présentées dans le tableau 1 ; φ_0 représente le déphasage entre les deux pistons et V_{C0} est le volume balayé de compression. Dans le cas des moteurs beta et gamma, ce volume représente celui balayé par le piston moteur. V_{ol} est le

volume de chevauchement dans le cas du moteur beta, dû à l'intrusion du piston déplaceur dans le volume balayé par le piston moteur. L'expression (2) est obtenue sous l'hypothèse d'un seul point de contact entre les deux pistons ($V_C = 0$ et $\frac{\partial V_C}{\partial \varphi} = 0$ pour $\varphi = \varphi_{contact}$). Il est bien évident que dans la pratique, pour les moteurs cinématiques, il y a un jeu minimum entre le piston moteur et le déplaceur.

type de moteur	alpha	beta	gamma
a_j	0	1	1
b_j	0	1	0

Table 1 Valeurs des coefficients a_j et b_j pour les trois types de moteur

Les volumes morts dus aux échangeurs de chaleur et à la géométrie des cylindres doivent être également pris en compte. Notons par V_{ES} , V_{CS} , V_R les trois volumes morts relativement à l'échangeur chaud et au volume de détente (V_{ES}), à l'échangeur froid et au volume de compression (V_{CS}) et au volume du régénérateur (V_R) ; la somme des trois volumes représente le volume mort total V_S .

Le volume total instantané V_t sera, alors :

$$V_t = V_E + V_C + V_S = \frac{V_{E0}}{2} \cdot \{[1 - \cos(\varphi)] + a_j \cdot [1 + \cos(\varphi)]\} + \frac{V_{C0}}{2} \cdot [1 - \cos(\varphi - \varphi_0)] - b_j \cdot V_{ol} + V_S \quad (3)$$

$$\text{et le volume total absolu sera : } V_T = V_{E0} + V_{C0} + V_S - b_j \cdot V_{ol} \quad (4)$$

Nous allons adimensionner les volumes par rapport à V_T . Ainsi, V_t adimensionné sera :

$$V_t^* = V_E^* + V_C^* + V_S^* = \frac{\varepsilon_E}{2} \cdot \{[1 - \cos(\varphi)] + a_j \cdot [1 + \cos(\varphi)]\} + \frac{\varepsilon_C}{2} \cdot [1 - \cos(\varphi - \varphi_0)] - b_j \cdot \varepsilon_{ol} + \varepsilon_S \quad (5)$$

avec ε_E , ε_C , ε_S et ε_{ol} les volumes respectifs de détente, de compression, mort et de chevauchement adimensionnés. On note ici que $V_T^* = 1$.

En utilisant des formules trigonométriques classiques, données dans l'annexe (A1), on obtient :

$$V_t^* = B_V - A_V \cdot \cos(\varphi - \varphi_V) \quad (6)$$

2.2 Expression de la pression instantanée

La masse de gaz de travail supposée constante dans le moteur, peut s'exprimer par :

$$m_T = \frac{p \cdot V_E}{r \cdot T_h} + \frac{p \cdot V_{ES}}{r \cdot T_h} + \frac{p \cdot V_C}{r \cdot T_l} + \frac{p \cdot V_{CS}}{r \cdot T_l} + \frac{p \cdot V_R}{r \cdot T_R} \quad (7)$$

la température moyenne au régénérateur peut être égale à $T_R = \frac{T_h + T_l}{2} = T_h \cdot \frac{1 + \tau_i}{2}$, avec $\tau_i = \frac{T_l}{T_h}$, ou

bien, en supposant un profil linéaire de la température comme URIELI et BERCHOWITZ (1984) [2]

$$T_R = \frac{T_h - T_l}{\ln\left(\frac{T_h}{T_l}\right)} = T_h \cdot \frac{(1 - \tau_i)}{\ln\left(\frac{1}{\tau_i}\right)}. \text{ En utilisant éq.(7), on obtient :}$$

$$p = \frac{m_T \cdot r}{\frac{V_E + V_{ES}}{T_h} + \frac{V_C + V_{CS}}{T_l} + \frac{V_R}{T_R}} = \frac{m_T \cdot r \cdot T_h}{(V_E + V_{ES}) + \frac{T_h}{T_l} \cdot (V_C + V_{CS}) + \frac{T_h}{T_R} \cdot V_R} = \frac{N}{D} \quad (8)$$

Après quelques calculs, le nouveau dénominateur D , ayant la dimension d'un volume, peut être écrit sous la forme : $V_T \cdot [B_p - A_p \cdot \cos(\varphi - \varphi_p)]$, avec A_p et B_p obtenus par identification des paramètres et

donnés dans l'annexe (A2). En adimensionnant p par rapport à $p_{\max} = \frac{m_T \cdot r \cdot T_h}{V_T \cdot [B_p - A_p]}$ obtenue pour

$$\varphi = \varphi_p, \text{ on obtient : } p^* = \frac{1 - \delta_p}{1 - \delta_p \cdot \cos(\varphi - \varphi_p)}, \text{ avec } \delta_p = \frac{A_p}{B_p}.$$

Le rapport des pressions sera alors $\varpi = \frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{B_p + A_p}{B_p - A_p} = \frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p}$ (9)

2.3 Expressions du travail et de la chaleur isotherme échangée à la source chaude

La quantité de chaleur isotherme Q_{inrev} échangée par le gaz à la température T_h , durant un cycle complet, est égale à l'opposé du travail fourni par le gaz dans le volume de détente V_E :

$$Q_{inrev} = -W_E = \oint p \cdot dV_E = p_{\max} \cdot V_T \cdot \oint p^* \cdot dV_E^* = p_{\max} \cdot V_T \cdot (1 - \delta_p) \cdot \frac{\varepsilon_E}{2} \cdot \oint \frac{\sin(\varphi) \cdot d\varphi}{1 - \delta_p \cdot \cos(\varphi - \varphi_p)} \quad (10)$$

sachant que le travail produit par le moteur est, en valeur absolue : $|W| = (1 - \tau_i) \cdot Q_{inrev}$. En suivant les méthodes de la bibliographie [3], [4] et [5] et en appliquant les propriétés des intégrales

trigonométriques [6], on obtient $Q_{inrev} = p_{\max} \cdot V_T \cdot \pi \cdot \varepsilon_E \frac{(1 - \delta_p)}{\delta_p} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \delta_p^2}} - 1 \right] \cdot \sin(\varphi_p)$ (11)

ainsi $|W| = p_{\max} \cdot V_T \cdot (1 - \tau_i) \cdot \pi \cdot \varepsilon_E \frac{(1 - \delta_p)}{\delta_p} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \delta_p^2}} - 1 \right] \cdot \sin(\varphi_p)$ (12)

ces expressions seront adimensionnées par rapport à $p_{\max} \cdot V_T$.

2.4 Expression analytique de la chaleur échangée au régénérateur parfait

Dans le cas d'une régénération parfaite, le bilan énergétique élémentaire dans le volume constant du régénérateur peut être écrit sous la forme suivante :

$$dQ_{reg} = dU_R - \sum_j h_j \cdot dm_j = \frac{V_R \cdot dp}{\gamma - 1} + \frac{\gamma \cdot r}{\gamma - 1} \cdot (T_h \cdot dm_E + T_l \cdot dm_C), \text{ où } dm_E \text{ et } dm_C \text{ sont considérées positives}$$

pour un flux sortant du régénérateur. Sous l'hypothèse de volumes isothermes, on obtient :

$$dm_E = \frac{d(p \cdot V_E^+)}{r \cdot T_h} \text{ et } dm_C = \frac{d(p \cdot V_C^+)}{r \cdot T_l} \text{ avec } V_E^+ = V_E + V_{ES} \text{ et } V_C^+ = V_C + V_{CS}$$

d'où la forme adimensionnée : $dQ_{reg}^* = \frac{\gamma \cdot (1 - \delta_p)}{(\gamma - 1)} \cdot B_{VR} \cdot d \left[\frac{1 - \delta_{VR} \cdot \cos(\varphi - \varphi_V)}{1 - \delta_p \cdot \cos(\varphi - \varphi_p)} \right]$ (13)

avec $B_{VR} = B_V - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \varepsilon_R$ et $\delta_{VR} = \frac{A_V}{B_{VR}}$.

En utilisant l'équation (13) et après quelques calculs, simplifications et factorisations, on obtient :

$$Q_{reg}^{+*} = \frac{2 \cdot \gamma}{(\gamma - 1)} \cdot \frac{B_{VR}}{(1 + \delta_p)} \cdot \sqrt{[\delta_p \cdot \delta_{VR} \cdot \cos(\varphi_V - \varphi_p) - 1]^2 - (\delta_p^2 - 1) \cdot (\delta_{VR}^2 - 1)} \quad (14)$$

2.5 Expressions de la vitesse, de la puissance et du rendement

La vitesse est adimensionnée par rapport à la vitesse de référence $n_{ref} = \frac{K_T \cdot T_H}{p_{\max} \cdot V_T}$

$$n^* = \frac{1}{Q_{inrev}^*} \cdot \frac{\alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot (\tau_i - \tau)}{\left\{ \tau_i + [\alpha + \tau_i \cdot (1 - \alpha)] \cdot (1 - \eta_{reg}) \cdot \frac{Q_{reg}^{+*}}{Q_{inrev}^*} \right\}} \quad (15)$$

où $\alpha = \frac{K_H}{K_T}$. La puissance adimensionnée est représentée par l'expression suivante :

$$P^* = \frac{\alpha \cdot (1-\alpha) \cdot (\tau_i - \tau) \cdot (1-\tau_i)}{\left\{ \tau_i + [\alpha + \tau_i \cdot (1-\alpha)] \cdot (1-\eta_{reg}) \cdot \frac{Q_{reg}^{+*}}{Q_{inrev}^*} \right\}} \quad (16)$$

et le rendement par
$$\eta = \frac{|W|}{Q_{in}} = \frac{|W^*|}{Q_{inrev}^* + Q_{reg}^{+*}} = \frac{(1-\tau_i)}{1 + (1-\eta_{reg}) \cdot \frac{Q_{reg}^{+*}}{Q_{inrev}^*}} \quad (17)$$

3. Utilisation des solutions analytiques pour l'optimisation du cycle

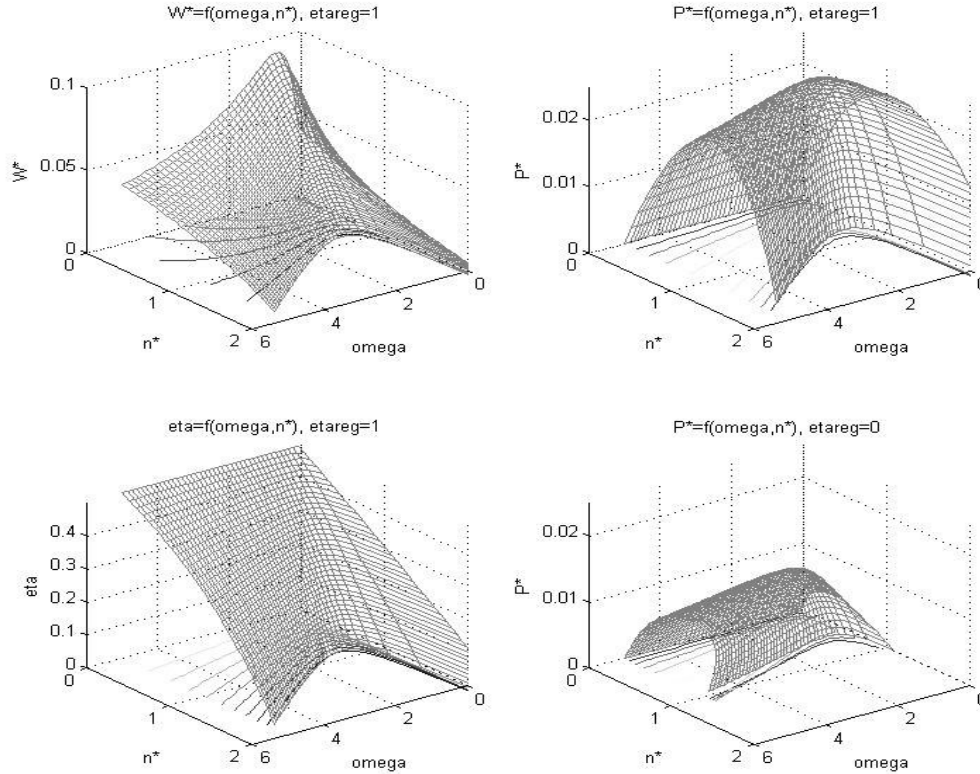


Figure 3 : Evolution du travail adimensionné, de la puissance adimensionnée et du rendement en fonction du rapport des volumes balayés (ω) et de la vitesse adimensionnée pour une régénération parfaite et, en bas à droite, évolution de la puissance adimensionnée sans régénération

Comme exemple d'application, on utilise les équations précédentes pour décrire l'influence du rapport ω des volumes balayés par les pistons et de la vitesse réduite n^* sur les paramètres de fonctionnement principaux W^* , P^* et η (fig.3). Pour les trois types de moteur, le calcul et l'affichage simultané de ces lignes et surfaces, sont obtenus en quelques secondes avec le logiciel Matlab. Les résultats présentés sur la figure 3 concernent le type de moteur alpha, avec un déphasage de $\pi/2$ entre les pistons, un exposant adiabatique du gaz de travail $\gamma = 1.4$, des rapports des volumes morts $\varepsilon_{ES}, \varepsilon_{CS}, \varepsilon_R$ respectivement de 0.06, 0.06, 0.08, un rapport des conductances α égal à 0.5, un rapport des températures des sources τ égal à 0.5 et un rendement de régénération précisé sur chaque graphique.

Avec une régénération parfaite, le travail et le rendement sont maximum à vitesse nulle. Le maximum maximum du travail est obtenu pour une valeur du rapport des volumes ω légèrement inférieure à 1, comme prévu antérieurement par WALKER (1973) [5] ; le rendement est égal à 0,5

pour $n^* = 0$, indépendamment du rapport des volumes. La représentation de la puissance montre une crête de taille quasi-constante, montrant que le maximum de puissance peut être obtenu pour toute valeur de ω mais la vitesse est minimale pour une valeur de ω légèrement inférieure à 1. Une puissance élevée peut être ainsi obtenue dans un intervalle étendu de vitesses pour des faibles à très faibles valeurs du rapport des volumes, en pénalisant les vitesses optimales qui seront élevées.

Sans régénération, la puissance est plus que divisée par deux par rapport à la valeur obtenue pour une régénération parfaite et elle augmente avec le rapport des volumes. Aux faibles rapports de volumes, la crête existant pour le cas précédent disparaît, réduisant la zone d'optimisation.

Ces exemples montrent surtout qu'une première optimisation approximative est possible sans grands efforts, grâce aux solutions analytiques proposées.

4. Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une étude de cycle Stirling selon la méthode de Schmidt avec régénération imparfaite et sous les hypothèses de la thermodynamique en dimensions physiques finies. Des expressions analytiques sont proposés pour les énergies échangées au régénérateur, ce qui complète notre modèle analytique, en addition à d'autres expressions analytiques présentées précédemment [2-5, 7-10] pour les volumes de compression et de détente, la pression, le travail et les quantité de chaleur isothermes. Ainsi, nous exprimons chaque énergie transférée par cycle et le rendement en fonction de la géométrie et de paramètres physiques (dont le rendement du régénérateur, la conductance totale) sans calcul numérique pas à pas le long du cycle. Un exemple d'optimisation du cycle a été donné, qui illustre bien la polyvalence de ces équations.

Références

- [1] A. DURMAYAZ and al. : "Optimization of thermal systems based on finite-time thermodynamics and thermoeconomics", *Progress in Energy and Combustion Science*, vol.30, (2004), p.175-217..
- [2] I. URIELI and D. M. BERCHOWITZ : "Stirling cycle engine analysis", Adam Hilger ed., Bristol (UK), (1984).
- [3] R. J. MEIJER : "The Philips Stirling thermal engine", PhD thesis, *Delft Technical University*, (nov. 1960).
- [4] T. FINKELSTEIN : "Generalized thermodynamic analysis of Stirling engines" (paper 118B) and "Optimization of phase angle and volume ratios in Stirling engines" (paper 118C), *SAE annual winter meeting*, Detroit (USA), (1961).
- [5] G. WALKER : "Stirling-cycle machines", *Oxford University Press ed.* (UK), ISBN 0 19 856112, (1973).
- [6] H. B. DWIGHT : "Tables of integrals and other mathematical data", 4th edition, *The MacMillan Company ed.*, New York (USA), (1971).
- [7] L. GROSU, P. ROCHELLE, N. MARTAJ : "Thermodynamique à échelle finie : optimisation du cycle moteur de Stirling pour l'ingénieur", *COFRET'08*, Nantes (France), (juin 2008).
- [8] P. ROCHELLE, J. ANDRZJEVSKI : "Optimisation des cycles à rendement maximal", *Revue de l'Institut Français du Pétrole*, vol.29, (1974), p.731-749.
- [9] P. ROCHELLE : "Optimisation and applicability of ideal maximum-efficiency prime mover cycles", *Revue Entropie*, n°2342, (2001), p.30-37.
- [10] M FEIDT and al. : "Optimal allocation of HEX inventory associated with fixed power output or fixed heat transfer rate input", *Int. J. Applied Thermodynamics*, vol.5, n°1, p25-36, (mars 2002).

Annexe

$$\left\{ \begin{array}{l} B_V = \frac{\varepsilon_E}{2} \cdot \left[1 + a_j + \omega + 2 \cdot \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} - 2 \cdot b_j \cdot \frac{\varepsilon_{ol}}{\varepsilon_E} \right], \quad A_V = \frac{\varepsilon_E}{2} \cdot \sqrt{[1 - a_j + \omega \cdot \cos(\varphi_0)]^2 + [\omega \cdot \sin(\varphi_0)]^2} \\ \sin(\varphi_V) = \frac{\varepsilon_E}{2 \cdot A_V} \cdot \omega \cdot \sin(\varphi_0) \quad \text{and} \quad \cos(\varphi_V) = \frac{\varepsilon_E}{2 \cdot A_V} \cdot [1 - a_j + \omega \cdot \cos(\varphi_0)] \end{array} \right. \quad (A1)$$

où ω est le rapport des volumes balayés $\omega = \frac{V_{C0}}{V_{E0}} = \frac{\omega_C}{\omega_E}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} B_p = \frac{\varepsilon_E}{2} \cdot \left[\left(1 + \frac{a_j}{\tau_i}\right) + \frac{\omega}{\tau_i} + \frac{2 \cdot \varepsilon_{ES}}{\varepsilon_E} + \frac{(\varepsilon_{CS} - b_j \cdot \varepsilon_{ol})}{\varepsilon_E} \cdot \frac{2}{\tau_i} + \frac{2 \cdot \varepsilon_R \cdot T_h}{\varepsilon_E \cdot T_R} \right], \quad A_p = \frac{\varepsilon_E}{2} \cdot \sqrt{\left[1 - \frac{a_j}{\tau_i} + \frac{\omega}{\tau_i} \cdot \cos(\varphi_0)\right]^2 + \left[\frac{\omega}{\tau_i} \cdot \sin(\varphi_0)\right]^2} \\ \sin(\varphi_p) = \frac{\varepsilon_E}{2 \cdot A_p \cdot \tau_i} \cdot \omega \cdot \sin(\varphi_0) \quad , \quad \cos(\varphi_p) = \frac{\varepsilon_E}{2 \cdot A_p} \cdot \left[\left(1 - \frac{a_j}{\tau_i}\right) + \frac{\omega}{\tau_i} \cdot \cos(\varphi_0) \right] \end{array} \right. \quad (A2)$$