

# Résolution des équations de Navier Stokes par une méthode de réanalyse

Jean Félix DURASTANTI, Youssef SFAXI, Raouf KHELALFA

Université de PARIS XII, IUT de Sénart, Département Génie Industriel et Maintenance  
Avenue Pierre Point - 77567 Lieusaint cedex

## Résumé

Cet article présente une méthode numérique originale de réanalyse des équations de Navier Stokes en régime stationnaire. A partir d'un découplage des équations phénoménologiques et des équations aux limites, on aboutit, en introduisant des variables d'interfaces, à la résolution d'un système de taille réduite qui permet la prise en compte facile de modifications des conditions aux limites. Cette approche conduit à un nombre d'opérations réduit par rapport à la méthode des éléments finis classique. On présente les solutions pour un écoulement de convection naturelle au sein d'une cavité carrée.

## Nomenclature

$p$	Pression ( $Pa$ )	$\{ F_d \}$	Flux donnés à la frontière $\dim(n)$
$T$	Température ( $K$ )	$\{ F_r \}$	Vecteur des flux inconnus
$k$	Conductivité thermique ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ )	$\{ F_G \}$	Vecteur cumul de $\{ F_d \}$ et $\{ F_r \}$ $\dim(n)$
$c_p$	Chaleur spécifique ( $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ )	$\{ H_G \}$	Vecteur des non linéarités $\dim(n)$
$L$	Dimension de la cavité ( $m$ )	$n$	Nombre total d'inconnues
$T_0$	Température de référence ( $K$ )	Re	Nombre de Reynolds
$\underline{\underline{D}}$	Tenseur taux des déformations	Ra	Nombre de Rayleigh
$\vec{V}$	Vecteur vitesse	Pe	Nombre de Péclet
$\vec{f}$	Vecteur force de volume	Gr	Nombre de Grashof
$x, y$	Coordonnées cartésiennes	Pr	Nombre de Prandtl
$[K_V]$	Matrice volumique $\dim(n, n)$	Symboles grecs	
$[K_V^l]$	Partie linéaire de $[K_V]$ $\dim(n, n)$	$\rho$	Masse volumique ( $Kg \cdot m^{-3}$ )
$[K_V^{nl}]$	Partie non linéaire de $[K_V]$ $\dim(n, n)$	$\mu$	Viscosité dynamique ( $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ )
$[K_S]$	Matrice surfacique $\dim(n, n)$	$\beta$	Coefficient de dilatation isobare ( $K^{-1}$ )
$[K]$	Matrice globale $\dim(n, n)$	$\vec{\nabla} \cdot X$	Divergence de $X$
$\{ Y_n \}$	Solution de Navier Stokes $\dim(n)$	$\vec{\nabla} X$	Gradient de $X$
$[K_\alpha]$	Matrice régularisée $\dim(n, n)$	$\{ \delta \}$	Vecteur des conditions aux limites
$\{ F \}$	Vecteur global des forces $\dim(n)$	$\{ \phi \}$	Paramètre de réanalyse résultant de $\{ F_r \}$
$\{ R \}$	Vecteur propre de $[K_V^l]$	$\{ \omega \}$	Paramètre de réanalyse associé à $[K_V^l]$

## 1- Introduction

Après avoir validé la méthode de réanalyse aux transferts de chaleur [1]-[2], nous présentons ici son application aux équations de Navier Stokes, dont la particularité est d'introduire une non-linéarité pour l'obtention du champ des vitesses inconnu. On rappelle qu'elle consiste à formuler une solution générale à un problème puis de particulariser cette solution en prenant en compte les conditions aux limites [3].

## 2- Réanalyse des équations de Navier Stokes

Dans un milieu continu incompressible de domaine volumique (V) et de frontière (S), l'évolution dynamique et thermique est régie par les équations classiques de Navier Stokes :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= 0 \\ \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} &= -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \vec{V}) + \rho \vec{f} \\ \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) &= \beta T \frac{Dp}{Dt} + 2\mu (\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}})\end{aligned}\tag{1}$$

$$\text{avec } \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

Le traitement du problème stationnaire (1), par la méthode des résidus pondérés conduit classiquement à la résolution d'un système de taille importante de la forme :

$$[K]\{Y_n\} - \{F\} = 0\tag{2}$$

$$\text{avec : } [K] = \sum_e [K^e] \quad \{F\} = \sum_e \{F^e\}$$

$\{Y_n\}$  est le vecteur des valeurs discrètes de  $\vec{Y}$  aux différents nœuds de l'élément obtenu après discrétisation du problème consistant à diviser le milieu continu (V) en un certain nombre d'éléments finis élémentaires ( $V_e$ ) de frontière ( $S_e$ ) et à évaluer chaque grandeur physique de  $\vec{Y}$  et ses variations sur la base d'une approximation nodale linéaire.

La matrice  $[K^e]$  représente la matrice élémentaire équivalente à la matrice des conductances en thermique. Le vecteur  $\{F^e\}$  correspond aux sollicitations sur un élément volumique ( $V_e$ ).

La matrice  $[K]$  est décomposée dans un premier temps sous la forme :

$$[K] = [K_v] + [K_s]\tag{3}$$

où  $[K_v]$  est liée à l'élément de volume et traduit la phénoménologie du problème. La matrice  $[K_s]$  correspond quant à elle à l'incidence des conditions aux limites sur la frontière (S) du volume (V).

Le système (2) devient :

$$[K_V]\{Y_n\} = \{F_G\} \quad \text{avec : } \{F_G\} = \{F\} - [K_S]\{Y_n\}$$

On découple les termes non linéaires de la matrice [K] en posant :

$$[K_V] = [K_V^l] + [K_V^{nl}] \quad (4)$$

Soit :

$$[K_V^l]\{Y_n\} = \{F_G\} - \{H_G\} \quad (5)$$

$$\text{avec : } \{H_G\} = [K_V^{nl}]\{Y_n\}$$

Le système obtenu ci-dessus est singulier puisque la matrice  $[K_V^l]$  est singulière. Soit  $r$  l'ordre de la singularité et donc  $n - r$  le rang du système. Pour que le problème soit bien posé,  $p$  conditions aux limites sont imposées avec  $p \geq n$  sous la forme linéaire :

$$[CL]\{Y_n\} = \{\delta\} \quad (6)$$

avec  $[CL]$  la matrice des conditions aux limites de taille  $p \times n$  et  $\{\delta\}$  le vecteur dont les  $p$  composantes peuvent être du point de vue physique des vitesses, des températures, des pressions voire des flux imposés au milieu continu ( $V$ ) à travers sa frontière ( $S$ ).

Le vecteur  $\{F_G\}$  des sollicitations globales comporte des termes connus  $\{F_d\}$  et des termes inconnus  $\{F_r\}$  au nombre maximal de  $p$ .

$$\{F_G\} = \{F_d\} + \{F_r\} \quad (7)$$

$$\{F_r\} = [L] \cdot \{\phi\} \quad (8)$$

La matrice  $[L]$  est obtenue en condensant  $\{F_r\}$  en un vecteur  $\{\phi\}$  qui permet de réduire la taille de  $n$  à  $p$  sans changer la nature physique des composantes par suppression des composantes nulles de  $\{F_r\}$ .

La matrice  $[K_V]$  est régularisée par une méthode [4] faisant intervenir  $[K_\alpha]$  qui est symétrique et définie positive en posant :

$$[K_\alpha] = [K_V^l] + \alpha \{R\} \cdot \{R\}^t \quad (9)$$

où  $\alpha$  est un réel non nul strictement positif et  $\{R\}$  la matrice des vecteurs propres associés à la valeur propre nulle.

Le traitement des  $p$  conditions aux limites permet de former le système de réanalyse non linéaire de dimension réduite  $p + r \ll n$

$$\begin{bmatrix} [CL][K_\alpha]^{-1}[L] & [CL]\{R\} \\ \{R\}'[L] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ \{\omega\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Z_1\} \\ \{Z_2\} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

avec :

$$\begin{aligned} \{Z_1\} &= \{\delta\} - [CL][K_\alpha]^{-1}\{F_d\} + [CL][K_\alpha]^{-1}\{H_G\} \\ \{Z_2\} &= -\{R\}'(\{F_d\} + \{H_G\}) \end{aligned}$$

et d'obtenir la solution :

$$\{Y_n\} = [K_\alpha]^{-1}(\{F_d\} + [L]\{\phi\}) + \{R\}\{\omega\} - [K_\alpha]^{-1}\{H_G\} \quad (11)$$

avec :  $\{\omega\} = \{R\}' \cdot \{Y_n\}$

$\{R\}$  et  $[K_\alpha]^{-1}$  sont indépendantes des conditions aux limites et calculées une seule fois.  $[K_\alpha]^{-1}$  est obtenue par la méthode de décomposition issue de la modification des méthodes de Gauss ou de Cholesky [3] afin de conserver l'avantage du stockage profil malgré la structure pleine. Lors d'une modification d'une ou plusieurs conditions aux limites, seule la matrice  $[CL]$  est modifiée.

### 3 Application à un problème de mécanique des fluides

#### 3-1 Ecriture des équations

Afin de valider la théorie exposée précédemment, on traite, par la réanalyse le cas connu en mécanique des fluides de l'écoulement de convection naturelle dans une cavité carrée en régime stationnaire engendré par un faible écart de températures, ce qui justifie l'hypothèse de Boussinesq. Considérons une cavité carrée de côté  $L$ , remplie d'un fluide newtonien où un gradient de température  $T_H - T_C > 0$  est imposé entre les deux parois verticales. Les parois haute et basse sont adiabatiques ( $q = 0$ ) (Fig.1).

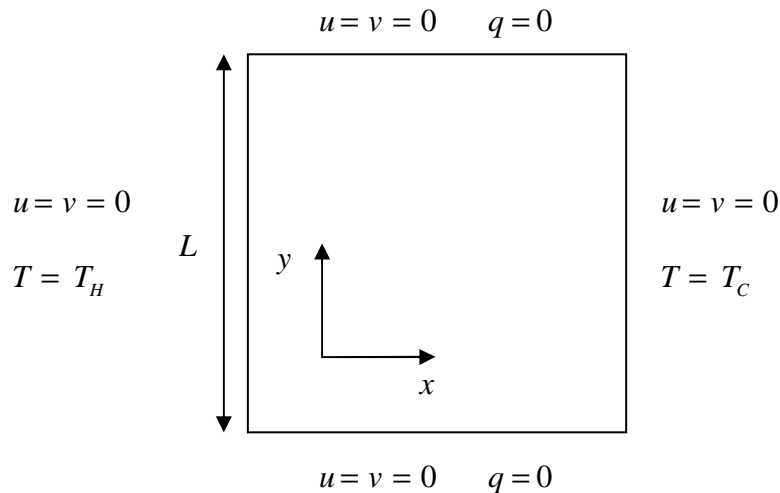


Fig.1: Convection naturelle dans une cavité

En négligeant partout les variations de la masse volumique sauf dans le terme de gravité, on obtient en variable sans dimension (12) :

$$\frac{x}{L} = \bar{x} \quad \frac{y}{L} = \bar{y} \quad \frac{u}{U_0} = \bar{u} \quad \frac{v}{U_0} = \bar{v} \quad \frac{p}{p_0} = \bar{p} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \bar{\rho} \quad (12)$$

$$\frac{T - T_C}{T_H - T_C} = \bar{T} \quad \frac{\mu}{\mu_0} = 1 \quad \frac{c_p}{c_{p_0}} = 1 \quad \frac{k}{k_0} = 1$$

les équations de Boussinesq (13) modélisant l'écoulement :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\text{Re} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

$$\text{Re} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{Gr}{\text{Re}} (\bar{T} - \bar{T}_0)$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{Pe} \left[ \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right] = 0 \quad (13)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\bar{u}(\bar{x}; 1) = \bar{v}(\bar{x}; 1) = 0 \quad \bar{u}(1; \bar{y}) = \bar{v}(1; \bar{y}) = 0 \quad \bar{T}(0; \bar{y}) = 1 \quad \bar{T}(1; \bar{y}) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{T}(\bar{x}; 1)}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \bar{T}(\bar{x}; 0)}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (14)$$

On a pris comme échelle respective pour la vitesse et la pression :

$$U_0 = \frac{\alpha}{L} \sqrt{Ra \text{ Pr}} \quad p_0 = \mu \frac{U_0}{L}$$

$$\text{telles que : } \text{Pr} = \frac{Pe}{\text{Re}} \quad Ra = Gr \text{ Pr} = \frac{g \beta (T_H - T_C) L^3}{\nu^2} \text{ Pr}$$

### 3-2 Résultats

On a résolu le problème de la cavité (13)-(14) à partir de la méthode des éléments finis en résolvant le système de réanalyse (10) avec des éléments rectangulaires à 8 nœuds pour des Rayleigh compris entre  $10^3$  et  $10^5$ , pour un nombre de Prandtl  $\text{Pr} = 0.72$ . On compare nos résultats à ceux proposés par différents auteurs [5]-[7] dans le tableau suivant où sont reportées les valeurs de  $\bar{u}_{\max}$  (maximum de la vitesse horizontale sans dimension sur la section verticale située au milieu de la cavité) à la hauteur adimensionnelle où cette vitesse est obtenue ainsi que les valeurs de  $\bar{v}_{\max}$

Nombre de Rayleigh	Auteur	$\bar{u}_{\max} (1/2 ; \bar{y})$	$\bar{v}_{\max} (\bar{x} ; 1/2)$
$10^3$	Gresho	3.656 à $\bar{y} = 0.812$	3.704 à $\bar{x} = 0.166$
	Winters	3.64 à $\bar{y} = 0.81$	3.69 à $\bar{x} = 0.1$
	Vahl Davis	3.649 à $\bar{y} = 0.813$	3.697 à $\bar{x} = 0.178$
	<b>Réanalyse</b>	3.93 à $\bar{y} = 0.8$	3.696 à $\bar{x} = 0.1$
$10^4$	Gresho	16.193 à $\bar{y} = 0.822$	19.675 à $\bar{x} = 0.1187$
	Winters	16.2 à $\bar{y} = 0.82$	19.7 à $\bar{x} = 0.12$
	Vahl Davis	16.718 à $\bar{y} = 0.823$	19.167 à $\bar{x} = 0.119$
	<b>Réanalyse</b>	16.95 à $\bar{y} = 0.8$	20.49 à $\bar{x} = 0.1$
$10^5$	Gresho	34.62 à $\bar{y} = 0.856$	68.896 à $\bar{x} = 0.0663$
	Winters	34.8 à $\bar{y} = 0.86$	68.6 à $\bar{x} = 0.066$
	Vahl Davis	34.73 à $\bar{y} = 0.855$	68.59 à $\bar{x} = 0.066$
	<b>Réanalyse</b>	39.09 à $\bar{y} = 0.8$	65.13 à $\bar{x} = 0.1$

Les résultats obtenus permettent de valider la méthode. Les différences observées sont dues en grande partie à l'option qui a été prise de conserver le même nombre de mailles compte tenu des faibles nombres de Rayleigh envisagés ici.

## 4 Conclusion

On a montré dans cet article qu'une méthode de réanalyse basée sur le découplage des termes phénoménologique et des conditions aux limites ainsi qu'une prise en compte des non linéarités était adaptable aux équations de Navier Stokes en régime stationnaire et conduisait à la résolution d'un système de taille réduite facilitant la prise en compte d'une modification à la frontière du volume étudié. Les résultats obtenus par cette méthode pour le cas particulier d'un écoulement en convection naturelle dans une cavité carrée où un faible gradient de température est imposé entre deux parois verticales, sont satisfaisants.

## Références

- [1] B. PEUREUX, La réanalyse en thermique, Thèse de doctorat de l'université de Bourgogne (1995).
- [2] B. PEUREUX, J. F. DURASTANTI, B. MARTIN, A. LOREDO, La réanalyse de l'équilibre thermique, Revue Générale de Thermique (1995), 679-689.
- [3] P. M. RABEARIVELO, Contribution à la résolution des équations de Navier Stokes par une méthode de réanalyse, Thèse de doctorat de l'université de Paris XII (2005).
- [4] A. LOREDO, Calcul numérique de la quasi-inverse d'une matrice réelle symétrique semi-définie positive, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, série I (1995), 247-252.
- [5] G. VAHL DAVIS, Natural convection in square cavity. A benchmark solution, International journal for numerical methods in fluids, 3 (1983), 249-264.
- [6] P. M. GRESHO, C. D. UPSON, R. L. LEE, Finite element simulations of thermally induced convection in enclosed cavity, Lawrence Livermore Laboratory Report UCID-18602 (1980).
- [7] K. H. WINTERS, A numerical study of natural convection in a square cavity, United Kingdom Atomic Energy Authority, AERE-R9747 (1980).