

Les routes vers l'équilibre en convection naturelle - le travail des forces de pression.

Michel PONS*

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (CNRS-LIMSI)

BP 133, Rue J. von Neumann, 91403 Orsay Cedex

*(auteur correspondant : michel.pons@limsi.fr)

Résumé – Étrangement le modèle usuel de Boussinesq rencontre ses limites pour la convection naturelle en cavité fermée proche de l'équilibre. En effet, plus l'écart de température diminue, moins le travail des forces de pression peut être négligé. Arrive donc toujours un point où ce travail devient prépondérant. Ceci a pour effet que le Nusselt tend asymptotiquement vers une valeur qui dépend surtout de la largeur de la cavité, et un peu du rapport de forme, mais pas du Rayleigh. Des Nusselt limites supérieurs à 10 peuvent être obtenus lorsque la largeur de la cavité dépasse le mètre.

Le modèle est décrit, les champs calculés sont montrés, le Nusselt limite est corrélé à la largeur.

Nomenclature

A	rapport de forme	z	coordonnée verticale adimensionnée
c_p	chaleur spécifique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
g	accélération de la gravité, $m.s^{-2}$	α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
H	hauteur de la cavité, m	β	coefficient de dilatation du fluide, K^{-1}
L	largeur de la cavité, m	$\Delta\rho$	$\rho_c - \rho_h, K$
Nu	nombre de Nusselt	ΔT	$T_h - T_c, K$
P	pression, Pa	ϕ	$[\beta g H T_0 / (c_p \Delta T)]$
Pr	nombre de Prandtl	Φ	terme visqueux adimensionné, cf. (2)
q_v	chaleur générée par friction, $W.m^{-3}$	ν	viscosité, $m^2.s^{-1}$
Ra	nombre de Rayleigh	θ	température adimensionnée
t	temps, s	ρ	densité, $kg.m^{-3}$
T	température, K	τ	temps adimensionné
u	composante horizontale de vitesse adim.	<i>Indices</i>	
\mathbf{v}	vecteur vitesse, $m.s^{-1}$	0	état de référence (température moyenne)
V_z	composante verticale de la vitesse, $m.s^{-1}$	c	paroi froide
w	composante verticale de vitesse adim.	h	paroi chaude
x	coordonnée horizontale adimensionnée		

1. Introduction

D'innombrables auteurs ont démontré la validité du modèle de Boussinesq-Oberbeck pour simuler numériquement des écoulements de convection naturelle en particulier en cavités fermées, [1-4] entre autres. Cette validité tient tant que trois quantités restent petites devant l'unité : 1) $\Delta\rho/\rho_0$, qui pour un gaz parfait égale $\Delta T/T_0$; 2) $\beta g H/c_p$; et 3) $[(\beta g H T_0)/(c_p \Delta T)]$, notée ϕ par la suite. Ces trois conditions sont effectivement remplies dans la plupart des expériences. Les limites de validité de ces hypothèses ont été nettement moins étudiées. Les études [5, 6] ont montré que, pour l'air et l'eau, c'est la troisième de ces conditions qui est la moins robuste. Ces deux travaux, ainsi que [7], montrent aussi que 1) $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$ permet de poser $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$; 2) $\beta g H/c_p \ll 1$ permet de négliger la chaleur dissipée par friction visqueuse ; et 3) $\phi \ll 1$ permet de négliger les effets thermiques du travail des forces de pression.

La présente étude s'intéresse aux écoulements en cavité différentiellement chauffée près de l'équilibre (question sans intérêt en configuration Rayleigh-Bénard). Habituellement, la question est abordée avec le modèle Boussinesq *usuel* en affectant une faible valeur au Rayleigh, le Prandtl et le rapport de forme de la cavité étant eux fixés. Les simulations donnent alors des états proches de la conduction pure, avec un champ de température légèrement déformé par l'advection. Le Nusselt tend vers 1 et l'intensité de la convection est liée à l'écart de température ΔT entre les parois. Il faut noter que cette approche suppose implicitement que les trois conditions de validité mentionnées ci-dessus sont remplies, en particulier $\phi \ll 1$. Or, le Rayleigh est en $H^3 \Delta T$ et ϕ est en $H/\Delta T$. Il en résulte que poser ($Ra = 1000$ et $\phi = 10^{-2}$ avec l'air) revient à étudier une cavité de 5,7 cm de haut, et si l'on est plus strict avec $Ra = 100$, et $\phi = 10^{-3}$, alors la cavité ne mesure que 1,8 cm de haut. Au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'équilibre, la cavité étudiée rapetisse. L'angle d'approche adopté ici est plutôt celui d'un expérimentateur : on « construit » quelques cavités (H et L données pour chacune) que l'on remplit d'air ($Pr = 0,71$) et auxquelles on applique un ΔT qui va décroissant. La différence avec l'approche précédente est que la décroissance de ΔT à H fixé fait croître ϕ inéluctablement, au-delà de 1 et vers l'infini. Les effets thermiques du travail des forces de pression deviennent donc prépondérants dans le bilan de chaleur et ils ne peuvent plus être négligés. Il faut alors adopter le modèle que Spiegel et Veronis ont appelé « *Boussinesq thermodynamique* » [7].

2. Le modèle *Boussinesq thermodynamique* (BT)

Dans le modèle *BT*, les équations de continuité et de la quantité de mouvement sont exactement les mêmes que celles du modèle usuel. Seule l'équation de la température diffère : n'y sont négligés, ni les effets thermiques du travail des forces de pression, ni la chaleur engendrée par la friction visqueuse, ce qui (sous les hypothèses usuelles, telles que conductivité constante et uniforme ...) donne :

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha_0 \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c_p} + \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial(\rho^{-1})}{\partial T} \right)_P \frac{DP}{Dt} \quad (1)$$

La dérivée totale DP/Dt se décompose en $\partial P/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla P$. En stationnaire, $\partial P/\partial t = 0$. Comme le gradient de pression est très majoritairement dû au champ de pression hydrostatique, DP/Dt peut finalement être approchée par $-\rho_0 g V_z$. On utilise aussi l'équation d'état « à la Boussinesq » : $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$. Les références retenues pour l'adimensionnement des équations sont : la hauteur de la cavité H pour les distances, $(\alpha H^{-1} Ra^{1/2})$ pour les vitesses, leur rapport pour le temps, et $(T_h - T_c)$ pour les écarts à la température moyenne T_0 . Une fois adimensionnée, cette équation (1) devient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{Ra^{1/2}} \nabla^2 \theta - \phi w + \frac{\beta g H}{c_p} \left(\frac{\Phi}{Ra^{1/2}} - \theta_w \right) \quad (2)$$

La base numérique de notre modèle *BT* a été décrite par Gadoin *et al.* [8]. Le maillage est décalé et régulier ; les flux diffusifs et convectifs sont discrétisés par différences centrées ; le schéma en temps, d'ordre deux, est résolu par la méthode des pas fractionnés ; le couplage vitesse-pression est résolu en deux étapes, prédiction puis projection.

La configuration générale étudiée ici est la cavité différentiellement chauffée 2D remplie d'air à 300 K ($Pr = 0,71$), avec non-glissement sur les parois, températures imposées sur les parois verticales et parois horizontales adiabatiques. Un certain nombre de cavités ont été étudiées, principalement définies par 1) leur largeur : 10 cm, 20 cm, 48 cm, et 112 cm, plus quelques autres valeurs pour la cavité carrée ; 2) leur rapport de forme $A = H/L$: 1, 4 et 16. Les maillages correspondant à ces trois rapports de forme sont : 128×128 , 128×256 et 128×1024 . Pour chacun des cas le produit ϕRa est fixé ; est explorée la gamme de Rayleigh faisant varier ϕ depuis des valeurs allant de 10^{-2} - 10^{-1} jusqu'à des valeurs clairement supérieures à 1, 100 voire 1000. Des calculs *Boussinesq usuel* (*BU*) ont aussi été réalisés pour chacun des trois rapports de forme.

3. Résultats

3.1. Nusselt global et local

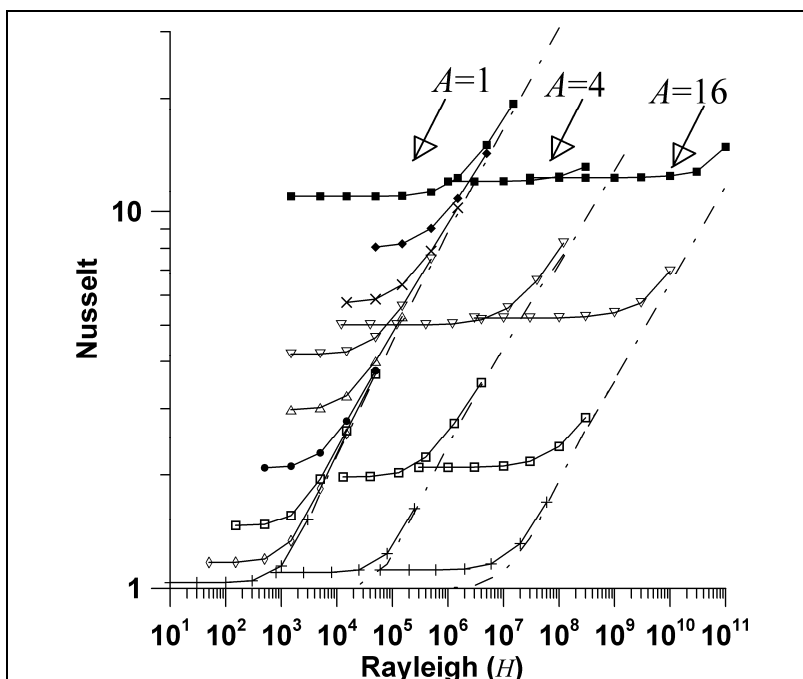


Figure 1 : Corrélation entre Nusselt et Rayleigh montrant l'effet thermique du travail des forces de pression (modèle Boussinesq thermodynamique) à l'approche de l'équilibre, pour différentes cavités de rapports de forme égal à 1, 4 ou 16, et de largeur égale à 10 cm (+), 15 cm (\diamond), 20 cm (\square), 27 cm (\bullet), 36 cm (Δ), 48 cm (∇), 63 cm (\times), 85 cm (\blacklozenge), et 112 cm (\blacksquare). Les lignes discontinues montrent les résultats obtenus avec le modèle Boussinesq usuel, qui néglige le travail des forces de pression.

La Figure 1 montre les valeurs du Nusselt calculées pour les différentes configurations ($Nu = 1$ correspond à la conduction pure). En abscisse est porté le Rayleigh construit sur la hauteur $Ra_H = \beta g H^3 \Delta T (\alpha \nu)^{-1}$ afin de clairement séparer les différentes valeurs du rapport de forme. Les calculs *BU* sont reportés en traits discontinus. La différence de comportement à l'approche de l'équilibre entre les résultats des deux modèles est flagrante. Les résultats *usuels* affichent des Nusselt qui tendent vers l'unité, signe que la configuration tend vers l'état purement conductif. Les résultats *thermodynamiques*, eux, affichent une limite asymptotique du Nusselt : cette limite est supérieure à 1, voire nettement supérieure ($Nu > 10$).

L'évolution du Nusselt local le long de la paroi chaude, Figure 2, montre bien sûr que les flux de chaleur sont plus forts dans les cavités les plus grandes. Elle montre surtout que la répartition du flux le long de la paroi dépend de la taille de la cavité. Pour les très petites cavités (modèle *BU*) le flux est plus important au bas de la paroi chaude, là où arrive le fluide froid en provenance de l'autre côté de la cavité, alors que dans les grandes cavités (modèle *BT*) le flux est beaucoup plus symétrique et présente une tendance à l'uniformisation le long

de la paroi, tendance très nette quand le rapport de forme augmente. Il est clair que c'est l'écoulement lui-même qui est affecté par l'effet thermique du travail des forces de pression.

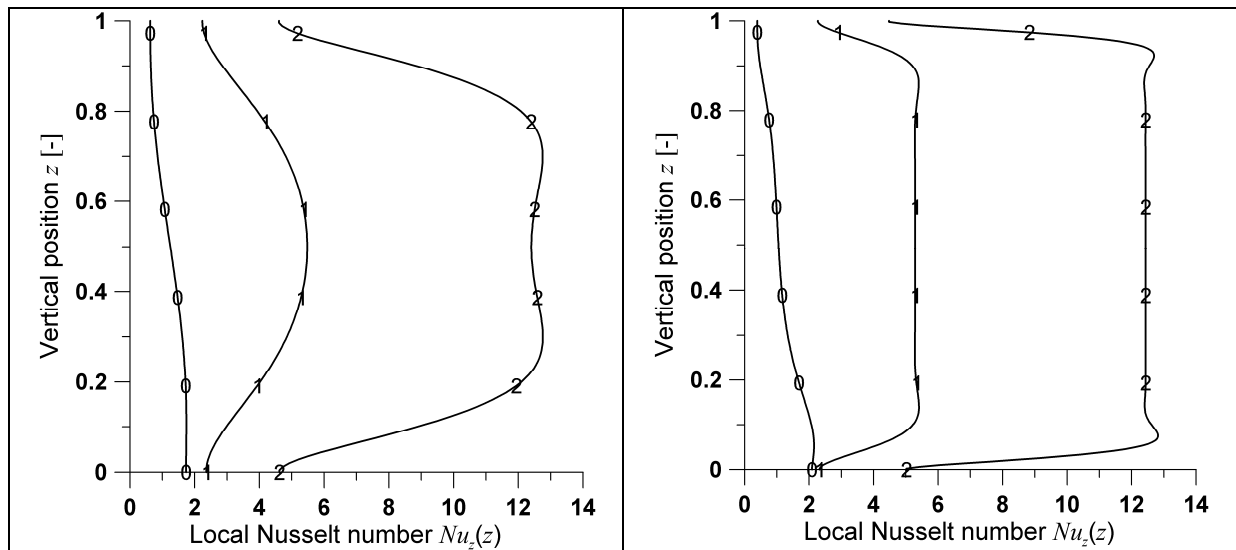


Figure 2 : Évolution du Nusselt local le long de la paroi chaude dans les cavités de rapport de forme égal à 1 (gauche, $Ra_H = 1500$) ou 4 (droite, $Ra_H = 8.10^4$). Comparaison des calculs Boussinesq Usuel (symbole 0) et Boussinesq Thermodynamique dans des cavités de largeur égale à 48 cm (symbole 1) ou 112 cm (symbole 2).

3.2. Écoulement et champ de température

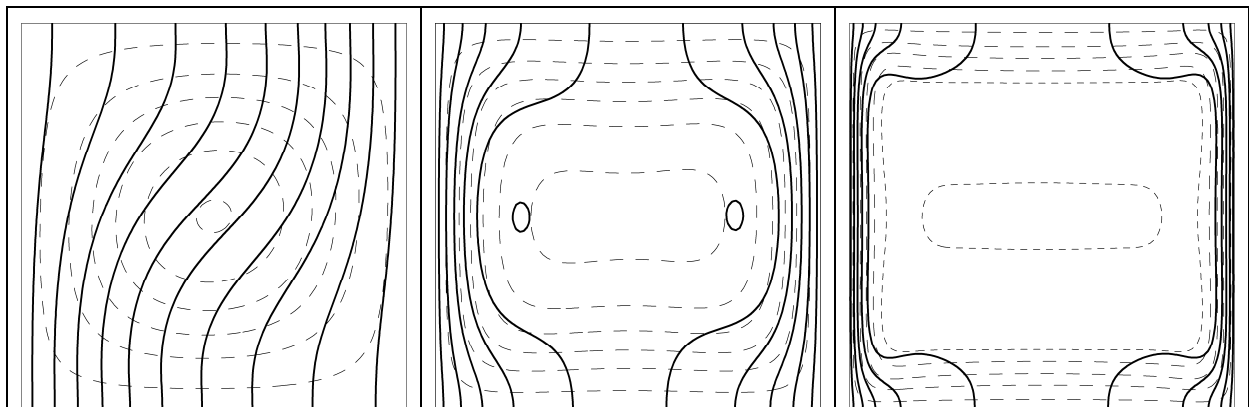


Figure 3 : Configurations (lignes de courant en discontinu, isothermes en continu gras) calculées pour les cavités carrées par les modèles BU (gauche) et BT ($L = 48$ cm au centre et $L = 112$ cm à droite).

La figure 3 montre comment l'effet thermique du travail des forces de pression affecte l'écoulement. Le Rayleigh est le même pour les trois cas : 1500. Pour une cavité de quelques centimètres (à gauche), cet effet peut être négligé : l'écoulement occupe pratiquement toute la cavité et est quasiment solénoïde au centre. Les isothermes sont déformées par l'advection avec 1) une tendance à la stratification thermique au centre de la cavité ; 2) un resserrement des isothermes au droit du bas de la paroi chaude en concordance avec un maximum du Nusselt local (cf. Figure 2, courbe 0). Il s'agit là de la configuration BU, très connue. Dans une cavité plus grande (et avec un ΔT plus faible pour conserver le même Rayleigh) l'écoulement et les isothermes se concentrent dans une zone de plus en plus proche des parois, laissant tout le cœur de la cavité 1) quasiment immobile (l'écoulement devient de plus en plus « carré » autour de ce cœur), 2) quasiment isotherme et adiabatique. Le long des parois

verticales, surtout autour de leur mi-hauteur, les lignes de courant et les isothermes non seulement se resserrent mais aussi se confondent sur la majeure partie de leur trajet, jusqu'à devenir très resserrées et verticales (Figure 3, à droite) en concordance avec l'homogénéisation du Nusselt local (cf. Figure 2, courbe 2).

Ces résultats s'expliquent comme suit. Dans la petite cavité (modèle BU), $\mathbf{v} \cdot \nabla T$ est nettement plus important que le terme en DP/Dt de l'équation (1). Dans la couche limite chaude, le fluide s'élève en s'échauffant continuellement (les lignes de courant croisent les isothermes) : la chaleur est advectée. Dans les grandes cavités, c'est le terme en DP/Dt qui devient nettement plus important que $\mathbf{v} \cdot \nabla T$ (dans les configurations décrites au centre et à droite de la Figure 3, le paramètre ϕ prend respectivement les valeurs de 30 et 1000). Lorsque le fluide s'élève dans la couche limite, l'apport de chaleur par conduction compense exactement la tendance au refroidissement due à la détente du fluide : la température du fluide reste quasiment constante ce qui uniformise le flux le long de la paroi.

3.3. Limite asymptotique

La limite asymptotique de l'écoulement dans les grandes cavités est monodimensionnelle. En considérant l'écoulement stationnaire où la friction visqueuse compense exactement la flottabilité, et où la conduction compense exactement la chaleur requise par le mouvement dans le gradient de pression du champ hydrostatique, on obtient ces deux équations adimensionnées :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -(Ra_H)^{1/2} \cdot \theta \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \theta}{dx^2} = \phi (Ra_H)^{1/2} \cdot w \quad (3)$$

Les deux fonctions w et θ doivent donc être solutions de l'équation différentielle $d^4 F/dx^4 = -\phi Ra_H \cdot F$. En introduisant les variables $d = \frac{(\phi Ra_H)^{1/4}}{2\sqrt{2}A} = \left(\frac{\beta^2 g^2 T_0}{c_p \alpha \nu} \right)^{1/4} \frac{L}{2\sqrt{2}}$ et

$e = \frac{\cosh d \cdot \sin d}{\sinh d \cdot \cos d}$, ainsi que les conditions aux limites adéquates, la solution pour la

température est $\theta = \frac{-1}{2} \cdot \frac{e \cosh(2Adx) \cdot \sin(2Adx) + \sinh(2Adx) \cdot \cos(2Adx)}{e \cosh d \cdot \sin d + \sinh d \cdot \cos d}$, qui après

dérivation en $x = 0$ donne le Nusselt asymptotique : $Nu_\infty = d \cdot \frac{\cosh d \cdot \sinh d + \sin d \cdot \cos d}{\sinh^2 d + \sin^2 d}$. Il

est remarquable que ce Nusselt asymptotique ne dépende que de la largeur L . La Figure 4 montre les points (Nusselt, largeur de cavité L) obtenus avec la plus petite valeur explorée du Rayleigh pour chacune des cavités étudiées, ainsi que la corrélation Nu_∞ ci-dessus. Les deux cavités $A = 4$ ou 16 sont en effet très proches de cette corrélation ; la cavité carrée s'en éloigne un peu, signe de l'influence de parois horizontales. Ceci prouve clairement que le Nusselt dépend principalement de la largeur de la cavité, ce qui n'est pas intuitif puisque le travail des forces de pression est plutôt un phénomène qui se développe sur la hauteur.

4. Conclusion

À l'approche de l'équilibre pour la convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée de dimensions données, les effets thermiques du travail des forces de pression ne

peuvent pas être négligés. C'est donc le modèle *Boussinesq Thermodynamique* qu'il faut utiliser. Ces effets font que lorsque l'écart de température tend vers zéro, le Nusselt ne tend pas vers l'unité, mais vers une valeur qui 1) peut être nettement supérieure à 1 ; 2) dépend principalement de la largeur de la cavité. Il en est ainsi parce que l'écoulement diffère très profondément de ceux calculés avec le modèle Boussinesq usuel. Même si le flux de chaleur tend bien vers zéro en allant vers l'équilibre, ce comportement non intuitif est peu connu.

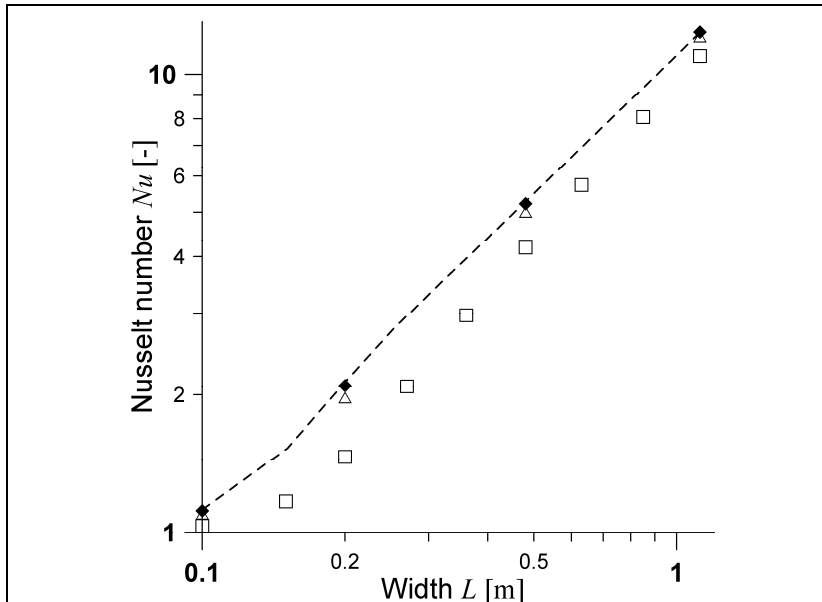


Figure 4 : Corrélation entre Nusselt et largeur de cavité L obtenue pour la corrélation Nu_{∞} ci-dessus (ligne discontinue) et pour chacune des cavités étudiées : \square pour $A = 1$; Δ pour $A = 4$; \blacklozenge pour $A = 16$; (chaque fois avec la plus petite valeur explorée du Rayleigh).

Références

- [1] B. Gebhart, Y. Jaluria, R. L. Mahajan et B. Sammakia, *Buoyancy-induced flows and transport*, Hemisphere Pub. Corp., New-York (1988).
- [2] P. A. Bois, Asymptotic aspects of the Boussinesq approximation for gases and liquids, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 58-1 (1991), 45-55.
- [3] A. Bejan, *Convection heat transfer*, John Wiley & Sons, Inc., New-York (1984).
- [4] D. J. Tritton, *Physical fluid dynamics*, Oxford University Press, Oxford (1988).
- [5] D. D. Gray et A. Giorgini, The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 19-5 (1976), 545-551.
- [6] M. G. Velarde et R. Perez-Cordon, On the (non-linear) foundations of Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid. II. Viscous dissipation and large cell gap effects, *J. Physique*, 37-3 (1976), 177-182.
- [7] E. A. Spiegel et G. Veronis, On the Boussinesq approximation for a compressible fluid, *Astrophysical Journal*, 131 (1960), 442-447.
- [8] E. Gadoin, P. Le Quéré et O. Daube, A general methodology for investigating flow instabilities in complex geometries: application to natural convection in enclosures, *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 37-2 (2001), 175-208.

Remerciements

Les calculs numériques ont été réalisés sur le NEC-SX8 du CNRS-IDRIS, Orsay.