

# Quelques observations sur un algorithme semi-implicite pour le calcul des écoulements compressibles à tous nombres de Mach

Mohamed AMARA\* — Yann MOGUEN\*\*,c — Eric SCHALL\*\*

\* Université de Pau et des Pays de l'Adour - Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications - Bâtiment IPRA, avenue de l'Université - F-64 013 Pau Cedex

\*\* Université de Pau et des Pays de l'Adour - Laboratoire de Thermique, Énergétique et Procédés - IUT-GTE, avenue de l'Université - F-64 000 Pau

c (auteur correspondant : yann.moguen@free.fr)

## Résumé

Un algorithme semi-implicite pour le calcul des écoulements compressibles à tous nombres de Mach a été récemment proposé par Nerinckx *et al.* [NER 05a]. L'idée fondamentale de cet algorithme, qui se présente sous la forme "prédicteur-correcteur", provient d'une analyse asymptotique des équations de Navier–Stokes lorsque le nombre de Mach tend vers zéro. Elle consiste à privilégier l'équation de conservation de l'énergie pour le calcul des corrections de pression à partir desquelles les variables d'état sont exprimées. Nous décrivons cet algorithme dans le cas non dissipatif, pour un écoulement dans une tuyère à section variable. La question du choix de la fonction de flux numérique à utiliser dans ce cas est discutée.

## 1. Introduction

Disposer d'une méthode de calcul des écoulements compressibles qui soit indépendante du nombre de Mach est un objectif qui suscite actuellement d'actives recherches. L'intérêt pratique d'une telle méthode est particulièrement évident lorsque plusieurs régimes d'écoulement coexistent au sein du même domaine de calcul. Cette situation se rencontre par exemple dans l'hypothèse du percement accidentel d'une chambre de combustion de moteur aéronautique. Des couches de mélange supersoniques côtoient alors des zones subsoniques en aval du disque de Mach et des zones "bas Mach" autour du jet [LEH 05].

Le calcul des écoulements compressibles présente des difficultés particulières aux régimes quasi-incompressible ou transsonique. À petit nombre de Mach, on observe une grande disparité entre les vitesses des ondes d'entropie et de vorticité d'une part, et la célérité acoustique d'autre part. Cela se traduit dans le modèle d'écoulement par le mauvais conditionnement des matrices des flux idéaux, source de problèmes numériques [VOL 93]. Par exemple, le respect de la condition de stabilité CFL lors de l'utilisation d'un schéma temporel explicite

peut alors conduire à des pas de temps rédhibitoires en pratique. La situation est similaire en régime transsonique.

## 2. Méthodologie

Pour simuler les écoulements compressibles à petit nombre de Mach, une approche possible consiste à préconditionner le système des équations de conservation de manière à ramener les vitesses de propagation convectives et acoustiques au même ordre de grandeur [TUR 87]. La consistance en temps est alors *a priori* perdue et les écoulements instationnaires ne peuvent être simulés qu'au prix de boucles en "pseudo-temps" [WEI 95].

La démarche que nous envisageons ici est différente. Nous nous appuyons sur une analyse asymptotique par les fonctions d'échelle  $M^n$  des équations de Navier–Stokes lorsque le nombre de Mach  $M$  tend vers zéro [MÜL 99]. Il apparaît ainsi que la divergence du champ des vitesses est donnée à l'ordre zéro par l'équation de conservation de l'énergie. Cette équation est donc amenée à jouer un rôle privilégié dans la procédure de résolution des équations de Navier–Stokes.

Nous suivons pour cette résolution un algorithme de la forme "prédicteur/correcteur" proposé récemment par Nerinckx *et al.* [NER 05a]. La correction de la pression étant réalisée à l'aide de l'équation de l'énergie, une correction de la température doit être envisagée de manière couplée dans le cas où la conduction de la chaleur est prise en compte. Dans le cas où aucun terme dissipatif n'est présent, une correction de la pression seule peut être réalisée à l'aide de l'équation de conservation de l'énergie. La section suivante sera consacrée à une description très succincte de cette approche dans le cas non dissipatif, en renvoyant le lecteur intéressé à [NER 05a, NER 05b, NER 06] pour davantage de détails. Certaines propriétés de la fonction de flux numérique et leur influence sur cet algorithme seront ensuite discutées.

## 3. Correction de la pression à l'aide de l'équation de l'énergie

Le fluide dont on modélise les écoulements est un gaz parfait situé à l'intérieur d'une conduite monodimensionnelle de direction  $x$  et de section  $S(x)$ . Les effets de la gravité, de la viscosité et des sources de chaleur sont négligés, ainsi que la conduction thermique. Le système à résoudre s'écrit ainsi :

$$\partial_t(\rho S) + \partial_x(\rho v S) = 0 \quad , \quad (1)$$

$$\partial_t(\rho v S) + \partial_x((\rho v^2 + p)S) = p \partial_x S \quad , \quad (2)$$

$$\partial_t(\rho E S) + \partial_x(\rho v H S) = 0 \quad , \quad (3)$$

$$E = e + \frac{1}{2}v^2 \quad , \quad (4)$$

$$\rho H = \rho E + p \quad , \quad (5)$$

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1} \quad , \quad (6)$$

où  $\rho$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $E$ ,  $H$  et  $\gamma$  désignent respectivement la masse volumique, la vitesse d'écoulement, la pression, l'énergie interne spécifique, l'énergie totale spécifique, l'enthalpie totale spécifique et le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants.

Le système (1)-(6) est résolu à l'aide d'une méthode de volumes finis centrés aux cellules. La séquence "prédiction/correction" s'effectue de la manière suivante. Dans un premier temps, à partir de la pression et des variables conservatives  $w = [\rho, \rho v, \rho E]^T$  considérées à l'instant  $n$ , un état intermédiaire  $w^*$  est estimé. Ensuite, une correction de la pression, notée  $p'$ , est obtenue. Elle permet d'actualiser le vecteur d'état et la pression, c'est-à-dire de les exprimer à l'instant  $n + 1$ . Donnons davantage de détails.

- Supposons connus à l'instant  $n$  sur chaque cellule  $i$  la pression  $p_i^n$  et le vecteur des variables conservatives  $w_i^n$ . La masse volumique estimée  $\rho^*$  est obtenue de l'équation de conservation de la masse discrétisée :

$$\rho_i^* - \rho_i^n + \frac{\tau}{S_i} (\rho_i^* v_{i+1/2}^n S_{i+1/2} - \rho_{i-1}^* v_{i-1/2}^n S_{i-1/2}) = 0 \quad , \quad (7)$$

où  $\tau = CFL_v / \max\{v_i^n\}$  désigne le pas de discrétisation défini à l'aide du nombre CFL convectif  $CFL_v$ . De façon analogue, la quantité de mouvement estimée  $(\rho v)^*$  est obtenue de

$$(\rho v)_i^* - (\rho v)_i^n + \frac{\tau}{S_i} ((\rho v)_i^* v_{i+1/2}^n S_{i+1/2} - (\rho v)_{i-1}^* v_{i-1/2}^n S_{i-1/2}) = -\tau(p_{i+1/2}^n - p_{i-1/2}^n) \quad . \quad (8)$$

Notons que le décentrage de  $\rho^*$  et  $(\rho v)^*$  dans les termes de flux des équations (7) et (8) n'est possible que parce que le sens de l'écoulement est connu dans le problème considéré. Il permet un calcul implicite des quantités "prédites"  $\rho^*$  et  $(\rho v)^*$ . En considérant que  $p^* = p^n$ , nous pouvons alors définir un état "prédit"  $w_i^*$  sur chaque cellule, ainsi qu'une vitesse "prédite" aux interfaces  $v_{i+1/2}^*$  calculée au moyen d'une fonction de flux numérique.

- La soustraction membre à membre de l'équation de la quantité de mouvement discrétisée suivant le schéma d'Euler implicite :

$$(\rho v)_i^{n+1} - (\rho v)_i^n + \frac{\tau}{S_i} \left( (\rho v^2 S)_{i+1/2}^{n+1} - (\rho v^2 S)_{i-1/2}^{n+1} \right) = -\tau(p_{i+1/2}^{n+1} - p_{i-1/2}^{n+1}) \quad (9)$$

et de l'équation (8), conduit à l'approximation suivante de la correction du flux de masse aux interfaces :

$$(\rho v)'_{i+1/2} = -\tau(p'_{i+1} - p'_i) \quad . \quad (10)$$

Ensuite, dans l'équation de conservation de l'énergie discrétisée suivant le schéma d'Euler implicite :

$$(\rho E)_i^{n+1} - (\rho E)_i^n + \frac{\tau}{S_i} \left( (\rho v H S)_{i+1/2}^{n+1} - (\rho v H S)_{i-1/2}^{n+1} \right) = 0 \quad , \quad (11)$$

nous avons  $(\rho E)_i^{n+1} = (\rho E)_i^* + (\rho E)'_i$ , où le terme correctif est écrit

$$(\rho E)'_i = (\partial_p(\rho e))_i^* p'_i = \frac{p'_i}{\gamma - 1} \quad . \quad (12)$$

À l'aide de la relation (10), les termes de flux de l'équation (11) sont écrits

$$(\rho v H)_{i+1/2}^{n+1} = (\rho H)_i^* v_{i+1/2}^* - H_i^* \tau (p'_{i+1} - p'_i) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p'_i v_{i+1/2}^* \quad . \quad (13)$$

Conjointement avec l'expression (12), nous obtenons alors de l'équation (11) un système tridiagonal de la forme

$$G_{i,i-1} p'_{i-1} + G_{i,i} p'_i + G_{i,i+1} p'_{i+1} = \Sigma_i \quad , \quad (14)$$

dont la résolution permet d'actualiser les vecteurs d'état  $w$  ainsi que les pressions aux cellules, suivant la relation  $p^{n+1} = p^n + p'$ . Sont représentés sur les figures 1 à 3 les résidus des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie obtenus par la méthode décrite ci-dessus. Pour ce calcul, la vitesse d'écoulement en entrée de la tuyère correspond à un nombre de Mach de  $10^{-3}$  environ.

REMARQUE. — Notons qu'en dépit du fait que le schéma d'Euler implicite ait été utilisé dans l'étape de correction, tous les termes ne sont pas calculés de manière totalement implicite. Par exemple, dans l'expression (13), nous n'avons pas corrigé le terme en  $\rho v^2$  dans l'expression de  $(\rho H)'$ . Cela provient du fait que ce terme n'a pas été identifié comme véhiculant de l'information acoustique. Nous renvoyons à [NER 05a] pour les questions relatives à l'identification des termes acoustiques dans les équations d'Euler.

#### 4. Flux numérique

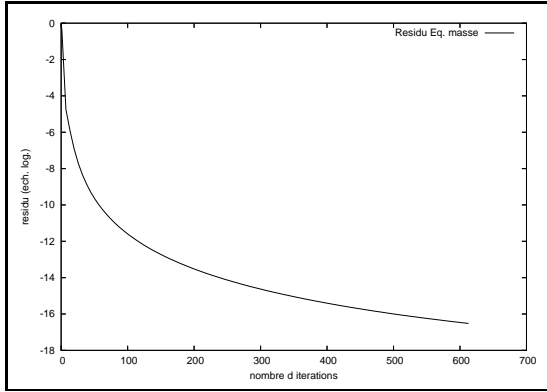
Au cours de chaque boucle temporelle de l'algorithme décrit à la section précédente, la fonction de flux numérique permettant de calculer les vitesses et les pressions aux interfaces est mise à contribution deux fois : (1) lors de l'étape de "prédiction", pour l'obtention des vitesses  $v_{i+1/2}^*$  intervenant dans les coefficients  $G$  et le second membre  $\Sigma$  du système (14); (2) après l'actualisation des  $w_i$  et  $p_i$ , lors de l'obtention des  $v_{i+1/2}$  et  $p_{i+1/2}$  apparaissant dans les équations (7) et (8). Les performances de l'algorithme dépendent donc *a priori* étroitement du choix de la fonction de flux numérique.

Comme cela a été signalé dans la section 2, la démarche suivie dans cette étude ne consiste pas à ramener les vitesses de propagation convectives et acoustiques au même ordre de grandeur, mais plutôt à les prendre en compte de manière différenciée. Le choix des fonctions de flux du type AUSM, dont fait partie AUSM+ (voir [LIO 96]) qu'utilise Nerinckx *et al.*, semble particulièrement adapté dans cette optique, puisque ces fonctions de flux reposent sur la décomposition du vecteur flux en un terme convectif et un terme de pression :

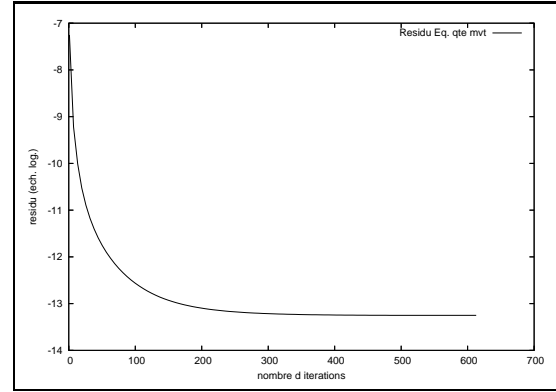
$$[\rho v, \rho v^2, \rho v H]^T + [0, p, 0]^T \quad .$$

Malheureusement, les performances d'AUSM+ à bas nombres de Mach sont sujettes à caution. Dans [NER 05a, NER 05b], une dissipation du flux de masse est introduite en suivant les suggestions de [EDW 98]. Dans [NER 06], un flux de masse "basses vitesses" *ad*

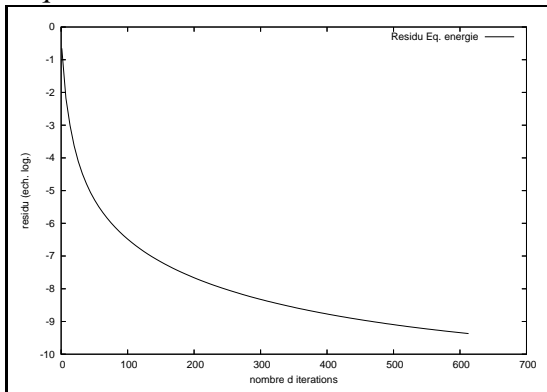
$hoc (\rho v)_{1/2}^{BV}$  est utilisé pour les nombres de Mach inférieurs à 0,3. Il est centré pour la vitesse et comporte un décentrage amont pour la masse volumique. Quant à la pression aux interfaces, elle est, comme la vitesse, obtenue par une simple moyenne arithmétique des valeurs aux cellules adjacentes. Les figures 1 à 5 ont été obtenues avec les choix d'interpolations de [NER 06]. La comparaison des figures 4 et 6 indique que des résultats très voisins sont obtenus avec  $(\rho v)_{1/2}^{BV}$  et le flux de masse d'AUSM+, dès lors que l'interpolation centrée de la pression est adoptée.



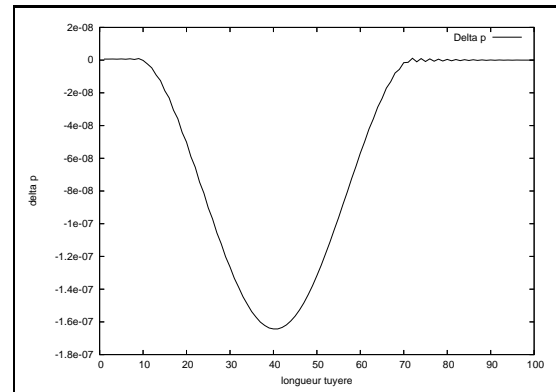
**Figure 1.**  $v_{in} = 0,344$  m/s - Résidu de l'équation de conservation de la masse - moyenne quadratique, échelle logarithmique



**Figure 2.**  $v_{in} = 0,344$  m/s - Résidu de l'équation de conservation de la quantité de mouvement - moyenne quadratique, échelle logarithmique



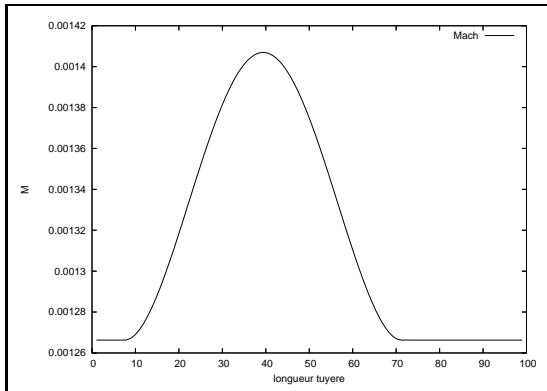
**Figure 3.**  $v_{in} = 0,344$  m/s - Résidu de l'équation de conservation de l'énergie - moyenne quadratique, échelle logarithmique



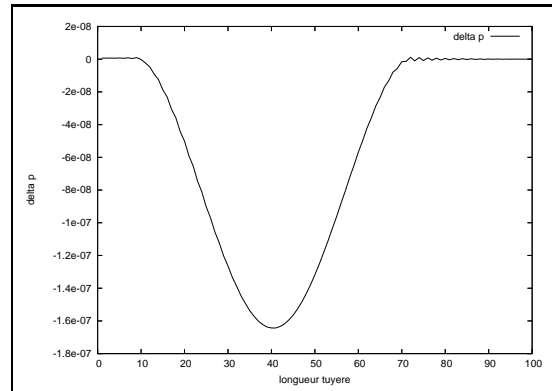
**Figure 4.**  $v_{in} = 0,344$  m/s - Profil de la pression  $p - p_{out}$  le long de la tuyère

## 5. Conclusions

La méthodologie proposée par Nerinckx [NER 06] et Nerinckx *et al.* [NER 05a, NER 05b] nous a permis d'obtenir des résultats numériques satisfaisants dans le cas non dissipatif d'un



**Figure 5.**  $v_{in} = 0,344$  m/s - Nombre de Mach  $M$  le long de la tuyère



**Figure 6.**  $v_{in} = 0,344$  m/s - Profil de la pression  $p - p_{out}$  le long de la tuyère - Flux de masse d'AUSM+

écoulement en tuyère à bas nombres de Mach. Les performances de l'algorithme sont étroitement liées au choix de la fonction de flux utilisée. Une étude plus poussée de cet aspect est en cours.

## 6. Références

- [EDW 98] EDWARDS J., LIU M.-S., « Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds », *AIAA Journal*, vol. 36, 1998, p. 1610–1617.
- [LEH 05] LEHNASCH G., « Contribution à l'étude numérique des jets supersoniques sous-détendus », Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 2005.
- [LIO 96] LIU M.-S., « A Sequel to AUSM : AUSM+ », *Journal of Computational Physics*, vol. 129, 1996, p. 364–382.
- [MÜL 99] MÜLLER B., « Low Mach Number Asymptotics of the Navier-Stokes Equations and Numerical Implications », *Lecture Series 1999-03*, von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1999.
- [NER 05a] NERINCKX K., VIERENDEELS J., DICK E., « Mach-uniformity through the coupled pressure and temperature correction algorithm », *Journal of Computational Physics*, vol. 206, 2005, p. 597–623.
- [NER 05b] NERINCKX K., VIERENDEELS J., DICK E., « A pressure-correction algorithm with Mach-uniform efficiency and accuracy », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 47, 2005, p. 1205–1211.
- [NER 06] NERINCKX K., « Pressure-Correction Algorithms for Flow Simulation at All Mach Numbers », Thèse de Doctorat, Université de Gand (Belgique), 2006.
- [TUR 87] TURKEL E., « Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations », *Journal of Computational Physics*, vol. 72, 1987, p. 277–298.
- [VOL 93] VOLPE G., « Performance of Compressible Flow Codes at Low Mach Numbers », *AIAA Journal*, vol. 31, 1993, p. 49–56.
- [WEI 95] WEISS J., SMITH W., « Preconditioning applied to variable and constant density flows », *AIAA Journal*, vol. 33, 1995, p. 2050–2057.