

# Convection naturelle thermosolutale 3D dans une cavité poreuse soumise à des gradients de température et de concentration verticaux

Abderrazzak KHADIRI<sup>(1)</sup>, Rachid BENNACER<sup>(2)</sup>, Mohammed Hasnaoui\*<sup>(1)</sup> et Abdelkhalk AMAHMID<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup>Faculté des Sciences Semlalia, Département de Physique, UFR TMF  
BP 2390, Marrakech, Maroc

<sup>(2)</sup>Université de Cergy-Pontoise - LEEVAM, Neuville sur Oise 95031, France

\*Fax: +(212) 24 43 74 10 Email: [hasnaoui@ucam.ac.ma](mailto:hasnaoui@ucam.ac.ma)

**Résumé** - On présente des résultats numériques de la convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse cubique saturée par un mélange binaire en utilisant une approche tridimensionnelle (3D). Les écoulements observés sont engendrés par l'imposition de températures et de concentrations constantes sur les faces horizontales de la matrice cubique (situation de chauffage déstabilisante). L'existence de la multiplicité des solutions est prouvée pour le présent problème. Les résultats obtenus ont montré que l'écoulement est de nature bidimensionnelle ou tridimensionnelle et ce, dépendamment de la combinaison des paramètres de contrôle. De même, les transferts thermiques et massiques dépendent du type de la solution et leurs dépendances vis-à-vis de Ra montrent 5 branches distinctes.

## Nomenclature

$A_x$  rapport de forme selon x,  $L_x/L_z$

$A_y$  rapport de forme selon y,  $L_y/L_z$

$D$  coefficient de diffusion

$Da$  nombre de Darcy,  $Da = K/L_z^2$

$g$  accélération gravitationnelle]

$K$  perméabilité du milieu poreux,

$Le$  nombre de Lewis

$N$  rapport des forces de volume,  
 $N = \beta_S \Delta C / \beta_T \Delta T$

$Nu$  nombre de Nusselt moyen

$$Nu = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0 \text{ ou } 1} dy dx$$

$P$  pression

$Pr$  nombre de Prandtl,  $Pr = \nu/\alpha$

$Ra$  nombre de Rayleigh,

$$Ra = \frac{g \beta_T \Delta T K L_z}{\alpha \nu}$$

$Sh$  nombre de Sherwood moyen

$$Sh = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0 \text{ ou } 1} dy dx$$

$T$  température, [K]

$u, v, w$  composantes des vitesses suivantes x, y, z

$x, y, z$  coordonnées du système

## Lettres grecques

$\alpha$  diffusivité thermique [ $m^2 s^{-1}$ ]

$\beta_T$  coefficient d'expansion thermique

$\beta_S$  coefficient d'expansion solutal

$\Phi$  concentration adimensionnelle

$\mu$  viscosité dynamique [ $kg m^{-1} s^{-1}$ ]

$\nu$  viscosité cinématique [ $m^2 s^{-1}$ ]

$\rho$  masse volumique [ $kg m^{-3}$ ]

$\theta$  température adimensionnelle

## Indices

+ valeur maximale

- valeur minimale

ref référence

r relatif

**Mots clés** : Convection naturelle, Double diffusion, Milieux poreux, Simulation 2D et 3D, Multiplicité de solutions

## 1. Introduction

La convection naturelle thermosolutale dans des milieux poreux saturés par des fluides binaires est présente dans une grande variété d'applications industrielles et naturelles (pétrochimie, industrie alimentaire, dispersion des polluants dans les sols, etc...). Une revue bibliographique suffisamment détaillée sur des travaux portant sur la convection naturelle dans les milieux poreux saturés peut être trouvée dans le livre de Nield et Bejan [1]. Le modèle bidimensionnel (**2D**) a été utilisé dans la plupart des études publiées sur la convection thermosolutale dans des géométries fermées. On citera les références [2-7] à titre indicatif. Comparativement, très peu d'études ont abordé des écoulements avec des modèles tridimensionnels (**3D**) [8-9]. Même si les modèles **2D** peuvent apporter des réponses qualitatives utiles, le modèle **3D** reste important par le fait qu'il permet plus de degrés de liberté pour une restructuration de l'écoulement dans la troisième direction lorsque celle-ci a un effet non négligeable sur l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse (cavité non suffisamment large dans la troisième direction). Le problème de la multiplicité des solutions en convection thermosolutale bidimensionnelle dans une géométrie poreuse carrée soumise à des gradients verticaux de la température et horizontaux de la concentration a été abordé en présence [10] et en absence [11] de l'effet Soret. La multiplicité des solutions en convection thermosolutale en **3D** reste encore mal documentée et compte parmi les motivations de la présente étude. Des résultats typiques montrant, en termes de lignes de courant, les différentes solutions obtenues et leurs impacts sur les transferts thermiques et massiques au sein de la géométrie cubique de Darcy sont présentés.

## 2. Description du problème et modèle mathématique

Le domaine étudié est schématisé par la figure 1. Il s'agit d'une cavité de forme cubique ( $A_x = A_y = A_z$ ) garnie d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Les surfaces inférieure et supérieure de la cavité sont soumises à des températures et à des concentrations constantes mais différentes ( $T^+ > T^-$  et  $C^+ > C^-$ ). Pour les faces restantes de la cavité, les conditions d'adiabaticité et d'imperméabilité sont adoptées. Le milieu poreux, de faible perméabilité (modèle de Darcy), est supposé homogène et isotrope. Un modèle d'écoulement **3D**, stationnaire et incompressible est considéré dans la présente étude. Les propriétés thermophysiques du fluide sont supposées constantes et évaluées à des conditions de référence à l'exception de la masse volumique dans le terme de force de volume (approximation de Boussinesq). La masse volumique dépend linéairement de la température locale et de la fraction massique :

$$\rho(T, C) = \rho_{ref} \left[ 1 - \beta_T (T - T_{ref}) - \beta_C (C - C_{ref}) \right] \quad (1)$$

Les grandeurs de références choisies pour aboutir à l'écriture des équations de mouvement du fluide et la conservation de l'énergie et de la concentration sont basées sur la viscosité du fluide.  $\lambda_r$  et  $D_r$  représentent respectivement la conductivité et le coefficient de diffusion relatif (caractéristique équivalente du milieu poreux par rapport au fluide).

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{v} = (\Theta + N\Phi) \frac{Ra}{Pr} \vec{k} - \nabla P \quad (3)$$

$$\vec{v} \cdot \nabla \Theta = \frac{1}{Pr} \lambda_r \nabla^2 \Theta \quad (4)$$

$$\vec{v} \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{LePr} D_r \nabla^2 \Phi \quad (5)$$

Les conditions aux limites thermiques et massiques au niveau des faces horizontales  $z = 0$  et  $z = 1$  sont respectivement  $\Theta = \Phi = 1$  et  $\Theta = \Phi = 0$ . Au niveau des faces verticales de la cavité on a  $\frac{\partial \Theta}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  ( $n$  désignant la direction de la normale à la face considérée).

La condition d'imperméabilité a été imposée sur les parois rigides de la cavité.

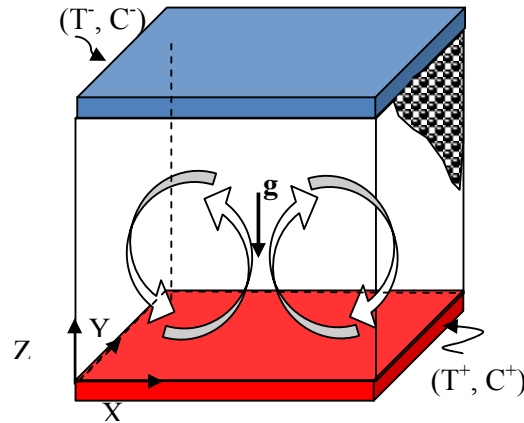


Fig. 1: Schéma montrant la configuration étudiée les axes de coordonnées

### 3. Modèle numérique

Nous avons utilisé un code basé sur la méthode des volumes finis. Les équations sont discrétisées sur des grilles décalées composées de volumes de contrôle non uniformément distribués. Afin de réduire les erreurs de diffusion numérique, nous avons utilisé un schéma (QUICK) pour l'approximation des termes d'advection. Le limiteur de flux (ULTRA-SHARP) est employé pour éliminer les oscillations numériques non physiques inhérentes au schéma (QUICK). L'algorithme (SIMPLE) est retenu comme coupleur des équations de la quantité de mouvement et de la continuité. La correction de pression est résolue itérativement en appliquant la méthode du gradient conjugué (CG), jusqu'à ce que la somme des valeurs absolues des résidus soit réduite par un facteur de dix. La matrice dissymétrique résultant de la discrétisation de l'équation d'énergie est résolue itérativement par la méthode du bi-gradient conjugué stabilisé (Bi-CGSTAB). Afin d'accélérer la convergence des méthodes linéaires (CG) et (Bi-CGSTAB) un pré-conditionnement (SSOR) est adjoint. La méthode multi-grille a été utilisée pour accélérer la convergence. Les méthodes Full Approximation Storage (FAS) et Full Multi-Grid (FMG) permettent ainsi d'éliminer une gamme plus étendue de longueurs d'ondes, et ceci de façon plus efficace que les méthodes monogrilles (la référence [12] pourrait être consultée pour plus de détails)

### 4. Résultats

Les simulations numériques ont été conduites pour un nombre de Lewis modéré,  $Le = 10$ . Dans la présente configuration qui est de type Rayleigh-Bénard, une multiplicité de solutions stationnaires a été trouvée possible pour des valeurs du nombre de Rayleigh supérieures à la valeur critique de bifurcation. Au début, l'initialisation a été favorable à l'écoulement bicellulaire en initialisant le code à partir d'une solution bicellulaire obtenue en imposant, sur deux faces opposées de la cavité, des températures chaudes identiques à celle de la paroi inférieure (configuration de Bridgman verticale). Les autres solutions ont été obtenues suite aux différentes transitions observées par variation de  $Ra$  (ou de  $N$ ). Ces différentes transitions ont permis d'obtenir cinq types d'écoulements, différents par leurs topologies ainsi que par les

transferts engendrés. Pour le cas de la convection dominée par les effets thermiques  $N \ll 1$ , les différents types d'écoulements obtenus et illustrés sur la figure 2 sont :

- l'écoulement monocellulaire (**noté EM**) qui occupe la totalité du domaine;
- l'écoulement bicellulaire (**noté EB**) où deux cellules contrarotatives prennent naissance;
- l'écoulement monocellulaire diagonal (**noté EMD**) où la cellule principale s'installe dans la direction diagonale;
- l'écoulement bicellulaire diagonal (**noté EBD**) où deux cellules prennent naissance le long des deux directions de la diagonale;
- l'écoulement central (**noté EC**) où les cellules remontent au niveau de la partie centrale de la cavité et descendent le long de ses parois verticales.

Les transferts thermiques et massiques sont illustrés en termes de Nu et Sh pour les différentes solutions obtenues. De ce fait, on peut apprécier et comparer l'impact de chaque type de solution sur les transferts de chaleur et de masse générés au niveau des faces horizontales actives de la présente configuration. On notera que le transfert tend vers la solution diffusive pour un  $Ra < 4\pi^2$ .

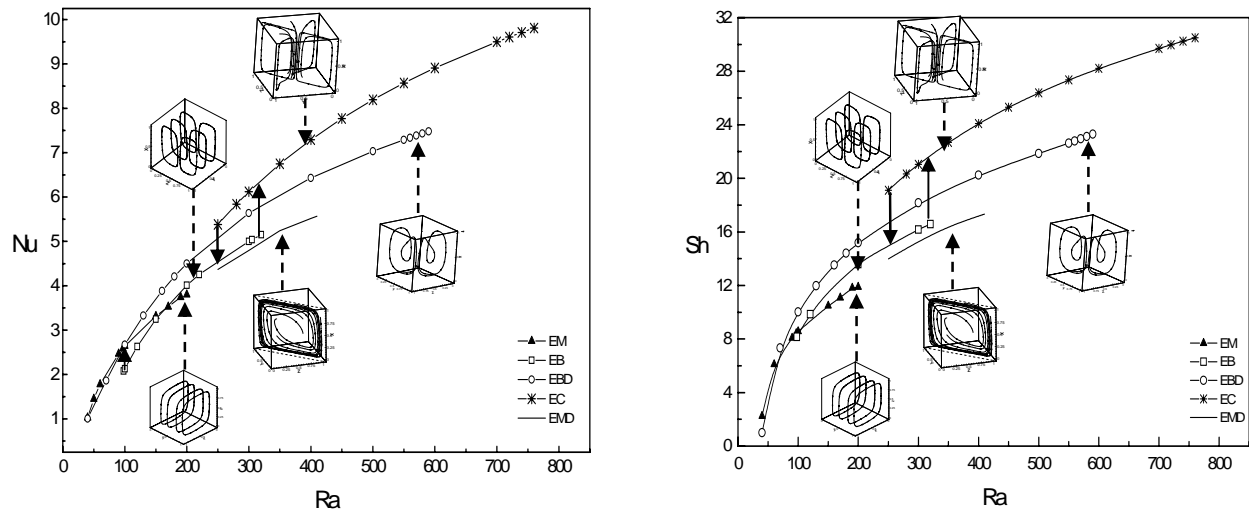


Fig. 2: Variations de Nu et Sh en fonction de  $Ra_T$  ainsi que les topologies d'écoulements (pour  $Le=10$  et  $N=0$ ).

Sezai et al. [4] et Mohamad et al. [8-9] ont montré que la transition de l'écoulement **2D** à celui **3D** débute par une "torsion" de l'écoulement qui évolue vers un écoulement latéral en forme de spirale puis bifurque à des écoulements multi-spiraux lorsqu'on fait varier les paramètres de contrôle.

En faisant varier  $Ra$  (pour  $N = 0$ ), on montre que les écoulements monocellulaires et bicellulaires (**EM** et **EB**) restent principalement dominés par le caractère bidimensionnel dans la gamme de variation de  $Ra$ . Quant aux structures restantes (**EMD**, **EBD** et **EC**), les écoulements qui leur correspondent sont potentiellement **3D** et ils sont donc impossibles à prédire par des modèles **2D**. L'effet de  $Ra$  sur Nu et Sh, illustré sur la figure 2, montre qu'ils sont fortement dépendants du type de la solution considérée. Numériquement, il a été trouvé que les **EM/EMD**, **EB** et **EBD/EC** existent pour  $Ra \geq 40$ ,  $Ra \geq 98$  et  $Ra \geq 250$ , respectivement. La transition vers le régime oscillant est retardée dans le cas de l'**EC** qui persiste comme unique solution pour les grandes valeurs de  $Ra$ . Avant l'apparition de la solution de l'**EC** ( $Ra < 250$ ), c'est la solution correspondant à l'**EBD** qui est la plus

favorable au transfert de chaleur et de masse mais pour  $Ra > 250$   $Ra_T > 250$ , c'est la solution **EC** qui engendre les meilleurs transferts. D'un autre côté, dans sa gamme d'existence, l'**EM** reste globalement le plus défavorable aux transferts au niveau des parois actives de la cavité. A titre indicatif, pour  $Ra = 200$ , la solution de l'**EM** conduit à une réduction de  $Nu$  ( $Sh$ ) de près de 50% (28%) par comparaison au cas de l'**EBD**. En diminuant graduellement  $Ra$  à partir des valeurs les plus élevées, on a noté que la transition de l'**EC** vers l'**EB** se produit à  $Ra_{Cr} \approx 249$  et cette transition est accompagnée d'une réduction des transferts de chaleur (de masse) de l'ordre de 16.4% (12.7%). La diminution de  $Ra$  dans la gamme d'existence de l'**EB** conduit également à une transition vers l'**EM** et cette transition est accompagnée par une augmentation de  $Nu$  ( $Sh$ ) de l'ordre de 24.65% (3.23%).

Il est à noter que pour  $Ra = 200$ , l'**EM** persiste pour  $N$  variant dans la gamme  $-0.6 \leq N \leq 0$  (voir figure 3).

Lorsque l'écoulement est généré uniquement par la force de poussée thermique ( $N = 0$ ), le tracé des résultats en termes de suivi de particule dans le plan transverse ( $x-z$ ) pour  $y = 0.5$  (résultats non présentés en raison de la limitation de l'espace), révèle que l'écoulement est bidimensionnel. La structure **2D** est détruite par diminution progressive de  $N$  dans la gamme  $[-0.6, 0]$ .

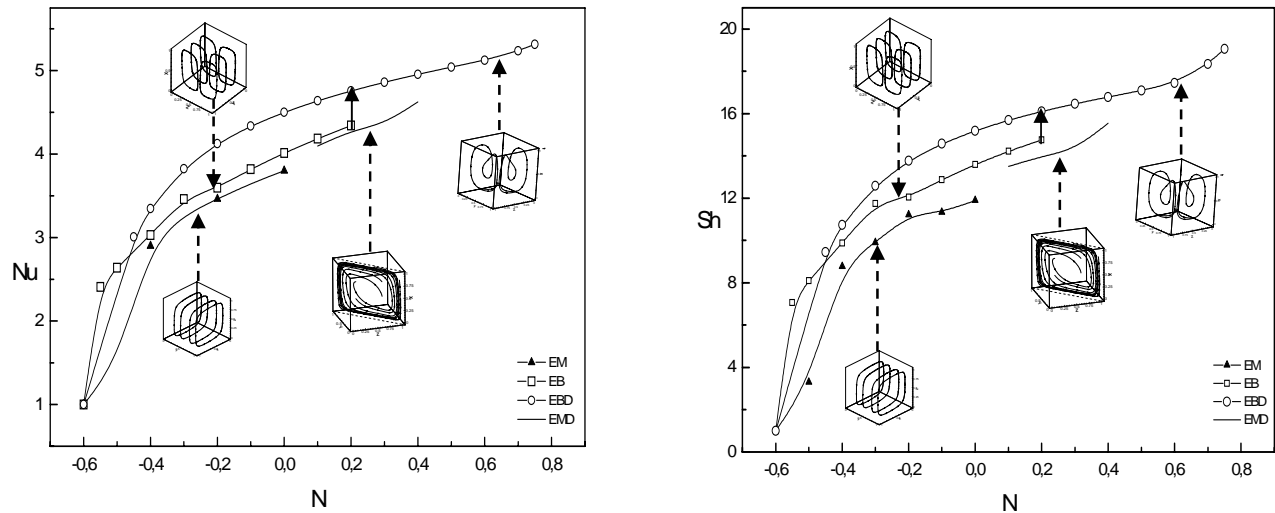


Fig. 3: Variations de  $Nu$  et  $Sh$  en fonction de  $N$  pour  $Ra = 200$ .

Déjà, pour  $N = -0.1$  la structure observée devient légèrement tridimensionnelle. Quant à l'**EB**, il a été obtenu dans la gamme  $-0.6 < N \leq 0.2$ . Le régime **2D** reste présent par diminution de  $N$  jusqu'à  $N = -0.4$ ; valeur à partir de laquelle l'écoulement retrouve une forme légèrement tridimensionnelle. De plus, pour  $N = -0.6$ , on retombe vers le régime diffusif caractérisé par un fluide au repos ( $Nu = Sh = 1$ ) car les forces solutales s'opposent aux forces d'origines thermique.

De ce qui précède, on peut ainsi déduire que le rapport des forces solutale et thermique joue un rôle déterminant quant au régime d'écoulement observé (**2D** ou **3D**) pour certains types de solutions. Il est important de signaler que les exécutions du code ont été conduites dans une géométrie potentiellement favorable à des écoulements tridimensionnels (effet de la troisième dimension non négligeable devant les deux directions restantes). Cependant, l'existence d'un écoulement 2D a été trouvée quand même possible pour deux types de solutions (**EM** et **EB**) lorsque les paramètres de contrôle ( $Ra_T$  et  $N$ ) varient dans des gammes spécifiques.

## 5. Conclusion

L'étude numérique de la convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse de forme cubique, conduite en utilisant une méthode des volumes finis, a permis d'évaluer l'effet du nombre de Rayleigh et du rapport des forces de volumes. La multiplicité des solutions a été prouvée. Elle a ainsi permis de montrer que deux types d'écoulements monocellulaires (**EM** et **EMD**), deux types d'écoulements bicellulaires (**EB** et **EBD**) plus un écoulement de type central (**EC**) sont possibles. Certaines solutions (**EM** et **EB**) gardent un comportement **2D** lorsqu'on fait varier  $Ra$  dans le cas de la dominance des forces d'origines thermique ( $N = 0$ ) alors que les solutions restantes (**EMD**, **EBD** et **EC**) sont de nature **3D**. Les gammes d'existence des différentes solutions sont très différentes d'une solution à l'autre. Le transfert de chaleur et de masse à travers le domaine poreux considéré révèle une forte dépendance vis-à-vis de la structure de l'écoulement obtenue. L'écoulement généralement le plus favorable aux transferts thermiques et massiques est celui correspondant à la solution centrale (**EC**). Quant aux effets de  $Ra$  et  $N$  sur les transferts et les structures d'écoulement, ils peuvent être appréciés sur les diagrammes présentés.

## Références

- [1] D.A. Nield, and A. Bejan, *Convection in Porous Media*, Springer, Verlag, 1999.
- [2] M. Mamou, P. Vasseur and E. Bilgen, Multiple solutions for double-diffusive convection in a vertical porous enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38 (1995), 1787-1798.
- [3] L. Kalla, P.Vasseur, R. Bennacer, R. Beji, R. Duval, Double diffusive convection within a horizontal porous layer salted from the bottom and heated horizontally, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 28 (2001), 1-10.
- [4] I. Sezai, A.A. Mohamad, Three-dimensional double-diffusive convection in porous cubic enclosure due to opposing gradients of temperature and concentration, *J. Fluid Mech.*, (1999), 400,333-353.
- [5] Sovran O., Charrier-Mojtabi M.-C. Et Mojtabi A. : Naissance de la convection thermo-solutale en couche poreuse infinie avec effet Soret, *Fluid mechanics C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 329, Série II b, pp. 287-293, 2001
- [6] Brand H., Stieberg V., Nonlinear Effects in the Convective instability of a binary mixture in a porous medium near threshold. *Physics Letters*, 93A (1983) Number 7.
- [7] Bourich M., Hasnaoui A., Amahmid A., Mamou M., Onset of convection and finite amplitude flow due to Soret effect within a horizontal sparsely packed porous enclosure heated from below, *Int. J. Heat Fluid Flow*, 26 (2005) 513-525.
- [8] A.A. Mohamad, R. Bennacer, Double diffusion natural convection in an enclosure filled with saturated porous medium subjected to cross gradients; stably stratified fluid, *Int J..Heat Mass Transfer*, 45 (2002), 3725-3740.
- [9] A.A. Mohamad, R. Bennacer, J. Azaiez, Double diffusion natural convection in a rectangular enclosure filled with binary saturated porous media: the effect of lateral aspect ratio, *Phys. Fluids*, 16, (2004), 184-199.
- [10] M. Bourich, A. Amahmid, and M. Hasnaoui, Double-Diffusive Convection in a Porous Enclosure Submitted to Cross Gradients of Temperature and Concentration, *Energy Conversion and Management*, 45, Issues 11-12 (2004), 1655-1670.
- [11] A. Mansour, A. Amahmid, M. Hasnaoui and M. Bourich, Numerical study of the multiplicity of solutions induced by thermosolutal convection in a square porous cavity heated from below and submitted to horizontal concentration gradient in the presence of Soret effect, *Num. Heat Transfer, Part A*, 49, Number 1 (2006), 69 - 94.
- [12] R. Bennacer, M. El Ganaoui and E. Leonardi, Vertical Bridgman configuration heated from below: 3<sup>d</sup> bifurcation and stability analysis, *Applied Mathematical Modelling*, 30, Issue 11 (2006), 1249-1261.

## Remerciements

Les programmes d'échange CNRS/CNRST 2006-2008 et AI Volubilis (040/SI/07) 2007-2010 sont vivement remerciés