

# Convection naturelle de Rayleigh-Bénard-Marangoni en régime transitoire

Ouardia TOUAZI<sup>1\*</sup>, Eric CHENIER<sup>2</sup>, Frédéric DOUMENC<sup>1</sup>, Béatrice GUERRIER<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Fluides, Automatiques et Systèmes Thermiques (FAST) UMR 7608 (Univ. UPMC et Paris-Sud, CNRS), Bat. 502, Campus Universitaire – 91405 Orsay

\* (auteur correspondant : [touazi@fast.u-psud.fr](mailto:touazi@fast.u-psud.fr))

<sup>2</sup> Université Paris-Est, laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, MSME FRE3160 CNRS, 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France

**Résumé** - Des expériences de séchage d'une solution polymère ont mis en évidence l'apparition de structures convectives en début de procédé. L'évaporation du solvant engendre une baisse de la température en surface et un enrichissement en polymères, pouvant entraîner l'apparition d'instabilités thermiques et solutales. Afin de comprendre la nature des cellules convectives, un modèle simplifié et adapté au début du séchage est utilisé pour effectuer des simulations numériques.

## Nomenclature

$a$	amplitude de la perturbation	$T$	température
$A$	rapport de forme, $A = D/e$	$u$	vitesse horizontale
$Bi$	nombre de Biot, $Bi = he/k$	$v$	vitesse verticale
$D$	longueur	<i>Symboles grecs</i>	
$e$	épaisseur	$\alpha$	diffusivité thermique
$g$	accélération de la pesanteur	$\beta$	coefficient de dilatation thermique
$h$	coefficient d'échange thermique	$\Delta T$	écart de température en régime stationnaire
$k$	conductivité thermique	$\Phi$	flux d'évaporation massique
$L$	chaleur latente de vaporisation	$\gamma$	tension de surface
$Ma$	nombre de Marangoni, $Ma = \frac{e\Delta T}{\mu\alpha} \left. \frac{\partial\gamma}{\partial T} \right _0$	$\mu$	viscosité dynamique
$\vec{n}$	vecteur normal à la surface libre	$\nu$	viscosité cinématique
$P$	pression	$\rho$	masse volumique
$Pe$	nombre de Péclet, $Pe = \max(u, v)(e/\alpha)$	$\theta$	température réduite, $\theta = (T - T_0)/\Delta T$
$Pr$	nombre de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$	<i>Indices et exposants</i>	
$Ra$	nombre de Rayleigh, $Ra = g\beta\Delta Te^3/\nu\alpha$	$0$	valeur de référence
$t$	temps	*	valeur dimensionnelle
$\vec{t}$	vecteur tangent à la surface libre		

## 1. Introduction

De nombreux dépôts et revêtements s'obtiennent par séchage d'une suspension ou d'une solution initialement diluée. Le couplage entre cinétique de séchage et qualité du dépôt met en jeu des phénomènes complexes de transfert de chaleur et de masse dans un milieu fluide dont les caractéristiques physiques évoluent au cours du temps. Lors du séchage, le solvant

s'évapore ce qui provoque une baisse de la température et la diminution de la concentration du solvant à la surface libre. Les inhomogénéités thermiques et massiques peuvent alors engendrer un écoulement qui s'organise sous la forme de cellules convectives dans l'épaisseur de la couche fluide.

Des expériences réalisées au FAST sur le séchage de solutions polymère-solvant [1] confirment l'existence d'un régime convectif en début de séchage. Cependant, l'étude fine de ce régime est relativement délicate car les vitesses engendrées sont petites et cela d'autant plus que les épaisseurs de fluide sont faibles. Afin de comprendre les conditions pour lesquelles le régime convectif apparaît, un modèle simplifié de l'expérience de séchage est utilisé puis simulé numériquement. Ce modèle simplifié s'appuie sur les observations expérimentales qui indiquent que les cellules convectives naissent sur les premières dizaines de secondes de l'expérience, c'est-à-dire sur des temps très courts pour lesquels la physique est essentiellement pilotée par les seuls transferts thermiques. Les cellules de convection sont engendrées par des variations de masse volumique (instabilité de type Rayleigh-Bénard) ou/et de tension de surface (instabilité de type Bénard-Marangoni) dues à des inhomogénéités thermiques volumique ou/et surfacique. Le temps d'apparition des cellules convectives étant relativement court, il est également raisonnable de négliger la masse de fluide évaporée, ce qui conduit à prendre une épaisseur constante et à ne pas tenir compte des variations des propriétés physiques avec la teneur en solvant. La surface libre est supposée plane et indéformable. Les variations de températures étant faibles, les grandeurs physiques sont prises constantes dans le modèle à l'exception de la masse volumique qui dépendra linéairement de la température (hypothèses de Boussinesq).

L'objectif de cette contribution est de montrer que l'utilisation de ce modèle simplifié permet de retrouver les gammes de paramètres pour lesquels des régimes convectifs sont observés lors d'expériences de séchage.

## 2. Equations

Dans la première étape présentée ici, un modèle bidimensionnel est choisi. On considère la solution contenue dans un récipient rectangulaire, de rapport de forme  $A=D^*/e^*=20$  (Fig. 1), et dont les parois sont isolées thermiquement. La surface libre est soumise à un échange convectif avec l'air ambiant et à un refroidissement dû à l'évaporation.

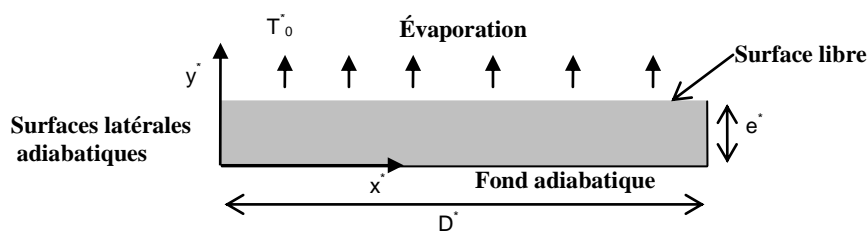


Figure 1 : Géométrie du problème

La dynamique du fluide et les transferts thermiques sont solutions des équations de Navier-Stokes et de l'énergie écrites dans l'approximation de Boussinesq. Les grandeurs utilisées pour adimensionner les variables sont l'épaisseur du film  $e^*$ , la vitesse de diffusion thermique  $\alpha^*/e^*$ , le temps de diffusion  $e^{*2}/\alpha^*$  et la température réduite  $\theta = (T^* - T_0^*)/\Delta T^*$  où  $\Delta T^*$  mesure l'écart entre la température ambiante  $T_0^*$  et la température atteinte en régime

stationnaire, c'est-à-dire lorsque le gradient de température dans le film est nul et que toute l'énergie nécessaire à l'évaporation provient de la convection dans l'air, soit :  $\Delta T^* = \Phi^* L^*/h^*$ . Les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v}) &= -\vec{\nabla} p + RaPr\vec{\theta} + Pr\Delta\vec{v} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\theta) &= \Delta\theta\end{aligned}\quad (1)$$

Le fluide est initialement au repos à la température ambiante  $T_0^*$ . Les vitesses sont nulles le long des parois solides adiabatiques. La condition aux limites thermique sur la surface libre s'écrit sous forme dimensionnelle :  $-k^* \left( \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_{y^*=e} = h^* (T^*(x^*, e^*, t^*) - T_0^*) + L^* \phi^*$ . Le

premier terme du membre droit désigne l'échange convectif entre la surface libre et le milieu ambiant et le second terme,  $L^* \Phi^*$ , représente le transfert de chaleur par évaporation du solvant à l'interface. Cette condition aux limites s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$-\frac{\partial \theta(x, 1, t)}{\partial y} = Bi(\theta(x, 1, t) + 1) \quad (2)$$

avec  $Bi$ , le nombre de Biot. La condition cinématique à la surface libre doit satisfaire l'équilibre mécanique. Compte tenu de l'hypothèse d'imperméabilité de cette frontière, on obtient simplement :

$$\left. \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{t})}{dn} \right|_{y=1} = -Ma(\vec{\nabla} \theta \cdot \vec{t})_{y=1} \quad \text{et} \quad (\vec{v} \cdot \vec{n})_{y=1} = 0 \quad (3)$$

avec  $Ma$ , le nombre de Marangoni.

Dans le but de se confronter aux résultats expérimentaux, les propriétés physiques de la solution de [1] ont été utilisées :  $\alpha^* = 0,97 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\beta^* = 0,00107 \text{ K}^{-1}$ ,  $\rho^* = 865 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $h^* = 28 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $d\gamma^*/dT^* = 0,119 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $k^* = 0,142 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $L^* = 396 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $\phi^* = 3,37 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$  pour des épaisseurs de fluide et des viscosités dynamiques comprises respectivement entre 0,5 et 30 mm et 1 à 5000 mPa.s.

### 3. Résultats

Pour les simulations numériques, nous avons utilisé un schéma de volumes finis localisé stabilisé par une méthode originale de clusterisation de mailles [2]. Les équations discrètes couplées sont résolues par une méthode de Newton-Raphson sous-relaxée avec le solveur linéaire itératif BiCGStab préconditionnée par une décomposition LU incomplète. Le maillage adopté tout au long de cette étude est un maillage régulier rectangulaire (40 et 800 mailles selon l'épaisseur et la longueur) et le pas de temps est égal à  $\Delta t = 10^{-3}$ . Dans ce qui suit, les résultats numériques ont été relevés dans la zone centrale du domaine de calcul afin de pouvoir négliger d'éventuels effets de parois.

#### 3.1 Evolution du nombre de Péclet

Cette partie introductive présente la méthodologie et les critères qui ont été adoptés dans l'étude numérique. L'objectif de ce papier est d'établir les conditions pour lesquelles la convection est significative. Pour cela, nous avons représenté l'évolution du nombre de Péclet au cours du temps. Ce paramètre traduisant l'importance relative du transport advectif par rapport au transport diffusif, la convection sera considérée comme non négligeable si ce nombre excède la valeur unité. Ce problème étant par nature transitoire, il est sensible aux conditions initiales. Nous avons choisi d'imposer une perturbation sinusoïdale sur le champ de vitesse de la forme suivante :  $u = a\pi \cos(\pi y) \sin^2(\pi x)$  et  $v = -2a\pi \cos(\pi y) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$  avec «  $a$  », l'amplitude de la perturbation initiale.

### 3.1.1 Influence de l'amplitude de la perturbation initiale

Sur les figures 2 et 3, nous présentons pour différentes valeurs d'amplitude «  $a$  », l'évolution du nombre de Péclet en échelle logarithmique (Fig. 2) et linéaire (Fig. 3a), ainsi que l'écart de température sur la surface libre :  $\theta_{max}(x,1,t) - \theta_{min}(x,1,t)$  au cours du temps (Fig. 3b). Les résultats correspondent à une épaisseur de fluide égale à 1mm et une viscosité dynamique égale à 1 mPa.s (soit  $Bi=0,2$ ,  $Pr=12$ ,  $Ma=5851$ , et  $Ra=451$ ).

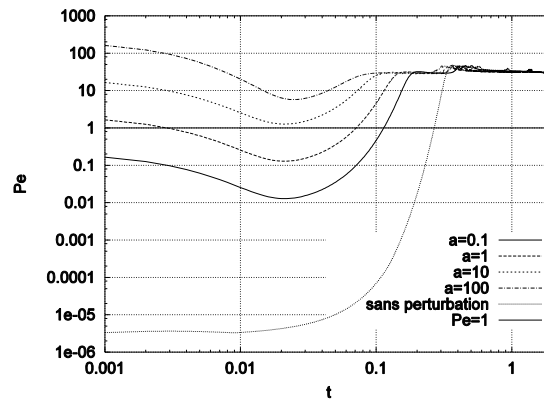


Figure 2 :  $Pe=f(t)$  pour  $Bi=0,2$  et différentes valeurs d'amplitude de perturbation initiale «  $a$  »

Dans les premiers instants, les cellules de convection vont apparaître et évoluer au cours du temps jusqu'à ce que soit atteint un régime dit quasi-stationnaire. Durant ce régime, observé ici sur les figures 3a et 3b à partir de  $t \sim 2$ , l'évolution transitoire des cellules de convection devient lente, leur taille ainsi que leur forme se stabilisent (Figs. 3c et 3d) jusqu'à leur extinction, lorsque le gradient de température s'annule dans la solution.

L'ensemble des tests numériques que nous avons effectués montrent que l'amplitude choisie pour la perturbation initiale modifie le temps d'apparition de la convection (en considérant le critère  $Pe=1$ ), mais joue peu sur l'évolution du nombre de Péclet durant le régime quasi-stationnaire ainsi que sur l'existence ou non de la convection. L'écart de température sur la surface libre au cours du régime quasi-stationnaire semble toutefois être légèrement dépendant de l'amplitude de la perturbation initiale. Dans la suite, nous avons fixé la valeur de l'amplitude «  $a$  » égale à 1.

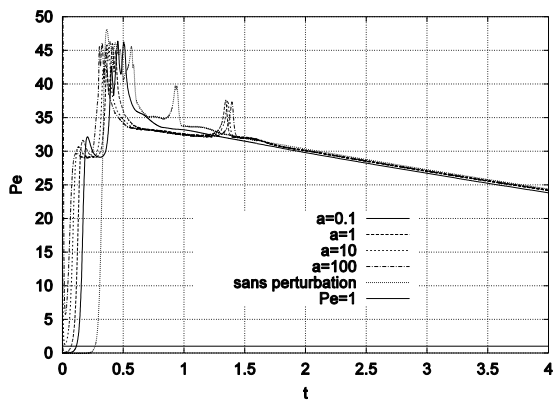


Figure 3a :  $Pe=f(t)$

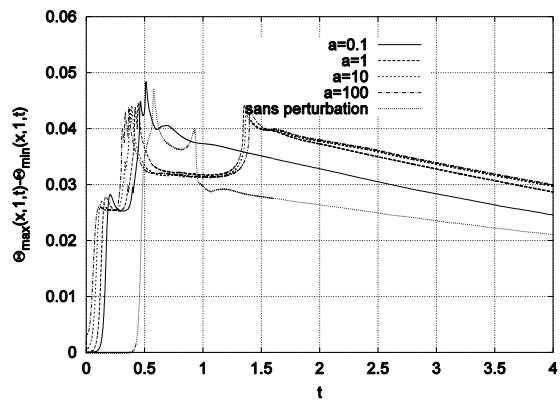


Figure 3b :  $(\theta_{max}(x,1,t) - \theta_{min}(x,1,t))=f(t)$



Figure 3c : Lignes de courant à  $t=2$



Figure 3d : Champ de température à  $t=2$

Figure 3 : *Écoulement en régime quasi-stationnaire :  
Effet de l'amplitude de la perturbation initiale*

### 3.1.2 Influence de la viscosité

L'évolution du nombre de Péclet au cours du temps  $t$ , est tracée pour différentes valeurs de viscosité sur la figure 4, pour le cas correspondant à une épaisseur de fluide  $e^* = 1mm$ .

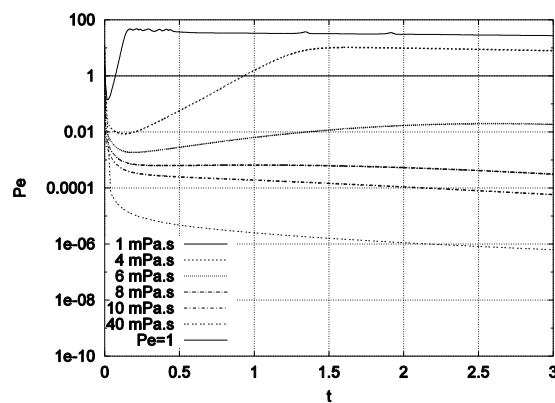


Figure 4 :  $Pe=f(t)$  pour  $Bi=0,2$  et différentes viscosités de la solution

Durant les premiers pas de temps, la perturbation initiale sur le champ de vitesse est relaxée. Puis, selon la valeur de la viscosité, le nombre de Péclet augmente ou continue à diminuer. Dans le premier cas, le transport advectif devient de plus en plus significatif jusqu'à être éventuellement plus important que celui de la diffusion. Dans le cas présenté, la convection sera considérée comme étant observable pour des valeurs de viscosité inférieures à 4 mPa.s ce qui permet d'établir une valeur seuil du nombre de Marangoni comprise entre  $Ma=975$  et  $Ma=1463$ .

### 3.2 Diagramme d'existence

La méthodologie employée étant présentée, l'étude est étendue pour différentes valeurs d'épaisseur de fluide. Pour chaque épaisseur de fluide comprise entre 1mm et 30mm, la figure 5 présente la viscosité maximale au dessous de laquelle l'apparition de la convection a été observée ( $Pe \geq 1$ ). Cette étude a été menée en considérant d'une part l'effet couplé de la tension de surface et de la poussée d'Archimède, et d'autre part en annulant l'effet du terme de flottabilité pour ne s'intéresser qu'à l'instabilité de Bénard-Marangoni. Les résultats obtenus montrent une différence entre les deux situations autour de l'épaisseur de 8mm, valeur à partir de laquelle l'effet des inhomogénéités de tension de surface devient faible face aux variations de la masse volumique. Pour les faibles épaisseurs ( $e < 8\text{mm}$ ), l'apparition des cellules de convection est déclenchée par l'effet Marangoni, et aux grandes épaisseurs, l'instabilité dominante est de type Rayleigh-Bénard. Ces résultats numériques ont permis d'établir une carte définissant le domaine d'existence de l'instabilité, et montrent un bon accord avec les résultats issus de l'étude expérimentale.

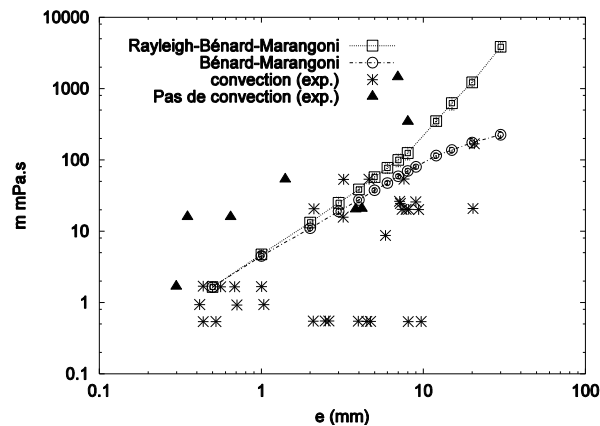


Figure 5 : Existence de l'instabilité en fonction de l'épaisseur et de la viscosité de la solution : Comparaison avec les observations expérimentales (exp.).

### 4. Conclusion

Les résultats numériques ont permis de définir l'importance relative des deux mécanismes d'instabilité de Rayleigh-Bénard et de Bénard-Marangoni dans un problème de séchage. Bien qu'utilisant un modèle simplifié, ces résultats numériques sont en bon accord avec ceux issus des observations expérimentales. La poursuite de ce travail est en cours et concerne d'une part l'extension tridimensionnelle de ce modèle et d'autre part la prise en compte de la convection solutale.

### Références

- [1] G.Toussaint, H.Bodiguel, F.Doumenc, B.Guerrier, C.Allain, Experimental characterization of buoyancy and surface tension-driven convection during the drying of a polymer solution, *accepté pour publication à IJHMT*.
- [2] E. Chénier, R. Eymard, O. Touazi, Numerical results using a collocated finite volume scheme on unstructured grids for incompressible flows, *Numerical Heat Transfer, part B* (2006), 1-18.