

# Etude numérique de la convection naturelle dans une cavité triangulaire semi - poreuse

El Alami SEMMA<sup>1\*</sup>, Abdelkhalek CHEDDADI<sup>2</sup>, Antonio CAMPO<sup>3</sup>, Hassan RIDOUANE<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universié Hassan 1<sup>er</sup>, FST de Settat, Laboratoire de Mécanique, Settat, Maroc.

<sup>2</sup>Univ. Mohammed V, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Av. Ibn Sina, Rabat, Maroc.

<sup>3</sup>Department of Mechanical Engineering, The University of Vermont, Burlington, VT 05405.

\* (auteur correspondant : [semaalam@yahoo.fr](mailto:semaalam@yahoo.fr), [sema@fst.ac.ma](mailto:sema@fst.ac.ma))

## Résumé

Le présent travail porte sur l'étude de la convection naturelle dans une cavité triangulaire semi-poreuse remplie d'air. Les équations de Navier-Stokes sont résolues à l'aide d'une méthode de volumes finis de 2<sup>ème</sup> ordre en temps et en espace. Les résultats numériques sont présentés pour le champ de vitesse, le champ de température et le transfert thermique à travers les parois isothermes. Le calcul pour le cas purement fluide montre une bonne concordance avec les résultats de référence. L'effet d'une couche poreuse attachée à la paroi verticale est examiné. Nous montrons que les faibles épaisseurs affectent nettement le transfert thermique et le mode d'écoulement. L'effet de la perméabilité est analysé. Une corrélation du nombre de Nusselt en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse et du nombre de Rayleigh est identifiée.

## Nomenclature

<i>A</i>	rapport de forme	<i>Symboles grecs</i>	
<i>Da</i>	Nombre de Darcy, $Da = \kappa/H^2$	$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
<i>g</i>	accélération gravitationnelle, $m.s^{-2}$	$\beta$	coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$
<i>H</i>	hauteur de la cavité, <i>m</i>	$\nu$	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
<i>Nu</i>	nombre de Nusselt	$\rho$	densité, $kg.m^{-3}$
<i>p</i>	pression, <i>Pa</i>	$\kappa$	perméabilité du milieu poreux, $m^2$
<i>Pr</i>	nombre de Prandtl, $Pr = \nu / \alpha$	$\varepsilon$	porosité
<i>Ra</i>	nombre de Rayleigh, $Ra = g \beta \Delta T H^3 / \nu \alpha$	<i>Indices et exposants</i>	
<i>T</i>	température, <i>K</i>	<i>p</i>	paroi
<i>t</i>	temps, <i>s</i>	'	variables dimensionnelles
<i>x, y</i>	coordonnées cartésiennes, <i>m</i>	<i>C</i>	chaud
<i>u</i>	vitesse suivant la direction <i>x</i> , $m.s^{-1}$	<i>F</i>	froid
<i>v</i>	vitesse suivant la direction <i>y</i> , $m.s^{-1}$		

## 1. Introduction

Plusieurs études numériques, analytiques et expérimentales ont été consacrées à la convection naturelle dans une phase fluide contenue dans une cavité de forme carrée. Ces travaux sont discutés dans les papiers de Ostrach [1], Catton [2], Hoogendoorn [3], Young [4]. Dans l'ensemble de ces travaux, l'écoulement est déclenché par l'application d'une température différentielle sur les parois latérales.

D'autre part, plusieurs travaux ont traité la cavité triangulaire dans laquelle la base horizontale est chaude et les deux hypoténuses sont froides ou le cas inverse [5-9]. Cependant, il y a peu de travaux sur la convection naturelle dans une cavité triangulaire disposée verticalement et qui trouve ses applications dans les boîtiers électroniques avec des contraintes sévères de poids ou d'espace [10-11].

Les travaux de Ridouane et Campo [12] et Ridouane et al [13], ont corrélié la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh et de l'angle d'inclinaison et ont comparé ce taux de transfert avec celui de la cavité différentiellement chauffée. Ils montrent que ce taux est très important pour les faibles Rayleigh et chute pour les fortes valeurs de Ra.

Dans le présent papier, nous considérons la même cavité avec une couche poreuse attachée à la paroi verticale. L'effet de la perméabilité et de l'épaisseur de la couche poreuse est investigué. Nous montrons que cet effet est très important pour les faibles épaisseurs et réduit significativement le transfert thermique à travers les parois isothermes.

## 2. Formulation du problème

La configuration géométrique étudiée est constituée d'une cavité triangulaire de rapport de forme  $A=0,5$  contenant une couche poreuse homogène d'épaisseur  $Xp$  collée à la paroi verticale (figure 1). Celle-ci est portée à la température chaude  $T_C$  tandis que la paroi inclinée est soumise à une température froide  $T_F$ . La paroi de connexion est supposée thermiquement adiabatique. Les hypothèses de simplification retenues afin de réduire les équations générales du problème étudié dans ce travail sont les hypothèses classiquement retenues dans les études de la convection naturelle. Le fluide étudié (saturant le milieu poreux si c'est le cas) est Newtonien, incompressible et en écoulement laminaire. Les propriétés physiques du fluide sont constantes (conductivité, viscosité,...) sauf pour la masse volumique dans le terme de force de volume (hypothèse de Boussinesq adoptée). On considère que la masse volumique varie linéairement avec la température du fluide dans l'enceinte. Elle est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \rho_{ref} \left[ 1 - \beta_T (T - T_{ref}) \right] \quad (1)$$

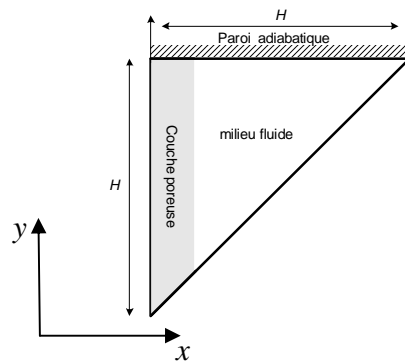


Figure 1. Configuration géométrique

Le modèle mathématique résulte du couplage des équations de conservation dans le fluide et dans le milieu poreux avec des conditions appropriées au niveau de l'interface fluide/poreux. Compte tenu des simplifications engendrées par les hypothèses précédemment citées, le système

d'équations de conservation couplées régissant l'écoulement et le transfert thermique s'écrit dans le classement respectif ; conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement et conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - Da^{-1} u \quad (2)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{\varepsilon^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{\varepsilon^2} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - Da^{-1} v - Ra \text{Pr} T \quad (3)$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4)$$

$$\sigma = \frac{[\varepsilon(\rho c_p)_f + (1-\varepsilon)(\rho c_p)_s]}{(\rho c_p)_f} \quad (5)$$

Les variables sont transformées en quantités adimensionnelles définies comme suit:

$$x = \frac{x'}{H}, \quad y = \frac{y'}{H}, \quad t = \frac{t' \alpha}{H^2}, \quad u = \frac{u' H}{\alpha} \quad (6)$$

$$v = \frac{v' H}{\alpha}, \quad T = \frac{T' - T'_c}{T'_H - T'_c}$$

Le transfert thermique à travers la paroi chaude est défini par la relation suivante :

$$Nu = \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} dy \quad (7)$$

La discrétisation des équations de conservation est effectuée à l'aide d'une méthode de volumes finis de deuxième ordre en temps et en espace. L'algorithme SIMPLEC est utilisé pour résoudre le couplage vitesse-pression. La convergence est déclarée pour une valeur maximale relative entre deux itérations successives inférieures à  $10^{-6}$ .

### 3. Résultats et discussion

Dans un premier temps nous avons validé notre modèle par comparaison avec les travaux de Nithiarasu et Ravindran [14] en considérant la convection naturelle dans une cavité carrée différentiellement chauffée et remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide caractérisé par un nombre de Prandtl ( $Pr=0,7$ ). Nous avons considéré le cas d'un Rayleigh  $Ra=10^4$ ,  $Da = 0,01$  et  $\varepsilon=0,6$ . Nous avons trouvé une solution en bon accord quantitatif (tableau 1) et qualitatif avec les résultats de référence (Figure 2).

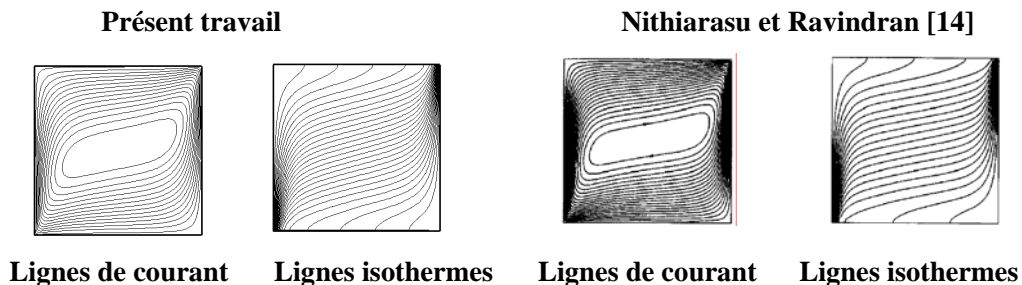


Figure 2. Comparaison qualitative avec les résultats de référence [14] pour  $Da=10^{-6}$ ,  $Ra=5 \times 10^8$  et  $\varepsilon=0,6$

Tableau 1. Comparaison de la valeur de Nusselt moyen avec les résultats de référence [12]

$Ra$	Présent travail	Réf. [12]
$10^7$	1,076	1,074
$10^8$	2,972	2,969

Dans ce qui suit nous nous sommes intéressés à l'étude de l'effet de la présence d'une couche poreuse sur le transfert de chaleur. Nous considérons le cas où les valeurs des diffusivité des deux milieux fluide et poreux sont les mêmes ( $\frac{\alpha_f}{\alpha_p} = 1$ ) et la viscosité effective est égale à la viscosité du fluide.

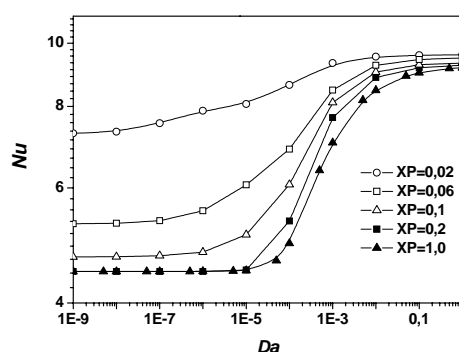
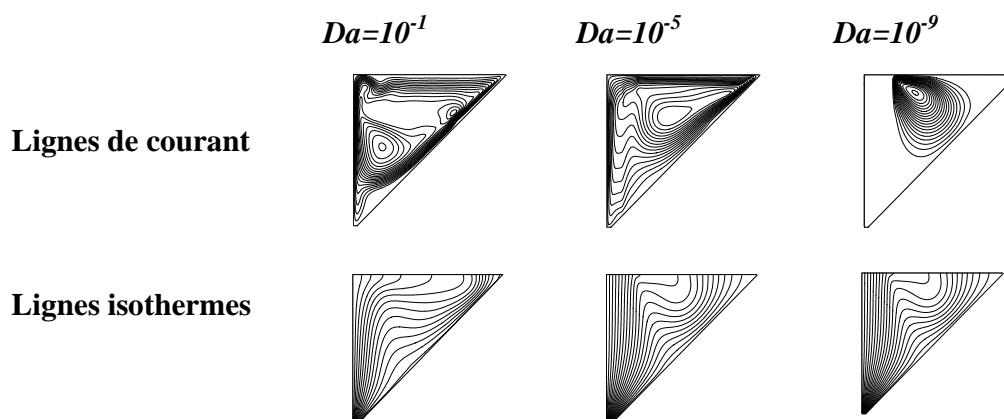


Figure 3. Effet du nombre de Darcy sur le transfert thermique

Dans un premier temps, nous avons étudié l'effet de la perméabilité de la couche poreuse sur le transfert thermique et le mode d'écoulement pour différentes valeurs de  $Xp$ . La figure 3 montre une forte influence de la présence de la couche poreuse sur le transfert thermique à travers la paroi froide. Cet effet devient de plus en plus important pour les valeurs de Darcy variant dans l'intervalle  $10^{-5} < Da < 10^{-2}$ . Ceci peut être justifié par le fait que hors ces deux extrêmes, le milieu poreux tend vers un comportement solide (pour les faibles valeurs de  $Da$ ) ou un comportement fluide (pour les fortes valeurs).



Figures 4. Lignes de courant et lignes isothermes pour  $Ra=10^8$ ,  $Xp=0.1$  et  $\varepsilon=0.8$

D'autre part, malgré la faible épaisseur de la couche poreuse, la structure d'écoulement change avec le nombre de Darcy. En effet, pour  $Xp=0,1$  et  $Ra=10^8$ , l'écoulement passe d'une structure multicellulaire à forte intensité pour  $Da=10^{-1}$  à une structure monocellulaire de faible intensité localisée du côté du point singulier (fluide-poreux - paroi horizontale). Pour les fortes valeurs de Darcy, les vitesses sont importantes près des parois rigides. La présence de la couche poreuse à faible valeur du nombre de Darcy défavorise l'apparition de la convection naturelle et le transfert thermique est dominé par la diffusion thermique ce qui justifie le passage du nombre de Nusselt de 4,956 pour  $Da=10^{-9}$  à 9,57 pour  $Da=0,1$ . Cet effet peut être aussi illustré par la forte distorsion des lignes isothermes pour  $Da=0,1$  avec l'apparition d'une couche limite thermique du côté de la paroi verticale et la paroi inclinée (figure 5-a).

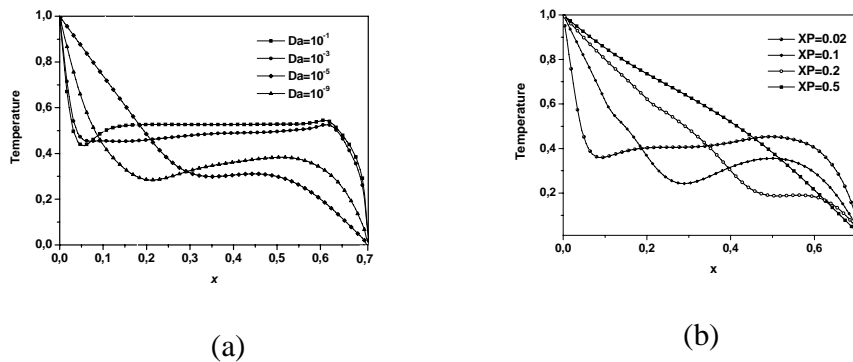


Figure 5. Profils de la température (a) pour différentes valeurs de  $Da$  ( $Xp=0,1$ ), (b) pour différentes valeurs de  $Xp$  ( $Da=10^{-6}$ ), avec  $Ra=10^8$ ,  $\varepsilon=0,8$  et  $Xp=0,1$

L'épaisseur de la couche poreuse influence fortement le transfert thermique au sein de la cavité. La figure 5-b montre la distribution de la température suivant  $x$  pour  $y=0,7$ . Pour les faibles épaisseurs, la température est distordue par l'écoulement intense se développant dans la cavité. Cependant, lorsque l'épaisseur de la couche limite devient supérieure à 0,2, l'intensité de l'écoulement devient très faible et la distribution de la température tend vers un comportement linéaire. Ceci est bien illustré dans la figure 6 où le transfert de chaleur à travers la paroi froide diminue exponentiellement avec l'épaisseur de la couche poreuse. Le nombre de Nusselt peut alors être corrélé par la relation suivante :

$$Nu = 0.0845 \times Ra^{0.345} \times e^{-0.26 \times Xp \times Ra^{0.12}} + 8.77 \quad (8)$$

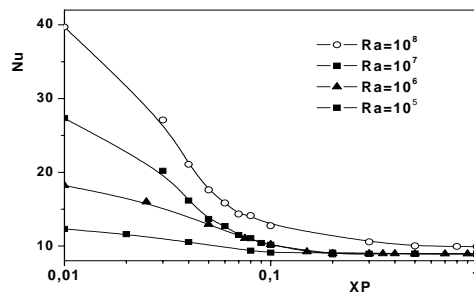


Figure 6. Effet de l'épaisseur de la couche poreuse sur le nombre de Nusselt pour différents nombres de Rayleigh,  $Da=10^{-6}$  et  $\varepsilon=0,8$ .

## 4. Conclusion

Dans ce travail nous avons étudié la convection naturelle dans une cavité triangulaire semi-poreuse. Les résultats montrent une forte dépendance du transfert thermique à travers les parois isothermes en fonction de la perméabilité du milieu poreux. De même, les faibles épaisseurs de la couche poreuse affectent fortement le mode d'écoulement et le transfert thermique à l'intérieur de la cavité. Cette étude est en cours d'extension en tenant compte de la présence des effets solutaux.

## Références

- [1]. Ostrach, S., 1972, *Advances in Heat Transfer*, 6th ed., Academic, San Diego, CA, pp. 161–174.
- [2]. Catton, I., 1978, "Natural Convection in Enclosures," *Proceedings of the 6th International Heat Transfer Conference*, Toronto, Canada.
- [3]. Hoogendoorn, C. J., 1986, "Natural Convection in Enclosures," *Proceedings of the 8th International Heat Transfer Conference*, San Francisco, CA.
- [4]. Yang, K. T., 1987, "Natural Convection in Enclosures," *Handbook of Single-Phase Heat Transfer*, S. Kakac et al., ed., Wiley, New York, Chap. 13.
- [5]. Flack, R. D., 1980, "The Experimental Measurement of Natural Convection Heat Transfer in Triangular Enclosures Heated or Cooled from Below," *ASME, J. Heat Transfer*, **102**, pp. 770–772.
- [6]. Akinsete, V. A., and Coleman, T. A., 1982, "Heat Transfer by Steady Laminar Free Convection in Triangular Enclosures," *Int. J. Heat Mass Transfer*, **25**, pp. 991–998.
- [7]. Poulikakos, D., and Bejan, A., 1983, "The Fluid Mechanics of an Attic Space," *J. Fluid Mech.*, **131**, pp. 251–269.
- [8]. Karyakin, Y. E., Sokovishin, A., and Martynenko, O. G., 1988, "Transient Natural Convection in Triangular Enclosures," *Int. J. Heat Mass Transfer*, **31**, pp. 1759–1766.
- [9]. Del Campo, E. M., Sen, M., and Ramos, E., 1988, "Analysis of Laminar Natural Convection in a Triangular Enclosure," *Numer. Heat Transfer*, **13**, pp. 353–372.
- [10]. Simons, R. E., Antonnetti, V. W., Nakayawa, W., and Oktay, S., 1997, "Heat Transfer in Electronic Packages," *Microelectronics Packaging Handbook*, R.R. Tummala, et al., ed., 2nd ed., Chapman and Hall, New York, pp. 1-315–1-403.
- [11]. Bar-Cohen, A., Watwe, A. A., and Prasher, R. S., 2003, "Heat Transfer in Electronic Equipment," *Heat Transfer Handbook*, A. Bejan and A. D. Kraus, eds., Wiley, New York, Chap. 13.
- [12]. Ridouane E. H., Campo A., 2006, Heightened Thermal Convection as a Result of Splitting a Square Cavity Diagonally in Half, *Journal of Electronic Packaging*, Vol. 128, pp. 251-258
- [13]. Ridouane E. H., Campo A., 2005, Chang J. Y., Natural Convection Patterns in Right-Angled Triangular Cavities With Heated Vertical Sides and Cooled Hypotenuses, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 127, pp. 1181-1186.
- [14]. Perumal Nithiarasu, Kanagaraj Ravindran, A new semi-implicit time stepping procedure for buoyancy driven flow in a fluid saturated porous medium, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 165 (1998) 147-154