

Utilisation d'un modèle géométrique et du lancer de rayons pour le calcul des échanges radiatifs par éléments finis.

Pierre VUEGHS^{1*}, Hans-Peter DE KONING², Olivier PIN², Pierre BECKERS¹

¹LTAS, Université de Liège, Belgique
Chemin des Chevreuils, B4000 Liège

²ESTEC, Noordwijk, The Netherlands
Keplerlaan, 1, 2201 AZ Noordwijk

* (auteur correspondant : Pierre.Vueghs@ulg.ac.be)

Résumé – En thermique spatiale, les échanges de chaleur par rayonnement sont prépondérants. Dans cet article, nous présentons une méthode qui combine la définition géométrique du modèle avec le maillage éléments finis. Les primitives géométriques sont décomposées en cellules paramétriques. Le maillage éléments finis est ensuite superposé à ces cellules. Cette méthode permet d'accélérer le lancer de rayons nécessaire au calcul thermique radiatif. Il permet également de calculer l'émission et la réflexion de manière exacte et d'appliquer les résultats radiatifs au maillage éléments finis.

Nomenclature

F_{i-j}	facteur de vue		
N_i	Nombre de rayons émis par i	θ, ϕ	Latitude et longitude, rd
P_i	Carreau (face) d'indice i	Π	Plan
x, y, z	axes du repère orthonormé	ξ_1, ξ_2	Nombres aléatoires uniformes

1. Introduction

En synthèse d'images comme en thermique radiative, l'objectif est de calculer les échanges d'énergie par rayonnement entre les surfaces d'un modèle géométrique tridimensionnel. Ces échanges d'énergie dépendent de la configuration de ces surfaces (leurs tailles, leurs orientations relatives et la distance qui les sépare). Cette dépendance s'exprime par le facteur de vue.

Par définition, le facteur de vue entre deux carreaux P_i de surface A_i et P_j de surface A_j est la fraction d'énergie émise de manière diffuse par P_i qui atteint P_j directement.

$$F_{i-j} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos(\theta_i) \cos(\theta_j)}{\pi s_{ij}^2} dA_j dA_i \quad (1)$$

Bien que le facteur de vue puisse être calculé de manière exacte pour certaines configurations simples, le calcul devient compliqué s'il faut tenir compte d'obstacles. Cela implique de discrétiser le modèle géométrique. Parmi les méthodes discrètes, une première classe est basée sur des schémas d'intégration déterministes, soumis à l'*aliasing*. Une seconde classe est purement aléatoire.

2. Lancer de rayons aléatoire

Parmi les méthodes stochastiques, la plus courante est le lancer de rayons aléatoire. En se basant sur la définition du facteur de vue, nous générons un grand nombre N_i de rayons qui quittent le carreau initial. Chaque rayon transporte une énergie que l'on peut considérer comme un paquet de photons. Si la surface origine est diffuse, les rayons doivent respecter la

loi en cosinus qui caractérise les facteurs de vue. La direction d'un rayon est obtenue à partir de deux nombres aléatoires uniformément distribués entre 0 et 1, notés ξ_1 et ξ_2 . Nous avons

$$\begin{cases} \theta = \arcsin(\sqrt{\xi_1}) \\ \varphi = 2\pi\xi_2 \end{cases} \quad (2)$$

où θ et φ désignent la latitude et la longitude de la direction du rayon projetée sur la demi-sphère sous-tendue par l'origine [1].

Nous comptons le nombre N_{ij} de rayons qui impactent le carreau P_j . Ce nombre représente l'énergie émise par P_i qui est interceptée par P_j . Le facteur de vue recherché est approché par

$$F_{ij} \approx \frac{N_{ij}}{N_i} \quad (3)$$

L'inconvénient du lancer de rayons aléatoire est sa faible convergence. La déviation standard d'un processus aléatoire est proportionnelle à $1/\sqrt{N_i}$ [2]. Cela signifie que si l'on multiplie le nombre de rayons par 4, l'erreur ne diminue que d'un facteur 2. Cette convergence peut être améliorée par l'utilisation de méthodes de lancer de rayons adaptées, telle que la méthode de l'hémisphère [3].

Un second inconvénient du lancer de rayons est la longueur du calcul de détection des éléments concernés par chaque rayon. Dans cet article, nous présentons une méthode qui permet de réduire le nombre d'éléments à tester pour chaque rayon, et par conséquent d'accélérer le processus des calculs.

3. Maillage éléments finis

La tendance actuelle est aux maillages finement discrétisés, ce qui implique un nombre élevé de mailles ou éléments finis. Ces maillages sont utilisés dans le but d'ajouter la composante conductive et d'être plus compatible avec les maillages utilisés en mécanique des structures.

L'utilisation d'une formulation éléments finis nous permettrait de lever l'hypothèse de carreaux isothermes, courante dans les logiciels de thermique spatiale, et d'obtenir des résultats plus précis. Cela nous permettrait également de générer les liens conductifs efficacement. Notons que certains logiciels utilisés dans le domaine spatial proposent déjà un calcul automatique des conductances sur la base d'éléments finis.

Un maillage éléments finis est constitué d'un nombre généralement élevé de triangles et/ou de quadrangles. Ceci implique un temps de calcul plus long pour le lancer de rayons. De plus, un maillage éléments finis est généralement basé sur une approximation paramétrique polynomiale qui permet d'approcher la courbure réelle des surfaces. Cela risque d'induire des erreurs dans le lancer de rayons en présence de surfaces spéculaires. La méthode présentée ici permet de respecter la géométrie réelle des surfaces.

4. Méthode paramétrique

Les surfaces implantées couramment dans les logiciels de thermique spatiale sont les plans et les quadriques. Pour ces surfaces, il existe des paramètres naturels, tels que la longitude et la latitude pour la sphère, qui permettent de générer des maillages structurés basés sur les lignes isoparamétriques de la géométrie [4]. Nous appelons ces mailles *cellules*.

La première étape de la méthode consiste à décomposer la surface en cellules suivant les courbes à paramètre constant.

La seconde étape consiste à associer le maillage éléments finis de la surface avec les cellules géométriques obtenues à l'étape précédente. Pour une cellule donnée, nous devons pouvoir identifier les mailles éléments finis qui la recouvrent complètement ou partiellement.

La troisième étape est une accélération du lancer de rayons. Chaque rayon est testé pour intersection avec la primitive géométrique. Si le test est positif, les coordonnées paramétriques $\{u, v\}$ du point d'impact sont calculées. Nous identifions ainsi la cellule géométrique impactée et testons les mailles éléments finis qui la recouvrent. Le nombre de mailles testées est ainsi fortement réduit.

5. Calcul des liaisons maillages – cellules

Les liaisons entre la géométrie et le maillage sont déterminées par la projection du maillage sur la surface géométrique et l'encadrement de cette projection par un contour de quatre lignes à paramètre constant appelé *enveloppe*. Ensuite, les cellules géométriques recouvertes par cette enveloppe sont identifiées. Enfin, ces relations sont inversées de manière à identifier les mailles éléments finis recouvertes par chaque cellule géométrique. Notons que ce calcul, relativement complexe, n'est réalisé qu'une fois en prétraitement. Il permet de transférer la difficulté du lancer de rayons vers le prétraitement et ainsi d'accélérer le lancer de rayons.

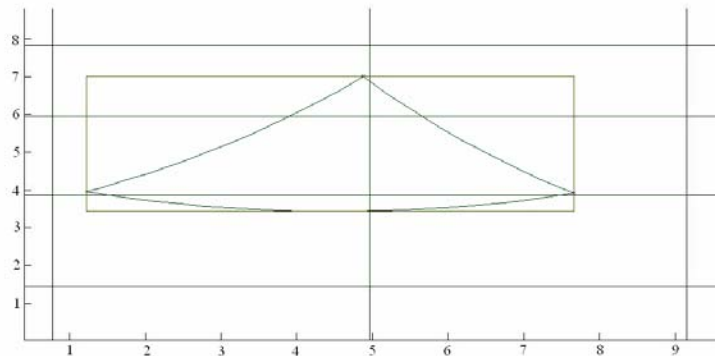


Figure 1 : Projection d'un élément fini triangulaire sur la sphère, en coordonnées $\{\theta, \phi\}$.

5.1. Projection sur la surface

Dans le cas de la sphère, les segments de droite des mailles polygonales sont projetés suivant des arcs de grands cercles (voir figure 1). De manière générale, la projection des mailles éléments finis fournit des courbes complexes dans l'espace paramétrique $\{u, v\}$.

5.2. Encadrement de la projection

Nous calculons ensuite la plus petite *enveloppe* encadrant la projection de chaque maille éléments finis. Dans l'espace paramétrique $\{u, v\}$, l'enveloppe est un rectangle limité par les valeurs $\{u_{\min}, u_{\max}, v_{\min}, v_{\max}\}$ de l'élément fini étudié. Comme nous pouvons le constater à la figure 1, un arc sphérique n'est pas forcément compris dans la plage de latitudes définies par ses extrémités.

5.3. Recouvrement des cellules géométriques et inversion des liaisons

Connaissant l'enveloppe d'un élément fini, nous pouvons déterminer simplement les cellules géométriques qui peuvent le recouvrir. Nous supposons qu'une cellule est recouverte par un élément fini si elle est recouverte par l'enveloppe de cet élément. Cette opération est répétée pour chaque élément du maillage.

Les relations précédentes sont ensuite inversées de manière à associer à chaque cellule géométrique les éléments finis qui la recouvrent.

6. Discussion

La méthode géométrique que nous avons décrite est la combinaison de deux processus d'accélération du lancer de rayons. La première accélération consiste à établir l'intersection du rayon avec la primitive géométrique. Si le test est négatif, le calcul est terminé sans examiner aucun des éléments finis. Cette méthode est similaire à l'accélération par volume englobant présentée dans la référence [5]. Si le test est positif, l'identification de la cellule impactée permet de réduire le nombre d'éléments à tester. Cette méthode est semblable à la méthode de décomposition spatiale uniforme (également présentée dans [5]) mais où le domaine décomposé est l'espace occupé par le modèle géométrique et non plus la surface elle-même.

Pour caractériser l'accélération fournie par notre méthode, nous avons considéré le cas d'une sphère centrée à la verticale d'une plaque carrée (voir le cas test de la figure 2). Nous avons étudié la variation du temps de calcul pour trois maillages de la sphère de différentes qualités (raffiné, normal, grossier). La subdivision M des cellules géométriques est identique dans les deux directions $\{u, v\}$. Pour une résolution unitaire, la primitive ne présente qu'une seule cellule qui contient tous les éléments du maillage. Pour chaque maillage, nous choisissons comme temps de référence le temps de calcul correspondant à une seule cellule. Nous divisons ensuite les temps de calcul obtenus pour chaque maillage par ce temps de référence. Le résultat est présenté à la figure 3. Nous pouvons constater que le gain en terme de temps de calcul augmente lorsque le maillage éléments finis est plus raffiné. De plus, le gain obtenu reste sensiblement constant pour des résolutions comprises entre 20 et 60. Au-delà, le temps de calcul commence à augmenter, le gain obtenu par le raffinement des cellules géométriques ne permettant plus de compenser la charge de calcul de ces cellules.

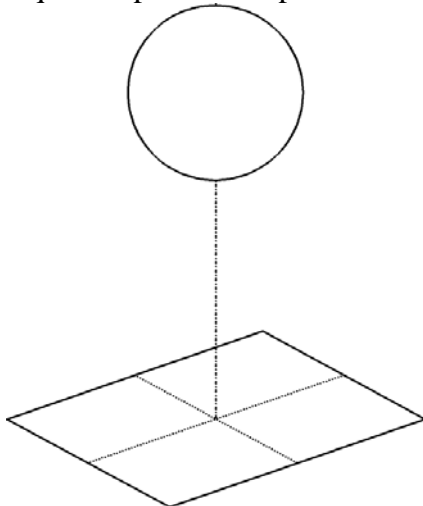


Figure 2 : Cas test – sphère centrée à la verticale d'une plaque carrée.

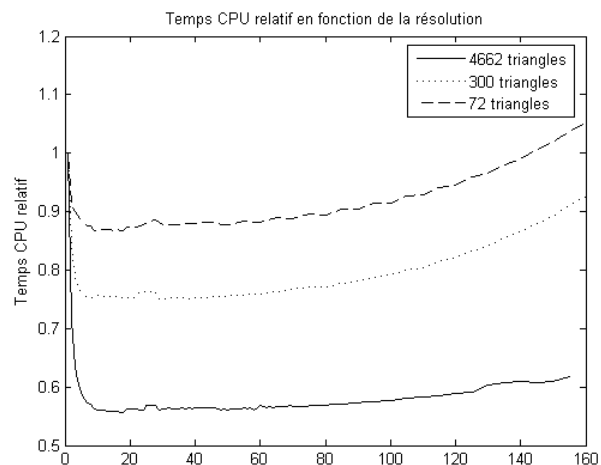


Figure 3 : Evolution du temps de calcul pour trois qualités de maillages en fonction de la résolution M dans une direction.

7. Application au cas d'un satellite

Pour valider notre méthode géométrique, notée GEOM, nous l'avons comparée au logiciel ESARAD¹. Nous avons modélisé un quart de l'intérieur d'un satellite, comprenant 12 primitives. Ce modèle comporte un réservoir, un cylindre et deux panneaux de renfort, un

¹ Le logiciel ESARAD est un produit d'ALSTOM Power Aerospace (www.aerospace.power.alstom.com).

boîtier d'électronique. Le modèle est maillé en 5 000 triangles. La base du satellite est fixée à 20°C, le réservoir est maintenu à 30°C. Les autres composants sont supposés adiabatiques. L'émissivité du réservoir est de 0.5 tandis que les autres surfaces ont une émissivité de 0.95. Seule la composante diffuse est étudiée dans ce problème. La figure 4 représente le maillage utilisé avec la méthode géométrique présentée dans cet article tandis que la figure 5 correspond au modèle géométrique, tel qu'il est défini sous ESARAD.

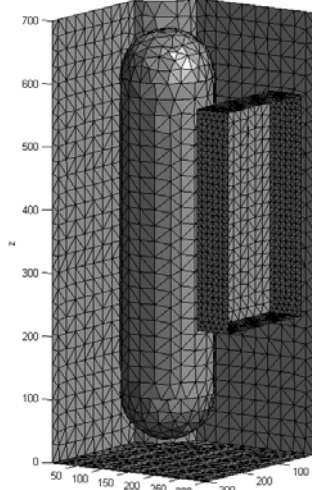


Figure 4 : Maillage du cas test.

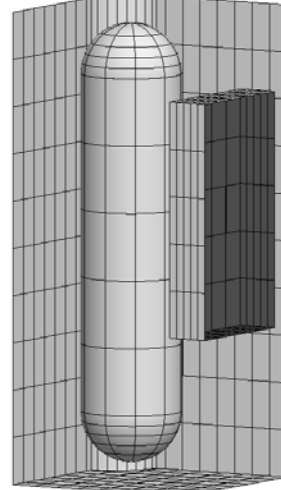


Figure 5 : Géométrie du cas test sous ESARAD.

Etant donné que les maillages sont différents, que les données en sortie des deux programmes ne sont pas comparables et qu'il n'existe pas de solution de référence pour cette configuration, le problème thermique a été résolu en considérant la composante radiative uniquement. Cela revient à calculer l'équilibre des rayonnements thermiques des différentes surfaces. La méthode géométrique a été comparée aux logiciels ESARAD-ESATAN® pour le cas test considéré (voir figure 5).

Dans ESARAD, nous calculons directement les facteurs de Gebhart par lancer de rayons. ESATAN® utilise ensuite la formulation de Gebhart pour calculer les températures des différentes surfaces du modèle. Dans la méthode présentée ici, nous calculons les facteurs de vue définis par l'équation (1), par lancer de rayons. Nous utilisons la formule (4) pour en déduire les facteurs de Gebhart B_{i-j} [7]. La formule (4) signifie que la fraction de l'énergie émise par une surface i qui est absorbée par une surface j est la somme de deux termes :

1. la composante directe de i vers j ;
2. la somme sur toutes les surfaces intermédiaires k visibles depuis i des flux réfléchis finalement absorbés par j .

$$B_{i-j} = \varepsilon_j F_{i-j} + \sum_k F_{i-k} \rho_k B_{k-j} \quad (4)$$

Enfin, nous appliquons la formulation de Gebhart.

$$Q_i = \varepsilon_i A_i \sigma T_i^4 - \sum_{j=1}^N B_{j-i} \varepsilon_j A_j \sigma T_j^4 \quad (5)$$

Cette formule exprime le flux en i comme la somme du flux radiatif émis par rayonnement propre, moins la somme des flux émis par les N surfaces du modèle qui interagissent avec i par l'intermédiaire du facteur de Gebhart B_{i-j} .

Les températures moyennes obtenues pour les différents composants sont listées au tableau 1. Nous avons considéré deux lancers de rayons par méthode pour nous assurer de la convergence de chacune des méthodes. ESARAD a été testé avec 30 000 et 200 000 rayons par surface tandis que notre méthode, notée GEOM, a été testée avec 1 875 et 30 000 rayons par surface. Notons qu'un nombre de rayons limité permet déjà d'obtenir de bons résultats

avec la méthode géométrique. Ceci est dû à la méthode de lancer de rayons utilisée, l'hémisphère [3], caractérisée par une convergence supérieure. Nous avons également calculé le flux radiatif émis par la base et le réservoir vers les autres surfaces du modèle géométrique.

	<i>ESARAD (30 000)</i>	<i>ESARAD (200 000)</i>	<i>GEOM (1 875)</i>	<i>GEOM (30 000)</i>
	<i>K</i>	<i>K</i>	<i>K</i>	<i>K</i>
Cylindre	265.4989	265.4793	265.2675	265.2979
Renforts plans	241.1936	241.1824	240.7697	240.7764
Boîtier	204.8285	204.8363	204.5388	204.5805
	<i>W</i>	<i>W</i>	<i>W</i>	<i>W</i>
Base	4.5883	4.5928	4.5997	4.5999
Réservoir	21.6406	21.6335	21.6233	21.6306

Tableau 1 : Températures moyennes et flux obtenus avec *ESARAD* et *GEOM*.

Nous pouvons remarquer sur ce cas test que la température du boîtier électronique est moins stable que celles des autres composants. Ceci est dû au fait que ce boîtier présente deux surfaces qui ont une faible interaction avec le modèle. Les facteurs de vue qui caractérisent ces deux surfaces sont plus faibles, ce qui augmente l'erreur associée au calcul de ces facteurs de vue par lancer de rayons [3, 6].

Les deux programmes fournissent les mêmes températures moyennes, ce qui semble vérifier l'efficacité de notre méthode. Pour des maillages constitués d'un même nombre d'éléments, pour un même nombre de rayons lancés, les temps de calcul de la méthode géométrique et d'*ESARAD* sont comparables.

8. Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté les bases d'une méthode permettant d'allier la géométrie au maillage éléments finis pour accélérer le lancer de rayons nécessaire aux calculs thermiques radiatifs. Cette méthode est une accélération du lancer de rayons et permet de réduire le temps de calcul des facteurs de vue. Comme nous conservons la géométrie réelle, nous pouvons calculer l'émission et la réflexion des rayons de manière exacte. La prochaine étape consistera à implanter cette méthode dans un logiciel éléments finis.

Références

- [1] R. Siegel, J. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, Taylor & Francis (2002).
- [2] P. Dutré, P. Bekaert, K. Bala, *Advanced Global Illumination*, A. K. Peters (2003).
- [3] P. Vueghs, H.-P. De Koning, O. Pin, P. Beckers, Random Hemisphere Method for Radiation Ray Tracing Computations, soumis à *5th European Thermal-Sciences Conference* (Eindhoven, mai 2008).
- [4] P. Beckers, *Infographie – CAO*, Université de Liège (2001).
- [5] A. Glassner, *An Introduction to Ray Tracing*, Morgan Kaufmann Publishers, Inc (2002).
- [6] P. Planas, Statistical Error Control for Radiative Software Based on Monte Carlo Methods, *Proceedings of the 23rd ICES Conference*, SAE Technical Paper 932258.
- [7] B. Gebhart, A New Method for Calculating Radiant Exchanges, *ASHRAE Transactions* (1959).

Remerciements

Nos remerciements vont au Fonds National de la Recherche Scientifique de Belgique (FNRS) qui subventionne ce projet. Nous remercions également l'Agence Spatiale Européenne pour son soutien à ce projet (contrat 20180/06/NL/PA). Enfin, nous remercions la société ALSTOM qui nous a fourni les logiciels *ESARAD-ESATAN*® gracieusement.