

Modélisation du transfert de chaleur dans un demi-échangeur

Waseem Al Hadad^{1*}, Yves Jannot¹, Denis Maillet¹

Université de Lorraine et CNRS, LEMTA, 2 avenue de la Forêt de Haye - TSA 60604
54518 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex

* (auteur correspondant : waseem.al-hadad@univ-lorraine.fr)

Résumé – Dans la modélisation du transfert thermique entre un fluide qui s'écoule dans un canal et ses parois, on néglige souvent le transfert axial dans ces dernières. Cela est justifié dans le cas d'un macro-canal tel que défini dans la classification usuelle proposée par Kandlikar et Grande en fonction du diamètre:

- Macro-canaux : $D_h > 3mm$
- Mini-canaux : $200\mu m < D_h \leq 3mm$
- Micro-canaux : $10\mu m < D_h \leq 200\mu m$

Ce travail présente un modèle semi-analytique permettant de simuler le transfert thermique permanent dans un mini-canal en 2D (ce que signifie que le transfert axial dans les parois est pris en considération). Ce modèle est basé sur une transformée intégrale (transformée de Fourier) et utilise l'approche quadripolaire. Le mini-canal étudié ici est un canal droit de section rectangulaire, composé de deux couches de solide et d'une couche de fluide. Les deux faces externes sont soumises à un échange convectif et radiatif (linéarisé) avec l'air ambiant. A la différence des travaux précédents, les sources ne sont pas situées sur les surfaces externes. Ici, le fluide entre dans le canal avec un profil de vitesse établi et une température supérieure à la température de l'air ambiant ($T_{in} > T_{\infty}$). Il s'agit donc de simuler un demi-échangeur où l'excitation thermique du système se fait à l'aide de la température d'entrée du fluide.

Nomenclature

a diffusivité thermique, $m^2 \cdot s^{-1}$
 e épaisseur, m
 h coefficient d'échange convectif, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
 L longueur virtuelle, m
 P_v source de chaleur volumique, $W \cdot m^{-3}$
 T température, K
 U vitesse moyenne, $m \cdot s^{-1}$
 u profil de vitesse, $m \cdot s^{-1}$
 \tilde{z} transformée de Fourier de vecteur z

Symboles grecs

α_n valeurs propres
 λ conductivité thermique, $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
 φ densité de flux, $W \cdot m^{-2}$
 ρ masse volumique, $kg \cdot m^{-3}$

Indices et exposants

1 face externe
2 interface fluide/solide
 c centre

1. Introduction

L'étude du transfert de chaleur dans un canal sans prendre en considération l'effet du transfert axial à travers les parois est largement traitée dans la littérature [1, 2]. Pour une raison de simplification (trouver une solution analytique), la plupart de ces travaux s'intéressent au problème de Graetz dans une gamme de nombre de Péclet donné (le nombre de Péclet est le produit du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl et physiquement représente le rapport entre les transferts par advection et diffusion dans un fluide). Ils s'appuient sur ce rapport pour quantifier le phénomène dominant. Par exemple, à faible nombre de Péclet, le terme d'advection dans l'équation de la chaleur peut être négligé devant le terme de diffusion. Dans ce cas le champ de température ne va pas pénétrer seulement en aval mais aussi en amont, ce qui exige de définir les conditions aux limites des parois en amont, ce qui est un peu délicat [3, 4]. L'hypothèse d'un transfert négligeable dans les parois, est acceptable pour un macro-canal dont l'épaisseur de la paroi est très petite devant le diamètre hydraulique du canal. Plus l'épaisseur de la paroi devient importante devant le diamètre hydraulique du canal (cas d'un mini ou micro-canal), moins le flux est normal à l'interface solide-fluide (surtout près de la région d'entrée). Dans ce cas la conduction dans la paroi joue un rôle important et doit être prise en considération [5]. L'utilisation des corrélations développées pour un macro-canal (corrélations donnant le nombre Nusselt, basées sur l'hypothèse de normalité du flux à l'interface fluide-solide) pour caractériser le transfert de chaleur dans un mini-canal, conduit souvent à des estimations erronées de coefficients de transfert de chaleur Morini [6].

L'objectif ce travail est de calculer le champ de température dans un système canal/parois, excité par une température de fluide en entrée supérieure à l'ambiante. Ce système peut être considéré comme un demi-échangeur et constitue un premier pas vers l'étude d'un échangeur à deux fluides à courant parallèles, ou vers le stockage puis l'extraction de la chaleur dans un massif. Nous allons donc utiliser un modèle semi-analytique basé sur une transformée intégrale (ici la transformée de Fourier). Ce modèle permet de simuler le transfert thermique entre un fluide qui circule dans un canal et les parois de ce canal, en prenant en considération les deux termes de l'équation de chaleur dans le fluide (diffusion-advection) et également la conduction dans les parois. Il a déjà été validé pour une excitation en puissance surfacique sur les parois externes de système [7, 8, 9, 10].

2. Le système étudié et sa modalisation

2.1. Le système étudié

On considère un écoulement de fluide laminaire dans un canal de longueur $2l$, de largeur w , d'épaisseur e_f , limité par deux plaques parallèles d'épaisseurs e_1 et e_2 (Figure 1). Cet écoulement est dynamiquement établi sur toute la longueur du canal et le profil de vitesse est parabolique (Poiseuille). Les deux couches solides (parois) sont caractérisées par leur

conductivité thermique λ_i , leur chaleur volumique ρc_i et leur diffusivité thermique $a_i = \lambda_i / \rho c_i$. La couche de fluide est caractérisée par sa conductivité thermique λ_f , sa chaleur volumique ρc_f , et sa diffusivité thermique $a_f = \lambda_f / \rho c_f$.

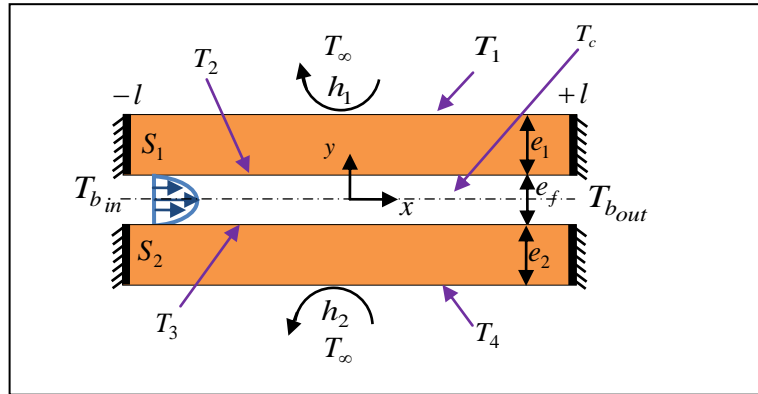


Figure 1 : *Ecoulement 2D de Poiseuille entre deux plaques planes.*

Le fluide entre dans le canal à température moyenne de mélange imposée $T_{b_{in}}$ (avec $T_{b_{in}} > T_{\infty}$) et il sort à $T_{b_{out}}$. Les faces externes échangent de la chaleur avec l'environnement à la température T_{∞} . Cet échange est caractérisé par un coefficient d'échange h uniforme (convection naturelle et rayonnement linéarisé).

2.2. Modèle analytique

L'équation de la chaleur dans les deux couches de solide (S_1 et S_2) en régime permanent en 2D (pour une profondeur w dans la 3^{ème} dimension suffisamment grande devant la longueur $2l$) s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

De façon générale, le transfert thermique en régime permanent dans la couche de fluide peut être représenté par une équation de diffusion-advection. Pour avoir l'excitation à l'entrée ($T_{b_{in}} > T_{\infty}$), nous avons ajouté un terme source volumique P_v avant l'entrée ($x < -l$). Pour cette raison on a supposé que la couche de fluide a une longueur virtuelle $2L$ supérieure à la longueur $2l$ représentée en figure 2. Pour que l'on retrouve l'équilibre thermique à $x = \pm L$, il faut que $L \gg |x_2|$:

$$\frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} - \left(\frac{u(y)}{a_f} \frac{\partial T_f}{\partial x} \right) + \frac{P_v(x)}{\lambda_f} = 0 \quad (2)$$

- Conditions aux limites axiales et transverses dans le solide :

$$\frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=\pm l} = 0 \quad (3)$$

$$\varphi_1 \left(x, y = -\frac{e_f}{2} - e_1 \right) \equiv -\lambda_s \frac{\partial T_1}{\partial y} = h_1 (T_1 - T_{\infty}) \quad (4)$$

$$\varphi_4 \left(x, y = \frac{e_f}{2} + e_2 \right) \equiv -\lambda_s \frac{\partial T_4}{\partial y} = h_2 (T_4 - T_{\infty}) \quad (5)$$

- Conditions à l'interface solide/fluide :

$$T_f \Big|_{(y=\mp \frac{e_f}{2})} = T_i \text{ et } -\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \Big|_{x,(y=\mp \frac{e_f}{2})} = -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \Big|_{x,(y=\mp \frac{e_f}{2})} \text{ avec } \begin{cases} i = 2 \text{ si } y = \frac{e_f}{2} \\ i = 3 \text{ si } y = -\frac{e_f}{2} \end{cases} \quad (6)$$

Ici on se place dans le cas particulier (problème symétrique) où les deux couches de solide (S_1 et S_2) ont les mêmes dimensions et les mêmes propriétés thermo-physiques et ($h_1 = h_2 = h$). Dans ce cas, les températures à l'interface solide-fluide et fluide-solide sont égales ($T_2 = T_3$) et il en est de même pour les températures sur les faces externes ($T_1 = T_4$), et la figure 1 peut être remplacée par la figure 2 :

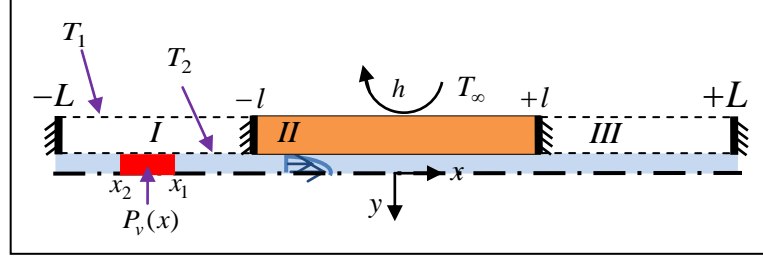


Figure 2 : Demi-canal avec une source volumique.

On commence par modéliser le transfert dans le solide dont les extrémités sont supposées isolées (en $x = -L, -l, +l, +L$). Dans ce cas la transformée de Fourier classique (forme exponentielle) n'est pas très adaptée pour transformer l'équation de la chaleur dans l'espace de Fourier : en particulier lorsque les températures ne sont pas les mêmes au niveau des extrémités, des termes sources apparaissent dans l'équation transformée qui devient une équation différentielle ordinaire (EDO) non-homogène. Ce terme inhomogène dépend de la température aux extrémités qui sont a priori inconnues. Pour obtenir une EDO homogène, nous devons trouver une fonction propre sur laquelle l'équation de la chaleur peut être projetée. Après séparation des variables et en utilisant les conditions aux limites dans la direction ox , la transformée de Fourier de l'écart de température ($\theta(x, y) = T(x, y) - T_\infty$), est donnée par:

$$\tilde{\theta}_n(y) = \int_0^{2l} \theta(x_s, y) \cos(\alpha_{s_n} x_s) dx_s \quad \text{avec} \quad \alpha_{s_n} = \frac{n\pi}{2l}, \quad x_s \in [0, 2l] \quad \text{et} \quad x_s = x + l \quad (7)$$

En appliquant la transformée de Fourier en cosinus (éq. 7) à l'équation de la chaleur dans le solide et en prenant en compte les conditions aux limites axiales (isolé-isolé), on obtient ;

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_{s_n}}{dy^2} - \alpha_{s_n}^2 \tilde{\theta}_{s_n} = 0 \quad (8)$$

Après avoir appliqué les conditions aux limites dans la direction oy , la solution de l'équation (8) peut être représentée sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_n \\ \tilde{\varphi}_n \end{bmatrix}_1^{\cos} = S_{n_1} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_n \\ \tilde{\varphi}_n \end{bmatrix}_2^{\cos} \quad (9)$$

Avec $S_{n_1} = \begin{bmatrix} A_{s_n} & B_{s_n} \\ C_{s_n} & A_{s_n} \end{bmatrix}$, $A_{s_n} = ch(\alpha_{s_n} e_s)$, $B_{s_n} = \frac{1}{\lambda_s \alpha_{s_n}} sh(\alpha_{s_n} e_s)$ et $C_{s_n} = \lambda_s \alpha_{s_n} sh(\alpha_{s_n} e_s)$

Pour le fluide, nous ne pouvons pas trouver de fonction propre, parce que l'équation de la chaleur dans le fluide est non-réciproque (à cause du terme advectif). Donc, pour éviter l'apparition du terme non-homogène, nous allons utiliser la transformée de Fourier classique (exponentielle) et nous supposons que la couche de fluide a une longueur supérieure à la longueur du solide ($L \gg l$, et plus précisément $L \gg |x_2|$) pour assurer la périodicité ($T_{f-L} = T_{f+L} = T_\infty$). Physiquement le fluide hors de la zone solide doit continuer à échanger avec un autre médium, c'est pourquoi nous ajoutons deux couches solides (I et III) de longueurs ($L - l$) en série avec le solide (II) comme indiqué sur la figure 2. Les conditions aux limites axiales dans le fluide peuvent être écrites :

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial x} \right|_{x=\pm L} = 0, \quad T_f|_{x=\pm L} = T_\infty \quad \text{avec} \quad L \gg l \quad (10)$$

La transformée de Fourier classique dans la direction axiale sur $[-L; +L]$ s'écrit :

$$\tilde{\theta}_{f_n}(y) = \int_{-L}^{+L} \theta_f(x, y) e^{-i\alpha_{f_n} x} dx \quad \text{avec} \quad \alpha_{f_n} = \frac{n\pi}{L} \quad (11)$$

L'équation de chaleur dans le fluide dans l'espace de Fourier s'écrit :

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_{f_n}}{dy^2} - \left(\alpha_{f_n}^2 + i\alpha_{f_n} \frac{u(y)}{a_f} \right) \tilde{\theta}_{f_n} + \frac{\tilde{P}_v}{\lambda_f} = 0 \quad (12)$$

Où \tilde{P}_v est le spectre du terme source volumique $P_v(x)$, ici présenté par une fonction créneau : $P_v(x) = P[H(x - x_2) - H(x - x_1)]$. H est la fonction Heaviside et P est en (W/m^3) .

On voit que le coefficient du deuxième terme de l'équation 12 dépend de y (à cause de la vitesse $u(y)$). Pour avoir une solution analytique, on divise la couche de fluide d'épaisseur e_f en plusieurs sous-couches d'épaisseurs $e_k = y_{k+1} - y_k = e_f/K$, où K est nombre de sous-couches. La vitesse dans chaque sous-couche u_k peut être considérée comme uniforme [7] (Figure 3).

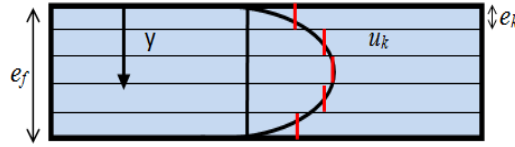


Figure 3 : Discretisation de la couche fluide en K sous couches

La vitesse exacte et paramétrée dans chaque sous-couche s'écrit:

$$u(y) = 6U \left\{ \frac{y}{e_f} - \left(\frac{y}{e_f} \right)^2 \right\}, \quad u_k = \frac{6U}{e_k} \left\{ \frac{y_{k+1}^2 - y_k^2}{2e_f} - \frac{y_{k+1}^3 - y_k^3}{3e_f^2} \right\} \quad (13, 14)$$

Remplaçons (14) en (12), on obtient :

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_{k_n}}{dy^2} - \gamma_{k_n}^2 \tilde{\theta}_{k_n} + \frac{\tilde{P}_v}{\lambda_f} = 0 \quad \text{avec} \quad \gamma_{k_n}^2 = \left(\alpha_{f_n}^2 + i\alpha_{f_n} \frac{u_k}{a_f} \right) \quad (15)$$

Où U est la vitesse moyenne. Finalement la solution analytique (quadripolaire) de l'équation 15 pour chaque sous-couche k , peut être écrite comme :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_n \\ \tilde{\varphi}_n \end{bmatrix}_k^{exp} = \mathbf{F}_{k_n} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_n \\ \tilde{\varphi}_n \end{bmatrix}_{k+1}^{exp} - \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}_k^{exp} \quad (16)$$

Où $\mathbf{F}_{k_n} = \begin{bmatrix} A_{k_n} & B_{k_n} \\ C_{k_n} & A_{k_n} \end{bmatrix}$, $A_{k_n} = ch(\gamma_{k_n} e_k)$, $B_{k_n} = \frac{1}{\lambda_f \gamma_{k_n}} sh(\gamma_{k_n} e_k)$ et $C_{k_n} = \lambda_f \gamma_{k_n} sh(\gamma_{k_n} e_k)$

Et le terme source $\begin{cases} X_{k_n} = \frac{\tilde{P}_{v_n}}{\gamma_{k_n}^2 \lambda_f} \{ ch(\gamma_{k_n} e_k) - 1 \} \\ Y_{k_n} = \frac{\tilde{P}_{v_n}}{\gamma_{k_n}} sh(\gamma_{k_n} e_k) \end{cases}$

Pour la couche de fluide qui est constituée de K sous-couches, la relation entre le vecteur température-flux à l'interface fluide/solide (indice 2 voir figure 2) et le vecteur de température-flux au centre du canal (indice c), peut être exprimée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_n \\ \tilde{\varphi}_n \end{bmatrix}_2^{exp} = \prod_{k=1}^{\frac{K}{2}} \mathbf{F}_{k_n} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_n \\ 0 \end{bmatrix}_c^{exp} - \prod_{k=1}^{\frac{K}{2}-1} \mathbf{F}_{k_n} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}_{(\frac{K}{2})}^{exp} - \prod_{k=1}^{\frac{K}{2}-2} \mathbf{F}_{k_n} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}_{(\frac{K}{2}-1)}^{exp} - \dots - \mathbf{F}_{1_n} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}_2^{exp} - \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}_1^{exp} \quad (17)$$

Jusqu'à maintenant nous avons résolu l'équation de chaleur dans le solide et dans le fluide séparément. Les équations 9 et 17 ont été écrites harmonique par harmonique, ces formules peuvent être écrites pour tous les harmoniques:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}_1^{cos} = S_1 \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}_2^{cos} \quad \text{avec} \quad \tilde{\psi} = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_I \\ \tilde{\psi}_{II} \\ \tilde{\psi}_{III} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \psi = \theta \text{ ou } \varphi \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}_2^{exp} = F \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_c^{exp} - \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{\frac{K}{2}-1} F_k \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_{(\frac{K}{2})}^{exp} + \prod_{k=1}^{\frac{K}{2}-2} F_k \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_{(\frac{K}{2}-1)}^{exp} + \dots + F_1 \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_2^{exp} + \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_1^{exp} \quad (19)$$

Le vecteur de température ou flux peut être écrit en fonction de son vecteur spectre comme $\theta_1 = G_{cos} \tilde{\theta}_1^{cos}$ et $\theta_c = G_{exp} \tilde{\theta}_c^{exp}$, l'indice (*cos* ou *exp*) indiquant que le spectre est calculé à partir d'une transformée de Fourier cosinus ou en exponentielle respectivement.

Pour compléter, il faut faire le couplage de modes entre les deux milieux. Enfin la forme quadripolaire (pour toutes les harmoniques) de l'ensemble peut être écrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_1^{cos} = H S_1 E_1 F \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_c^{exp} - H S_1 E_1 \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad F = \prod_{k=1}^{\frac{K}{2}} F_k \quad (20)$$

$$\text{où } H = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ hI & I \end{bmatrix}; S_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & A_1 \end{bmatrix}; E_1 = \begin{bmatrix} G_{cos}^{-1} G_{exp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & G_{cos}^{-1} G_{exp} \end{bmatrix}; F_k = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & A_k \end{bmatrix} \text{ et } G_{cos} = \begin{bmatrix} G_{cos}^I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & G_{cos}^{II} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G_{cos}^{III} \end{bmatrix}$$

A partir du système d'équations (20), les profils de température et de flux peuvent être calculés:

$$\tilde{\theta}_c^{exp} = (MF)_{i.g}^{-1} M_i \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} \quad \text{où } M = H S_1 E_1; \quad (21)$$

$$\tilde{\theta}_1^{cos} = (MF)_{s.g} (MF)_{i.g}^{-1} M_i \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} - M_s \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\tilde{\theta}_2^{cos} = (H S_1)_{s.g}^{-1} (MF)_{s.g} (MF)_{i.g}^{-1} M_i \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} - (H S_1)_{s.g}^{-1} M_s \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\tilde{\varphi}_1^{cos} = h(MF)_{s.g} (MF)_{i.g}^{-1} M_i \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} - h M_s \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\tilde{\varphi}_2^{cos} = (H S_1)_{i.g}^{-1} (MF)_{s.g} (MF)_{i.g}^{-1} M_i \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} - (H S_1)_{i.g}^{-1} M_s \begin{pmatrix} X_f \\ Y_f \end{pmatrix} \quad (25)$$

Les indices *i*, *s* et *g* sont les sous matrices inférieure, supérieure et gauche de la matrice correspondante. Pour obtenir les profils de température, il suffit d'appliquer la transformée de Fourier inverse.

3. Résultats de simulation :

Une simulation utilisant le modèle quadripolaire a été réalisée pour la configuration montrée dans la section 2, le fluide considéré ici étant de l'eau et les parois étant en polycarbonate. Ce résultat sera vérifié par une simulation à l'aide du Code de calcul par éléments finis COMSOL. Les valeurs des paramètres utilisés dans nos simulations sont données dans le tableau 1.

$e_1 = e_2 = 2e_f$ (mm)	$2l$ (cm)	h ($W.m^{-2}.K^{-1}$)	P ($W.m^{-3}$)	T_∞ (K)	U ($mm.s^{-1}$)	α_f ($m^2.s^{-1}$)	λ_f ($W.m^{-1}.K$)	λ_s ($W.m^{-1}.K$)
2	6	10	1.5×10^6	20	1	15.1×10^{-8}	0.63	0.215

Tableau 1 : Paramètres de simulation

Le nombre de Péclet correspondant est de l'ordre de 14. Cela signifie que le transfert par advection dans le fluide joue un rôle important mais que le transfert par conduction n'est pas négligeable. Une étude de sensibilité par rapport au nombre de sous-couches K a montré que les températures ne sont pas très sensibles à K . On montre sur les figures 4 et 5, les profils de température et de flux respectivement. Les profils sont présentés sur l'intervalle $[-l + l]$. Sur la figure 4, on note qu'il y a une très bonne corrélation entre les profils de température simulés par modèle semi-analytique (quadripôle) avec ceux simulés par logiciel COMSOL. Les paramètres de simulation pour le modèle semi-analytique sont : $K = 6$, $(L - l) = 0.8 \text{ m}$, $(N_{hs1} + N_{hs2} + N_{hs3}) = N_{hf}/2 = 2077$, $(N_{xs1} + N_{xs2} + N_{xs3}) = 4150$ avec $N_{xs2} = 150$, $N_{xs2} = N_{xs3}$, $x_1 = -0.4\text{m}$ et $x_2 = -0.45\text{m}$ où N_h est le nombre d'harmonique et N_x le nombre de points en x .

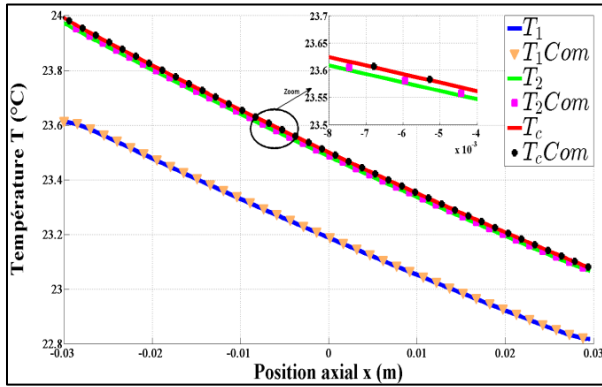


Figure 4 : Profils de température obtenus par le modèle quadripolaire et par Comsol

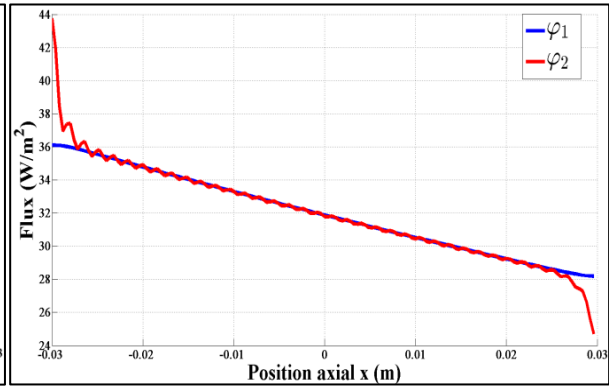


Figure 5 : Profils de flux obtenus par le modèle quadripolaire

Une fois le profil de température à l'interface (T_2) obtenu, le profil de température à chaque sous-couche peut être calculé par l'équation (16) après mise sous la forme vectorielle (toutes les harmoniques). A partir de la température aux interfaces de chaque sous-couche, la température moyenne de mélange (Figure 6) est calculée par :

$$\theta_b(x) = \frac{2}{UK} \sum_{k=1}^{K/2} u_k \bar{\theta}_k(x) \text{ avec } \bar{\theta}_k(x) = \frac{1}{2} (\theta(x, e_k) + \theta(x, e_{k-1})) \quad (26)$$

Le coefficient d'échange convectif sur la face interne (figure 7), peut être calculé facilement comme :

$$h(x) = \frac{\varphi_2(x)}{(T_b(x) - T_2(x))} \quad (27)$$

Nous n'avons pas trouvé dans la littérature de corrélations donnant le nombre de Nusselt interne en fonction de nombre de Re et Pr correspondant à une excitation du système par un débit d'entrée à une température supérieure à la température ambiante. Les corrélations habituelles portant sur un régime dynamiquement et thermiquement établis dans cette géométrie correspondent à un nombre de Nusselt d'environ 4, alors que nos simulations permettent de trouver un nombre de Nusselt établi d'environ 30 ($h = 10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{K}^{-1}$ voir Figure 7).

L'efficacité de demi-échangeur peut être calculée :

$$\eta = \frac{T_{bin} - T_{bout}}{T_{bin} - T_{\infty}} \quad (28)$$

Après calcul on trouve que 23% de la chaleur est évacuée par les faces latérales.

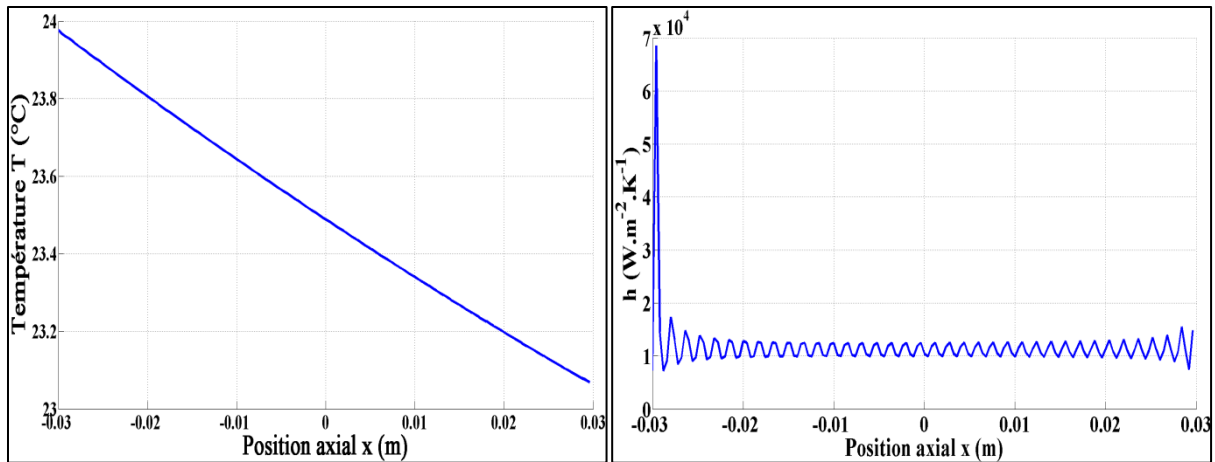


Figure 6 : Profils de température moyenne de mélange Figure 7 : coefficient d'échange convectif.

4. Conclusion

Un modèle semi-analytique permettant de simuler le transfert de chaleur dans un mini-canal plan d'épaisseur e_f soumis à une excitation (à température moyenne de mélange imposé) à l'entrée du fluide, a été présenté. Une des perspectives de ce travail est de généraliser ce modèle pour simuler le transfert thermique dans un mini échangeur (co-courant ou contre courant) en intégrant le transfert dans les parois en régime non seulement permanent mais aussi transitoire.

5. Références

- [1] E. Papoutsakis, D. Ramkrishna, H.C. Lim, The extended Graetz problem with with Prescribed Wall Flux, *AIChE Journal*, 26, pp. 779-787 (1980).
- [2] M. A. Ebadian, H. Y. Zhang, An exact solution of extended Graetz problem with axial heat conduction, *Int. J. Heat Mass Tranf.*, 32, pp. 1709-1717, (1989).
- [3] B. Vick, M. N. Gzizik, Y. Bayazitoglu, "A method of analysis of low Peclet number thermal entry region problems with axial conduction", *Lett. Heat Mass Transfer* 7, pp.235-248 (1980).
- [4] C. J. Hsu, "Theoretical solutions for low-Peclet-number-thermal- entry-region heat transfer in laminar flow through concentric annuli", *Int. J. Heat Mass Transfer* 13, pp.1907-1924 (1970).
- [5] G. Maranzana, I. Perry, D. Maillet, Mini and micro-channels: influence of axial conduction in the wall, *Int. J. Heat Mass Tranf.*, 47, pp. 3993-4004 (2004).
- [6] G. L. Morini, «Single-phase convective heat transfer in microchannels: a review of experimental results,» *Int. J. Thermal Sciences*, vol. 43, p. 631–651, (2004).
- [7] I. Perry, Y. Jannot, D. Maillet, B. Fiers, Effect of velocity distribution on external wall temperature field for a flat microchannel, *Experimental Heat Transfer*, 23, pp.27-43, (2009).
- [8] Y. Rouizi, D. Maillet, Y. Jannot, Fluid temperature distribution inside a flat minichannel: semi-analytical wall transfer functions instead of h coefficient and estimation from temperatures on external faces, *Int. J. Heat Mass Tranf.*, 64, pp. 331–342, (2013).
- [9] W. Al Hadad, Y. Rouizi, Y. Jannot, B. Rémy, D. Maillet, Estimation of the heat transferred to a fluid in a minichannel by an inverse technique, 15th International Heat Transfer Conference, August 10-15, Kyoto, (january 2014).
- [10] Y. Rouizi, W. Al Hadad, D. Maillet, Y. Jannot, Experimental assessment of the fluid bulk temperature profile in a mini channel through inversion of external surface temperature, *Int. J. Heat Mass Transfer* 83, pp.522-535 (2015).