

# Mise en évidence expérimentale de la bifurcation super-critique dans l'instabilité Rayleigh-Bénard pour les fluides à seuil.

Zineddine KEBICHE, Teodor BURGHELEA, Cathy CASTELAIN\*

Laboratoire de Thermocinétique de Nantes, LTN UMR CNRS 6607

Polytech, La Chantrerie, rue Christian Pauc 44306 Nantes, cedex03

\*(auteur correspondant : [cathy.castelain@univ-nantes.fr](mailto:cathy.castelain@univ-nantes.fr))

**Résumé** : Les travaux portent sur l'étude expérimentale de la convection de Rayleigh-Bénard dans le cas d'un fluide à seuil (Carbopol 980). Pour différentes puissances de chauffe  $P$ , en combinant les mesures des différences de température entre les deux plans horizontaux parallèles, et la mesure locale du champ de vitesse au sein du fluide (par DPIV), deux régimes distincts ont été observés. Pour des puissances de chauffe inférieures à une valeur critique  $P_c$ , un régime de conduction pure est observé. Une augmentation progressive de la puissance de chauffe au-delà de ce seuil révèle l'apparition d'un régime convectif qui se manifeste par une dépendance non linéaire, avec la puissance de chauffe, de la différence de température entre les plaques. En parallèle de cette observation, les mesures locales du champ de vitesse montrent une augmentation non linéaire de l'amplitude des cellules. Indépendamment de la concentration en Carbopol, la convection de Rayleigh-Bénard dans le Carbopol apparaît comme une bifurcation imparfaite qui peut être modélisée par la théorie de Landau des transitions de phase. Les résultats obtenus dans cette étude sont au final comparés à ceux existant dans la littérature.

## Nomenclature

$H$	distance entre les plaques, $m$	$t_c^m$	temps de ralentissement critique moyen
$P$	puissance, $Watt$	$\nu$	viscosité cinématique, $m.s^{-2}$
$t$	temps, $s$	$\tau$	contrainte, $Pa$
$T$	température, $K$	$\kappa$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
$V$	vitesse, $m.s^{-1}$	$\tau_y$	contrainte seuil, $Pa$
$Ra$	nombre de Rayleigh	$Y$	nombre seuil
$\alpha$	coefficient de dilatation thermique, $K^{-1}$	$\dot{\gamma}$	gradient de vitesse, $s^{-1}$
$t_c$	temps de ralentissement critique, $s$		
$t_d$	temps de diffusion thermique, $s$		

## 1. Introduction

L'instabilité thermo-convective de Rayleigh-Bénard apparaît si une couche de fluide confinée horizontalement, chauffée par le bas et refroidie par le haut, est soumise au champ de gravité. Un gradient vertical de densité est alors créé. Une telle situation correspond à un équilibre de forces qui peut être stable ou instable. Si on introduit une perturbation, elle sera dissipée ou provoquera une évolution du système vers un autre état. La situation du fluide au repos est appelée état de conduction. L'équilibre entre les facteurs stabilisant et déstabilisant dans cette situation est décrit par le nombre de Rayleigh

$$Ra = \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot g \cdot H^3}{k \cdot \vartheta} \quad (1)$$

Avec  $Ra =$  Poussée d'Archimède / (Force visqueuse  $\times$  Diffusion thermique).

Où  $H$  est l'épaisseur de la couche du fluide,  $\kappa$  sa diffusivité thermique,  $\nu$  sa viscosité cinématique,  $\alpha$  le coefficient d'expansion thermique,  $\Delta T$  la différence de températures entre les plaques et  $g$  l'accélération gravitationnelle. Dans le cas d'un liquide viscoplastique, l'apparition de la convection de Rayleigh-Bénard coïncide avec le début de la transition solide-liquide, et les contraintes visqueuses sont infinies proche du seuil. Cela suggère que, dans le cas d'un fluide viscoplastique, la condition de déclenchement devrait être reconsidérée. A cet effet, le critère de l'équilibre des forces peut être modifié en considérant que la convection thermique est déclenchée lorsque les contraintes associées à la poussée surmontent la contrainte seuil du gel et en remplaçant de l'échelle de temps visqueuse par une échelle de temps caractéristique associée à la microstructure du gel ( $t_g$ )

$$Ra = \frac{\rho \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot g \cdot H}{\tau_y} \cdot \frac{t_d}{t_g} \geq Ra_c \quad (2)$$

$t_d = H^2/k$  est l'échelle de temps caractéristique associée à la diffusion thermique et  $t_g$  est une échelle de temps caractéristique associée à la microstructure de gel à proximité de l'apparition de la convection (à savoir à proximité de la contrainte seuil). Comme la contrainte seuil a été considérée comme une échelle pour les contraintes, la définition ci-dessus est valable uniquement autour de l'apparition de l'instabilité qui coïncide avec le début de la transition solide-liquide. Bien au-delà de la zone de déclenchement de l'instabilité, le nombre de Rayleigh devra être ré-écrit avec la viscosité de rhéofluidification. D'un point de vue phénoménologique et en suivant les idées de base du théorème de la balance d'énergie, au départ introduit par *Chandrasekhar* (voir Ref. [1]), on peut également envisager que la convection thermique dans le fluide à seuil est initiée lorsque l'énergie dissipée par unité de volume de matière par les forces de poussée devient comparable en amplitude à l'énergie élastique maximale que le réseau de gel peut stocker localement par unité de volume avant l'écoulement  $W_b \geq W_e$ . ici  $W_e = \rho g \beta \Delta T$  est l'énergie dissipée par unité de volume par les forces de poussée et  $W_e = \tau_y$  est l'énergie élastique par unité de volume. Avec ces considérations, le critère énergétique de l'instabilité convective pour un fluide à seuil peut être formulée au travers du nombre  $Y$  (nombre seuil):

$$Y = \frac{\tau_y}{\rho \beta g H \Delta T} \leq Y_c \quad (3)$$

## 2 Dispositif expérimental et méthodes de mesures

### 2.1. Choix, préparation et la caractérisation rhéologique du fluide viscoplastique

Le dispositif expérimental a été réalisé complètement au sein du laboratoire. Il est représenté sur la figure 1. Il est constitué essentiellement d'une cavité contenant le fluide de dimensions intérieures 386 mm×186 mm×20 mm. (pour plus de détails sur le dispositif et les techniques de mesures voir ref [2])

Avant chaque lecture de températures, les séries temporelles de la différence de température  $\Delta T$  sont enregistrées pour des périodes prolongées (jusqu'à 18 heures, voir figure 2(b)). Avant d'atteindre l'état d'équilibre stationnaire, deux états transitoires peuvent être observés dans la série temporelle de la différence de température  $\Delta T$ . Le premier régime transitoire observé avant d'atteindre une température  $\Delta T_{\max}$  est de nature conductive et peut être interpolé par l'équation (4) (voir la ligne pleine dans la figure. 2 (b)),  $t_d$  est le temps de diffusion thermique défini dans l'introduction. Si l'on utilise la diffusivité thermique figurant dans le tableau 1 pour les solutions de Carbopol utilisées dans nos expériences, le temps de diffusion thermique peut être estimé égal à  $t_d = 2730$  s. La dépendance du temps de diffusion

avec la puissance de chauffe  $P$  pour les deux états (symboles pleins en augmentant la puissance et symboles vides en diminuant la puissance)

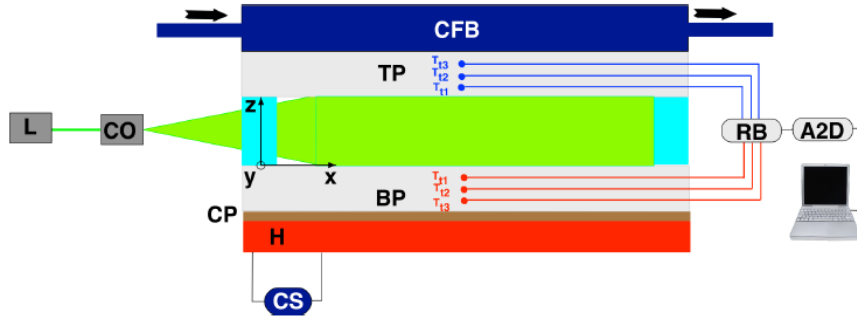


Figure 1: Vue schématique du dispositif expérimental, L - laser, CO - bloc cylindrique de l'optique, CP - plaque de cuivre, TP - plaque supérieure, BP - plaque inférieure, BFC - bain de refroidissement liquide, A2D – convertisseur de signal analogique numérique, RB - Boîte de référence

$$\Delta T = \Delta T_{\max} \left[ 1 - e^{-\frac{t_0 - t}{t_d}} \right] \quad (4)$$

pour trois concentrations de Carbopol distinctes figurent dans l'insert de la figure 2 (b). L'invariance de  $t_d$  avec la concentration de Carbopol est compatible avec l'indépendance de la conductivité thermique avec la concentration du polymère, (voir Tableau 1). Les valeurs mesurées du temps de diffusion sont comparables à l'estimation théorique, tout en étant légèrement plus grandes. La seconde transitoire observée après le maximum de la série temporelle de la différence de température est dans le régime de convection et peut être décrit par la théorie de Landau (voir par exemple le livre de Chandrasekar Pour plus de détails, [1]) (ligne en traits pointillés sur la figure 4 (b)).

$$\Delta T = \Delta T_{\infty} + De^{-\frac{2t}{t_c}} \quad (5)$$

Où  $\Delta T_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty}$  est la valeur stationnaire de la différence de température. Le temps caractéristique  $t_c$  gouverne la formation des rouleaux convectifs et reflète la dynamique non linéaire du système à proximité du seuil de l'instabilité convective dans le cadre de la théorie de Landau.

Pour chaque valeur de la puissance de chauffe  $P$ , la différence de température  $\Delta T$  est enregistrée uniquement après des périodes de temps suffisamment longues  $t > t_d + t_c$  lorsque tous les phénomènes transitoires ont disparu et que le signal atteint un état d'équilibre.

## 2.2. Observation et caractérisation de la convection de Rayleigh-Bénard dans divers gels de Carbopol

Après la validation systématique du dispositif expérimental et des techniques de mesure [2], nous avons réalisé des campagnes d'essais avec diverses solutions de Carbopol 980 avec des concentrations en poids comprises entre 0,05% et 0,11%. Les concentrations de polymères choisis se situent toutes au-dessus de la concentration critique  $c^*$  qui assurent que nos fluides de travail présentent tous un seuil et pas seulement un comportement rhéofluidifiant.

La transition vers les états convectifs au sein de diverses concentrations de Carbopol 980 est simultanément évaluée par des mesures locales de vitesse par la technique DPIV et des mesures intégrales de la différence de température entre les plaques ( $\Delta T$ ). Pour chaque valeur de la concentration en Carbopol, si la différence de température entre les plaques ne dépasse pas une valeur critique,  $\Delta T < \Delta T_c$  il n'y a pas apparition de convection. Comme l'écart de

température est augmenté après cette apparition, l'énergie dissipée par unité de volume de matière par les forces de poussée surmonte l'énergie élastique associée à la microstructure d'un gel, par conséquent, le gel s'écoule au niveau local et les rouleaux de convection sont observés.

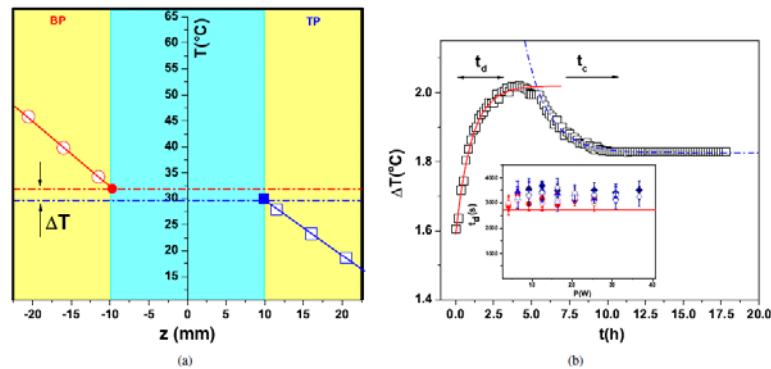


Figure 2: (a) Mesures de température au sein de la plaque inférieure BP (cercles vides) et dans la plaque supérieure TP (carrés vides). Symboles pleins : Extrapolations linéaires de la mesure de la température à la paroi. (b) Séries temporelles de gradient de température  $\Delta T$ . Trait plein : ajustement non linéaire par l'équation 4. Trait pointillé : ajustement en fonction de l'équation 5.

Les structures convectives sont observées en l'absence d'une perturbation externe d'une amplitude finie. La comparaison des cellules dans le cas des fluides viscoplastiques avec celles dans les fluides newtoniens observées avec une solution de glycérine est présentée sur la Figure 3.

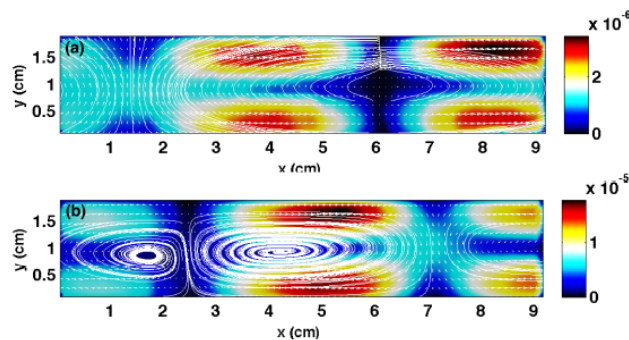


Figure 3: Structure de l'écoulement pour: (a) une solution de glycérine (b) du Carbopol ( $c = 0,075\%$ ). La carte en fausses couleurs fait référence à la valeur absolue de la vitesse d'écoulement et les traits pleins sont les isovaleurs de vitesse.

Dans le cas d'une solution de Carbopol, une caractéristique intéressante du champ d'écoulement peut être observée proche des plaques supérieure/inférieure : les rouleaux de convection sont pratiquement plats près des parois et les lignes de courant présentent une courbure presque nulle le long du rouleau de convection. Cette différence de forme avec le cas newtonien peut être liée à des différences topologiques et structurelles significatives du champ de vitesse dans les couches limites (le Carbopol peut aussi glisser au niveau des parois).

L'évolution des rouleaux de convection en fonction du paramètre de contrôle est illustrée sur la figure 4 pour une solution de Carbopol 980 ( $c = 0,08\%$ ). Juste au-dessus du seuil de la convection ( $\Delta T = 3.18^\circ\text{C}$ ), la structure de l'écoulement présente un aspect légèrement asymétrique. Cela peut être dû à la grande valeur du temps caractéristique  $t_c$  nécessaire pour atteindre un état d'équilibre. Lors d'une augmentation du gradient de température, les rouleaux de convection deviennent plus réguliers. Il est important de noter que les états de convection sont réversibles lors d'une augmentation/diminution de la puissance de chauffage. Ceci est un

premier indicateur que, comme dans le cas newtonien, la transition vers la convection de Rayleigh-Bénard pour cette concentration en Carbopol est continue et ne présente pas d'hystérésis. Cette similitude qualitative de la transition vers les états convectifs comme avec les fluides newtoniens mérite d'être étudiée en profondeur.

Il est également intéressant de noter que pour les champs d'écoulement présentés sur la figure 4, la taille des rouleaux est reproductible lors d'une augmentation / diminution du flux de chaleur, ce qui renforce encore le fait que la transition vers les états convectifs dans les gels de Carbopol étudiés est supercritique.

Des mesures intégrales de la dépendance du gradient de température  $\Delta T$  entre les plaques, pour six valeurs de concentrations de Carbopol, avec une augmentation puis une diminution de la puissance de chauffe (symboles pleins/vides) sont présentées sur la figure 5. Pour chaque valeur de concentration du Carbopol, une zone linéaire conductive est observée sous une puissance de chauffage critique  $P_c$ . Les pentes de ces dépendances linéaires sont indépendantes de la concentration en polymère (voir ligne pleine de la figure 5) indiquant que l'ajout de polymère ne modifie pas sensiblement la conductibilité thermique des solutions aqueuses. Ce résultat est en bon accord avec les mesures directes du coefficient de conductivité thermique effectuées pour chaque solution séparément et présentés dans le tableau 1.

Au-dessus la puissance critique  $P_c$ , la dépendance du gradient de température entre les plaques en fonction de la puissance de chauffage devient non-linéaire et un régime de convection est observé. Quelle que soit la contrainte seuil de la solution de Carbopol, le passage d'un régime conductif à un régime de convection est réversible à l'augmentation / diminution de la puissance de chauffage et il existe une forte similitude qualitative de ces mesures intégrales avec des mesures semblables réalisées avec un fluide newtonien.

Pour avoir une idée plus précise de la nature de la bifurcation vers les états de convection dans le Carbopol, nous présentons les mêmes données en termes de variables réduites  $\Delta T_r$ ,  $P_r$ . La dépendance de la température réduite sur le paramètre  $P_r$  de contrôle pour chaque concentration de Carbopol est présentée sur la figure. 6 (a). Au-dessus du seuil de la bifurcation, la température réduite varie de façon linéaire avec le paramètre de contrôle et ceci est un comportement, comme dans le cas newtonien, typique pour une bifurcation supercritique. Cette conclusion est d'une importance fondamentale sur la nature de la bifurcation et est renforcée par les mesures locales de l'amplitude de vitesse de convection  $V$  présentée sur la figure. 6 (b). En effet, au-dessus de l'apparition de la bifurcation, les données d'amplitude peuvent être ainsi représentées par la prédiction de Landau pour une bifurcation supercritique.

La figure 7 présente l'évolution du nombre seuil critique  $Y_c$  et du nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  en fonction de la contrainte seuil. Le nombre critique  $Y_c$  défini par l'équation (3), a des valeurs de l'ordre de l'unité. Sur la base de ces données, on peut conclure que, contrairement au cas d'un fluide newtonien qui perd sa stabilité vers des états de convection à une valeur fixe du nombre de Rayleigh (qui est indépendante du fluide), l'apparition de la convection du fluide à seuil est caractérisée par le nombre de seuil  $Y_c$ . Cette conclusion est en bon accord avec les résultats expérimentaux de Darbouli et al. [3]. Un phénomène typiquement associé à une bifurcation supercritique dans les systèmes dans lesquels se forment des rouleaux de convection est le phénomène de *ralentissement critique*. Ce dernier se manifeste par une brusque augmentation du temps  $t_c$  lorsqu'on s'approche du seuil de l'instabilité suivant une loi de puissance  $t_c \propto |P - P_c|^{-\alpha}$  où l'exposant  $\alpha$  est typiquement de l'ordre de l'unité, [4, 5, 3, 6]. Pour sonder l'émergence du phénomène de ralentissement critique et caractériser ses principales caractéristiques par rapport aux propriétés rhéologiques des solutions, nous avons observé la dépendance à la fois des temps caractéristiques  $t_d$  et  $t_c$

nécessaires pour que le système atteigne un état d'équilibre thermique pour une puissance de chauffage  $P$ .

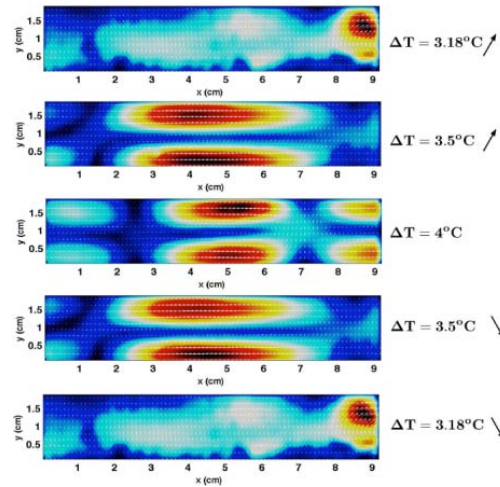


Figure 4: Evolution des rouleaux de convection correspondant à plusieurs valeurs du gradient de température  $\Delta T$ . La carte en fausses couleurs correspond à la valeur absolue de la vitesse d'écoulement (solution de Carbopol 0,08% et  $\Delta T_c = 2.58^\circ\text{C}$ ).

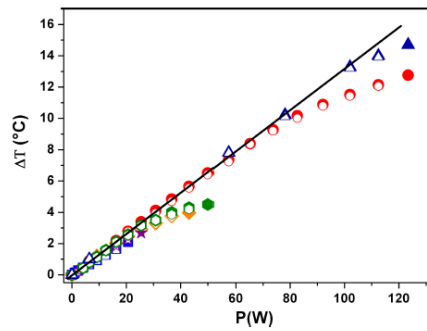


Figure 5: Variation du gradient de température sur le flux de chaleur pour six valeurs de concentrations de Carbopol: ( $\blacktriangle, \triangle$ ) -  $c = 0,11\%$  wt, ( $\bullet, \circ$ ) -  $c = 0,1\%$  wt, ( $\diamond, \diamond$ ) -  $c = 0,075\%$  en poids, ( $\ast, \ast$ ) -  $c = 0,06\%$  en poids, ( $\blacksquare, \square$ ) -  $c = 0,05\%$  en poids. Les symboles pleins / vides se réfèrent à augmentation / diminution du flux de chaleur. La ligne complète est un ajustement linéaire.

c(%wt)	$\beta(10^{-4}\text{K}^{-1})$	$c_p(\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1})$	$\kappa(10^{-7}\text{m}^2\text{s}^{-1})$	$\alpha(\text{W/mK})$	$\rho(\text{kg m}^{-3})$	$\tau_y(\text{Pa})$	$K(\text{Pas}^n)$	$n$	$\dot{\gamma}_c(\text{s}^{-1})$
0.05	2	4231.63	1.5	0.61	961	$0.007 \pm 7 \cdot 10^{-4}$	0.046	0.95	0.1
0.06	2	4245.77	1.48	0.61	970	$0.2 \pm 0.022$	0.054	0.92	0.05
0.075	2	4202.79	1.44	0.6	990	$0.55 \pm 0.045$	0.079	0.77	0.04
0.08	2	4176.13	1.45	0.6	990	$0.65 \pm 0.05$	0.118	0.77	0.02
0.1	2	4119.47	1.44	0.6	1010	$1.16 \pm 0.1$	0.305	0.61	0.004
0.115	2	3998.44	1.48	0.61	1030	$1.7 \pm 0.15$	0.727	0.45	0.002

Tableau 1: Propriétés physiques et rhéologiques du Carbopol :  $\beta$  - coefficient de dilatation thermique,  $C_p$  - capacité thermique,  $\kappa$  - diffusivité thermique,  $\alpha$  - conductivité thermique,  $\rho$  - densité,  $\tau_y$  - contrainte seuil,  $n$  - indice de loi puissance, Les densités ont été mesurées à température ambiante,  $T = 23^\circ\text{C}$ .

Les mesures du temps de ralentissement  $t_c$  effectuées avec un Carbopol 0,075% sont présentées sur la figure 8. Le temps caractéristique  $t_c$  atteint son maximum au niveau du seuil de l'apparition de la convection  $P_c$ . Ces mesures ainsi sont réversibles avec l'augmentation et la diminution de la puissance de chauffe. Le temps de ralentissement critique  $t_c^m$  augmente plus ou moins de façon linéaire avec la contrainte seuil du fluide. Le temps caractéristique  $t_c$  mesuré pour différentes concentrations de Carbopol, et normalisé par le temps de

ralentissement critique, suit une dépendance universelle en fonction de la puissance de chauffe réduite  $P_r$  (Figure 9), et varie de façon linéaire avec le paramètre de contrôle réduit paramètre  $P_r$ .

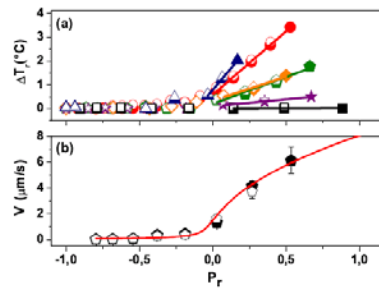


Figure 6: (a) Dépendance de la température réduite en fonction de la puissance réduite pour différentes concentrations de Carbopol. les lignes pleines sont des fonctions linéaires. (b) Dépendance de l'amplitude de la vitesse de convection  $V$  mesurée en fonction de la puissance réduite. La ligne est fonction d'ajustement non linéaire selon la théorie de bifurcation imparfaite, de Landau.

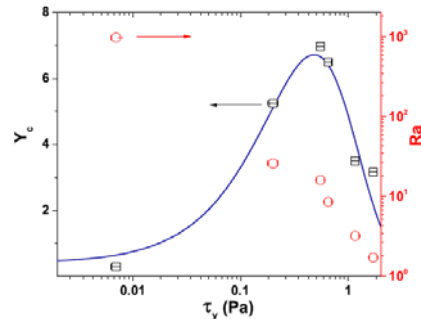


Figure 7: Dépendance du nombre critique  $Y_c$  (carrés, axe à gauche) et du nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  (cercles, axe à droite) en fonction de la contrainte seuil.

Ces résultats sont en bon accord avec les prédictions théoriques précédentes [7] et les résultats expérimentaux obtenus pour un fluide newtonien, [8], indiquant une fois de plus une similitude avec le cas newtonien. Pour conclure cette section, le message principal de nos expériences est que la convection Rayleigh-Bénard peut être déclenchée dans le Carbopol avec une contrainte seuil qui couvre une large gamme et, quelle que soit la valeur de la contrainte d'écoulement, la transition vers les états de convection peut être identifiée sans équivoque avec une bifurcation supercritique.

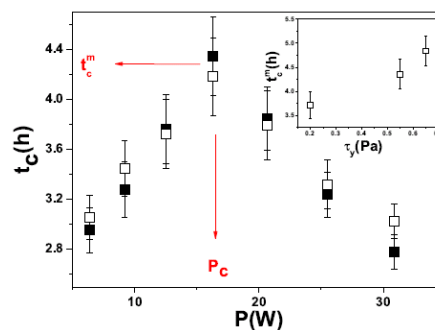


Figure 8: Dépendance du temps de ralentissement  $t_c$  sur la puissance de chauffage  $P$  (Carbopol 0,075%). Les symboles pleins / vides se réfèrent à l'augmentation / diminution des puissances de chauffage. L'insert présente la dépendance du temps de ralentissement critique  $t_c^m$  en fonction de la contrainte seuil du Carbopol

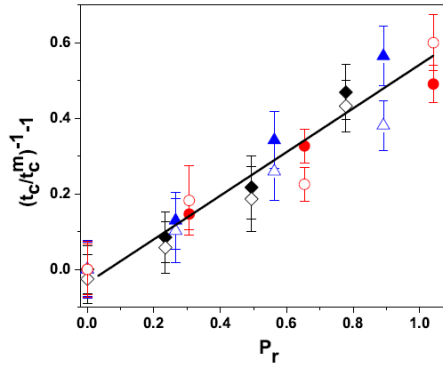


Figure 9: Dépendance de l'inverse du temps de ralentissement adimensionné en fonction de la puissance de chauffe réduite  $P_r$  pour diverses concentrations de Carbopol980: (●,○)-  $c = 0,06\%$ , (▲,△)-  $c = 0,075\%$ , (◆,◇) -  $c = 0,08\%$ . Les symboles pleins / vides se réfèrent à une augmentation / diminution des valeurs de la puissance de chauffe  $P$ . La ligne complète est un ajustement linéaire  $(t_c^m / t_c^m)^{-1} - 1 = 0.56(\pm 0.15)P_r$ .

### 3. Conclusions et perspectives

Une étude expérimentale systématique de la convection Rayleigh-Bénard dans un fluide à seuil est présentée par des mesures intégrales des gradients de température entre les plaques et des mesures locales de l'amplitude des vitesses de convection. La fiabilité du système expérimental et des techniques de mesure ont été démontrés par la caractérisation de la convection Rayleigh-Bénard pour un fluide newtonien.

Nous avons clairement identifié la bifurcation vers des états convectifs comme une bifurcation supercritique, dans un accord complet avec les prédictions théoriques et les études expérimentales précédentes. Suivant exactement la même procédure expérimentale et la stratégie de réduction de données que pour les expériences de validation, l'apparition de l'instabilité de Rayleigh-Bénard la convection a été étudiée pour six solutions de Carbopol avec des concentrations plus grandes que la concentration de recouvrement  $c^*$  (ainsi, chaque solution que nous avons étudiée, à la fois, une contrainte seuil et un comportement rhéofluidifiant). Pour chaque concentration en polymère (contrainte seuil) une transition claire vers le mode convectif est observée lorsque la puissance dépasse une valeur critique  $P_c$  par les mesures DPIV locales de l'amplitude de la vitesse d'écoulement et les mesures globales de différence de température. Il est important de souligner que, au cours de nos expériences, l'instabilité a été observée en l'absence d'une perturbation appliquée de façon externe d'une amplitude limitée. Par rapport aux schémas convectifs newtoniens, les rouleaux observés au sein du Carbopol ont une topologie différente. Ils sont plus plats à proximité des parois. Suite à notre étude, nous pouvons indiquer que la bifurcation lors de l'apparition de l'instabilité de Rayleigh-Bénard dans divers gels Carbopol comme une bifurcation imparfaite (supercritique).

La prochaine étape du travail concernera l'étude de l'instabilité de Rayleigh-Bénard dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant (carboxyméthylcellulose). En fonction des propriétés rhéologiques du fluide, et en particulier l'indice de rhéofluidification, la nature de la bifurcation sera étudiée.

#### Remerciements

Ces travaux ont bénéficié d'un financement dans le cadre de l'ANR blanche THIM. Les auteurs souhaitent remercier Christophe Le Bozec pour le travail réalisé lors de la mise en route du dispositif expérimental.

#### References

[1] Chandrasekhar, S., 1961. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford : Clarendon press



- [2] Kebiche, Z., Castelain C., Burghelea T., Experimental investigation of the Rayleigh–Bénard convection in a yield stress fluid, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Volume 203, January 2014, Pages 9-23, ISSN 0377-0257.
- [3] Darbouli, M., Metivier, C., Piau, J.-M., Magnin, A., Abdelali, A., 2013. Rayleigh–Bénard convection for viscoplastic fluids. *Physics of Fluids* 25 (2), 023101. URL <http://link.aip.org/link/?PHF/25/023101/1>
- [4] Cross, M. C., Hohenberg, P. C., Jul 1993. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.* 65, 851–1112.  
URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.65.851>
- [5] Bodenschatz, E., Pesch, W., Ahlers, G., 2000. Recent developments in Rayleigh–Bénard convection. *Annual Review of Fluid Mechanics* 32 (1), 709–778.
- [6] Strogatz, S. H., 2007. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Sarat Book House.
- [7] Wesfreid, J., Pomeau, Y., Dubois, M., Normand, C., Berge, P., 1978. Critical effects in Rayleigh–Bénard convection. *J. Phys. France* 39 (7), 725–731.
- [8] Behringer, R., Ahlers, G., 1977. Heat transport and critical slowing down near the Rayleigh–Bénard instability in cylindrical containers. *Physics Letters A* 62 (5), 329 – 331.