

# Réduction modale d'un plancher chauffant

Benjamin GAUME<sup>1</sup>, Stanislas BROU<sup>1,2</sup>, Kossivi GOKPI<sup>1</sup>, Frédéric JOLY<sup>1\*</sup> & Alain NEVEU<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry  
40 rue du Pelvoux, CE 1455, Courcouronnes 91020 Evry CEDEX

<sup>2</sup> ENS2R, 49, rue de Corbeil - 91360 Epinay sur Orge

\*(auteur correspondant : f.joly@iut.univ-evry.fr)

**Résumé** - Nous proposons un modèle 2D de plancher chauffant hydraulique couplé à un modèle de bâtiment 1D destiné à être intégré dans un simulateur dynamique du système BATIMAC. Pour un simulateur rapide et précis nous avons eu recours aux méthodes modales qui permettent une réduction considérable du temps de calcul et de la taille du système tout en conservant une précision acceptable.

## Nomenclature

$\lambda$	Valeur propre ( $s^{-1}$ )	<b>A</b>	Matrice de conductivité thermique ( $n_0 \times n_0$ )
$k$	Conductivité thermique ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )	<b>B</b>	Matrice des sollicitations ( $n_0 \times p$ )
$C$	Capacité thermique volumique ( $J.m^{-3}.K^{-1}$ )	<b>C</b>	Matrice de capacité thermique ( $n_0 \times n_0$ )
$x$	Amplitude des modes	<b>V</b>	Matrice des vecteurs propres réduits ( $n_0 \times r$ )
		<b><math>\Lambda</math></b>	Matrice des valeurs propres réduites ( $r \times r$ )

### Vecteurs (dimension)

$U$	Sollicitations ( $p$ )
$V$	Vecteur propre ( $n_0$ )
$X$	Amplitude des modes ( $r$ )
$Y$	Observable ( $q$ )

### subscript

$a$	Air dans le bâtiment
$f$	Fluide caloporteur
$m$	Mur
$p$	Plancher

### Matrices (dimensions)

## 1. Introduction

En prévision de la future Réglementation Thermique 2020 qui vise à la promotion des bâtiments autonomes en énergie, nous développons un simulateur de comportement énergétique d'un système de micro-cogénération couplé au bâtiment (programme de recherche BATIMAC en association avec la société ENS2R). Sa finalité est double : dimensionner, optimiser puis piloter l'installation en temps réel. Les environnements de calcul tels Simulink ou Modelica sont des outils performants pour ce type de développement, où le système est vu comme un ensemble de composants couplés. Nous nous intéressons ici à l'intégration dans un tel environnement d'un plancher chauffant. Ce système est par nature tridimensionnel, mais la plupart des articles recensés dans la littérature traitent une géométrie bidimensionnelle. Cela implique de ne pas traiter le problème de transport du fluide caloporteur, et de considérer une température moyenne du fluide circulant dans le plancher. Dans le cadre de cette hypothèse, les nombreuses modélisations proposées peuvent se classer en deux catégories : d'une part des modèles numériques détaillés, où la géométrie du plancher est modélisée finement [1] et où le problème thermique est résolu par des méthodes numériques telles que les éléments finis ou les volumes finis. Malheureusement, les environnements de calcul comme Simulink s'accrochent mal des modèles maillés de grande taille. De plus, dans la perspective de contrôle prédictif de la température à l'intérieur du bâtiment, la dimension de tels modèles peut s'avérer rédhibitoire. A l'opposé des modèles simplifiés analytiques ou semi-analytiques ont été développés [2], [3].

Si ils s'intègrent dans les environnement précités, ces méthodes ne détaillent pas la géométrie de la construction. Une alternative pour concilier ces deux approches (prise en compte de la géométrie et rapidité du temps de calcul) est d'utiliser les méthodes modales. Utilisées depuis de nombreuses années dans le bâtiment [4] [5], ces dernières ont depuis été utilisées pour modéliser des systèmes tri-dimensionnels complexes [6]. Nous proposons ici une modélisation modale d'un bâtiment équipé d'un plancher chauffant hydraulique.

## 2. Système dynamique

Considérons le système dynamique suivant en formulation matricielle :

$$\begin{cases} \mathbf{C}\dot{T} = \mathbf{A}T + \mathbf{E}U(t) \\ Y = \mathbf{J}T + \mathbf{G}U(t) \end{cases} \quad (1)$$

$U(t)$  est le vecteur des sollicitations, et  $Y$  le vecteur des observables (température en certains points ou flux de chaleur). Lorsque ce système est dérivé de la discrétisation de l'équation de la chaleur par des méthodes classiques, la dimension  $n_0$  de ce problème est grande, ce qui implique un temps de calcul important pour obtenir la solution. Une alternative est d'utiliser des modèles réduits. La solution  $T$  est d'abord cherchée comme une superposition d'un champ dit statique  $T_s$  et d'un champ dit dynamique  $T_d$  :

$$T(M, t) = T_s(M, t) + T_d(M, t) \quad (2)$$

où le champ statique vérifie la solution :

$$\mathbf{A}T_s + \mathbf{E}U(t) = 0 \quad (3)$$

En remplaçant l'éq. (3) dans l'éq. (1) :

$$\begin{cases} \mathbf{C}\dot{T}_d = \mathbf{A}T_d + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}\dot{U}(t) \\ Y = \mathbf{J}T_d + (\mathbf{G} - \mathbf{J}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E})U(t) \end{cases} \quad (4)$$

Cette formulation présente l'avantage de préserver le champ statique même si le régime dynamique est altéré par une réduction.

### 2.1. Formulation modale

Les formulations modales consistent à chercher le champ dynamique sous la forme d'une somme de champs thermiques élémentaires  $V_i$ , les modes, pondérés par leurs amplitudes temporelles  $x_i$  :

$$T_d(M, t) = \sum_{i=0}^N x_i(t)V_i(M) \quad (5)$$

Rigoureusement,  $N = \infty$ , mais en pratique seul un nombre fini de mode est accessible, numériquement ou analytiquement. Dans cette étude, les modes sont les solutions d'un problème aux valeurs propres généralisé relié à l'équation de la chaleur :

$$\mathbf{A}V_i = \lambda_i\mathbf{C}V_i, \quad (6)$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{C}$  sont les mêmes matrices que dans l'éq. (1), et  $\lambda_i$  sont les valeurs propres associées aux modes  $V_i$ . Les modes propres satisfont les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\begin{cases} V_i^t\mathbf{C}V_j = \delta_{ij} \\ V_i^t\mathbf{A}V_j = \lambda_i\delta_{ij} \end{cases} \quad (7)$$

En remplaçant l'éq.(5) dans l'éq. (4), et en utilisant les propriétés d'orthogonalité (éq. (7)), l'équation d'amplitude est obtenue :

$$\dot{X} = \mathbf{A}X + \mathbf{B}\dot{U} \quad (8)$$

$$Y = \mathbf{H}X + \mathbf{S}U \quad (9)$$

où les matrices suivantes sont définies

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}\mathbf{V} \quad \mathbf{Z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E} \quad (10)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{G} - \mathbf{Z} \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^t\mathbf{C}\mathbf{Z} \quad (11)$$

Plusieurs points doivent être précisés. La matrice  $\mathbf{A}^{-1}$  n'est pas explicitement construite puisque seul le produit  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}$  est nécessaire. Ainsi, au lieu d'inverser  $\mathbf{A}$ , le système linéaire  $\mathbf{A}\mathbf{Z} = \mathbf{E}$  est résolu. De plus, les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{S}$  n'ont à être calculées qu'une seule fois, ce qui peut se faire hors-ligne. Finalement, la matrice  $\mathbf{A}$ , contenant les valeurs propres, est diagonale. L'intérêt de la formulation modale réside d'un côté dans la caractèrè diagonale du système (8), et de l'autre côté dans la possibilité de ne retenir qu'un nombre limité de modes dans l'équation (5). Ce second point est évidemment au cœur des modèles réduits. Plusieurs méthodes existent afin de sélectionner les modes fondamentaux, de la simple troncature [7], à la méthode sophistiquée de l'amalgame modal[8]. Suivant la méthode de la troncature, les  $r$  modes avec la plus grande constante de temps sont sélectionnés, les autres modes étant éliminés. Une fois que cette étape a été accomplie, l'ordre de l'éq. (8) est  $r$ .

### 3. Problème physique

#### 3.1. Le bâtiment

Le bâtiment est composé d'une paroi bi-couche formant une enceinte autour d'un volume d'air  $V_a = 250m^3$ . La couche 1 est en contact avec l'intérieur de l'enceinte (15 cm de béton  $\lambda_b = 1.15 W.m^{-1}.K^{-1}$ ,  $C_b = 1.936 MJ.m^{-3}.K^{-1}$ ), alors que la couche 2 (15 cm d'isolant,  $\lambda_i = 0.04 W.m^{-1}.K^{-1}$ ,  $C_i = 50 kJ.m^{-3}.K^{-1}$ ) est en contact avec l'extérieur. Le contact entre les deux couches est supposé parfait. La diffusion dans la paroi est supposée unidirectionnelle. Les faces en contact, couvrant une surface de  $200m^2$  avec l'air, échangent par convection avec ce dernier. On notera les coefficients d'échange intérieur et extérieur respectivement  $h_{in}$  et  $h_{ex}$ , dont les valeurs sont proposés par le CSTB. Ce coefficient d'échange "convectif" prend en compte les échanges par rayonnement infrarouge avec l'environnement (en linéarisant). Les faces intérieures et extérieures de la paroi sont susceptibles d'absorber du rayonnement solaire, le coefficient d'absorption étant noté  $\alpha^s$ . La surface d'absorption est variable dans le temps. Notons que la paroi de l'enceinte étant a-priori opaque cette stylisation suppose implicitement la présence d'une paroi vitrée (dont les déperditions sont prises en compte). De même nous serons conduit à introduire deux sollicitations solaires, l'une intérieure et l'autre extérieure, afin de conserver une matrice de sollicitations indépendante du temps, la surface d'absorption étant agglomérée avec le flux solaire. L'air de l'enceinte est à température uniforme  $T_a$ , et il est renouvelé avec un débit constant  $Q = 125m^3/h$  (soit un taux de renouvellement d'air de 0.5 volume par heure). L'enceinte est munie d'un dispositif d'apport d'énergie dans l'air d'une puissance  $\Phi_2$  variable. Les transferts de chaleur dans la paroi peuvent être modélisés par les équations suivantes :

$$C_k \frac{\partial T_m}{\partial t} = k_k \nabla^2 T_m, \quad (12)$$

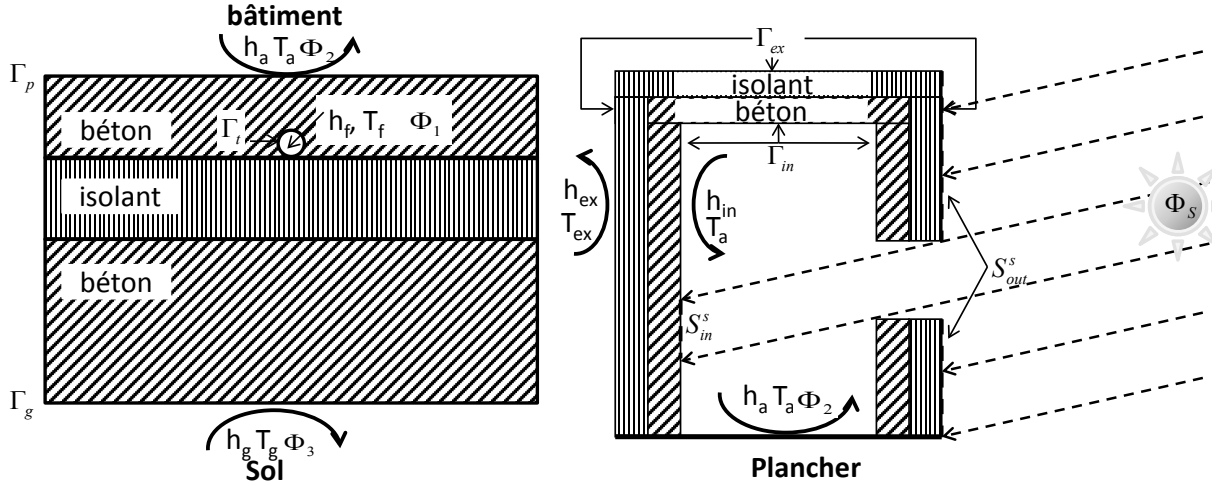


Figure 1 : Représentation schématique du plancher chauffant et du bâtiment

où l'indice  $k$  renvoie aux différents matériaux. Cette équation est complétée par les conditions aux limites :

$$k_b \nabla T_m \cdot \mathbf{n} = h_{in}(T_a - T_m) + \alpha_{in}^s (S_{in}^s \Phi_s)(t) \quad \text{sur } \Gamma_{in} \quad (13)$$

$$k_i \nabla T_m \cdot \mathbf{n} = h_{ex}(T_{ex} - T_m) + \alpha_{ex}^s (S_{ex}^s \Phi_s)(t) \quad \text{sur } \Gamma_{ex} \quad (14)$$

L'indice  $i$  renvoie à l'isolant et  $b$  au béton. Les équations (12)-(14) sont discrétisées sur un maillage élément fini linéaire 1D ce qui donne une formulation matricielle telle que l'éq. (1). Les modes propres sont calculés grâce au logiciel Arpack [9]. L'équation d'amplitude s'écrit alors :

$$\dot{X}_m = \mathbf{\Lambda}_m X_m + \mathbf{B}_m \dot{U}_m \quad (15)$$

$$Y_m = \mathbf{H}_m X_m + \mathbf{S}_m U_m \quad (16)$$

Il n'y a qu'un seul observable pour le mur, le flux de chaleur du mur vers l'air dans le bâtiment  $Y_m = \int_{\Gamma_{in}} h_{in}(T_m - T_a)$ . Les sollicitations sont données par :

$${}^t U_m = (T_a \quad T_{ex} \quad S_{in}^s \Phi_s \quad S_{ex}^s \Phi_s) \quad (17)$$

### 3.2. Le plancher chauffant

Le plancher couvre une surface  $\Gamma_p = 100m^2$ . Il est composé de tubes de diamètre  $1.6cm$  dans lesquels circule de l'eau, chaque tube étant espacé de  $30cm$ . Les tuyaux sont coulés dans une chape de béton de  $5cm$ , celle-ci reposant sur une couche isolante de  $5cm$ . Sous l'isolant, une dalle de béton épaisse de  $10cm$  soutient l'ensemble (Fig. 1). La conduction thermique entre 2 tubes est négligée, et un seul tube sera considéré. De plus, une interpolation linéaire entre l'entrée et la sortie est utilisée pour déterminer le profil de température dans ce tube, rendant la configuration étudiée bidimensionnelle [10]. Avec ces hypothèses, au milieu du tuyau  $T_f \equiv \frac{T_{out} + T_{in}}{2}$ . Les échanges de chaleur sont montrés en Fig. 1. L'eau échange de la chaleur par convection avec le béton le long du tuyau sur une surface  $\Gamma_t$  ( $\Phi_1$ ). En surface, le plancher chauffe l'air dans le bâtiment par convection également ( $\Phi_2$ ). Les échanges de chaleur entre le plancher

et le sol peuvent être modélisés par un coefficient d'échange apparent  $h_g$  ( $\Phi_3$ ). L'évolution de la température dans le plancher est modélisée par l'équation suivante

$$C_k \frac{\partial T_p}{\partial t} = k_k \nabla^2 T_p \quad (18)$$

où l'indice  $k$  renvoie aux différents matériaux, associée aux conditions aux limites :

$$k_b \nabla T_p \cdot \mathbf{n} = h_a(T_a - T_p) \quad \text{sur } \Gamma_p \quad (19)$$

$$k_b \nabla T_p \cdot \mathbf{n} = h_f(T_f - T_p) \quad \text{sur } \Gamma_p \quad (20)$$

$$k_b \nabla T_p \cdot \mathbf{n} = h_g(T_g - T_p) \quad \text{sur } \Gamma_g \quad (21)$$

$$k_b \nabla T_p \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur les autres frontières} \quad (22)$$

Le plancher chauffant a deux modes de fonctionnement : marche et arrêt (on/off). Lorsque le plancher est en marche, l'eau entre avec un débit massique  $\dot{m} = 0.11 \text{ kg/s}$  et une température d'entrée  $T_{in} = 45^\circ \text{C}$ . Elle échange de la chaleur par convection forcée, le coefficient d'échange étant estimé à  $h_f^{on} = 2 \text{ kW.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , et ressort avec une température  $T_{out}$ .  $T_{out}$  est déterminée par un simple bilan énergétique, et avec la définition de  $T_f$

$$\dot{m} c_f (T_f - T_{in}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_p} h_f^{on} (T_p - T_f) dS \quad (23)$$

Lorsque le plancher est à l'arrêt, il n'y a plus de débit et l'eau échange de la chaleur avec le béton par convection naturelle, et le coefficient d'échange résultant est plutôt de l'ordre de  $h_f^{off} = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ . L'évolution temporelle de la température de l'eau est alors modélisée par :

$$m_f c_f \dot{T}_f = \int_{\Gamma_p} h_f^{off} (T_p - T_f) dS \quad (24)$$

où  $m_f$  est la masse d'eau contenue dans les tuyaux. Le système d'équations (18)-(22) est discrétisé sur une base d'éléments finis P1 2D, ce qui donne une formulation matricielle telle que l'éq. (1). Comme le coefficient d'échange diffère selon le mode de fonctionnement, cela affecte la matrice  $\mathbf{A}$  dans les éqs. (1) et (6). Deux bases sont donc calculées pour le plancher, correspondant aux deux modes de fonctionnement. L'équation d'amplitude s'écrit :

$$\dot{X}_p^{op} = \mathbf{\Lambda}_p^{op} X_p^{op} + \mathbf{B}_p^{op} \dot{U}_p \quad (25)$$

$$Y_p = \mathbf{H}_p^{op} X_p^{op} + \mathbf{S}_p U_p \quad (26)$$

ou l'exposant  $op$  correspond au mode de fonctionnement,  $on$  ou  $off$ .

Deux observables sont définis : le flux de chaleur du plancher vers l'air et celui du tuyau vers le béton :

$$Y_p = \left( \begin{array}{c} \int_{\Gamma_t} h_f (T_f - T_p) dS \\ \int_{\Gamma_p} h_a (T_p - T_a) dS \end{array} \right) \quad (27)$$

Le vecteur des sollicitations est donné par :

$${}^t U_p = (T_f \quad T_a \quad T_g) \quad (28)$$

Lors d'un changement de fonctionnement, un changement de base est nécessaire pour s'assurer d'une continuité de la température :

$$X_p^{off} = {}^t \mathbf{V}_p^{off} \mathbf{C} \mathbf{V}_p^{on} X_p^{on} - {}^t \mathbf{V}_p^{off} \mathbf{C} (\mathbf{Z}_p^{on} - \mathbf{Z}_p^{off}) U \quad (29)$$

$$X_p^{on} = {}^t \mathbf{V}_p^{on} \mathbf{C} \mathbf{V}_p^{off} X_p^{off} - {}^t \mathbf{V}_p^{on} \mathbf{C} (\mathbf{Z}_p^{off} - \mathbf{Z}_p^{on}) U \quad (30)$$

ordre	1	2	3	4	5	10	70
$\tau_p^{off}$	35793	10750	9376	6559	3457	1410	115
$\tau_p^{on}$	35474	10740	6652	6263	3453	1410	115
$\tau_m$	48542	7628	3727	1862	1078	185	

Tableau 1 *Quelques constantes de temps des modes du plancher et du mur*

Ce modèle doit être complété par une équation donnant l'évolution de la température de l'air dans le bâtiment :

$$C_a V_a \dot{T}_a = Y_m + Y_p(2) + Q(T_{ext} - T_a) \quad (31)$$

### 3.3. Le découplage des équations

Les équations (16), (23), (26) et (31) sont découplées grâce à la discrétisation temporelle. En utilisant un schéma Euler implicite au premier ordre, les éqs. (16) et (26) s'écrivent :

$$\begin{cases} X_k(t + \delta t) = \Gamma_k X_k(t) + \Gamma_k \mathbf{B}_k (U_k(t + \delta t) - U_k(t)) \\ Y_k(t + \delta t) = \mathbf{H}_k X_k(t + \delta t) + \mathbf{S}_k U_k(t + \delta t) \end{cases} \quad (32)$$

où l'indice  $k$  réfère à  $m$  ou  $p$ ,  $\Gamma$  est une matrice diagonale définie par  $\Gamma = [\mathbb{I} - \delta t \mathbf{\Lambda}]^{-1}$ , et  $\mathbb{I}$  est la matrice identité. Avec le même schéma, l'éq. (31) s'écrit :

$$T_f(t + \delta t) = T_{in}(t + \delta t) + \frac{Y_p(1)(t + \delta t)}{2\dot{m}c_f} \quad \text{chauffage en marche} \quad (33)$$

En combinant les éqs. (32) et (33) une formulation explicite est obtenue pour  $T_f(t + \delta t)$  (chauffage en marche).

$$\begin{aligned} T_f(t + \delta t) &= [2\dot{m}c_f - [\mathbf{H}_p \mathbf{\Gamma}_p \mathbf{B}_p](1, 1) - \mathbf{S}_p(1, 1)]^{-1} \\ &[2\dot{m}c_f T_{in}(t + \delta t) + \mathbf{S}_p \mathbf{\Gamma}_p X_p(t) + dt [\mathbf{H}_p \mathbf{\Gamma}_p \mathbf{B}_p](1, :)^t (\dot{T}_a, 0, \dot{T}_g) \\ &+ \mathbf{S}_p(1, :)(T_a, 0, T_g) + [\mathbf{H}_p \mathbf{\Gamma}_p \mathbf{B}_p](1, 1) T_f(t)] \end{aligned} \quad (34)$$

Ainsi, malgré l'apparente complexité de cette formule,  $T_f(t + \delta t)$  est déterminé par une simple équation scalaire du premier ordre. Un développement similaire conduit à une expression semblable (mais plus longue) pour  $T_a(t + \delta t)$ . Une fois que  $T_a(t + \delta t)$  et  $T_f(t + \delta t)$  sont déterminés,  $X_m(t + \delta t)$  et  $X_p(t + \delta t)$  sont incrémentés en utilisant l'éq. (32) avec respectivement l'indice  $m$  ou  $p$ . De par la nature diagonale du système, ces opérations consistent en une simple multiplication vectorielle.

## 4. Résultats et discussion

Une étude de sensibilité a montré que pour avoir une bonne précision sur les flux de chaleur échangés, 9208 nœuds sont nécessaires dans le plancher chauffant, 30 nœuds dans le mur et 3 nœuds dans la vitre.

Le scénario de chauffe présenté ici permet de voir les points forts ainsi que les points faibles du modèle. Les données météo horaires sont réglementaires (Ville de Nancy), et nous faisons une interpolation quadratique pour avoir des données minute par minute. Il n'y a pas de régulation sur le plancher. Pendant la période de chauffe (15 octobre au 15 avril), le plancher est en marche de 18h à 22h, et il est coupé le reste du temps. Le pas de temps de calcul pour la simulation est

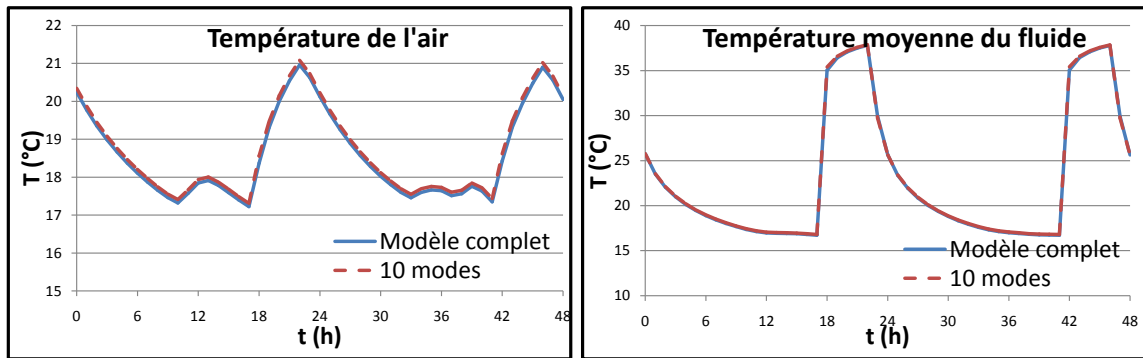


Figure 2 : Evolution temporelle de la température de l'air (gauche) et du fluide caloporteur (droite)

de 2 minutes, ce qui est suffisant pour une bonne précision. Une étude de sensibilité au nombre de mode (confirmée par une étude bibliographique [11]) a montré qu'en ne gardant que 3 modes pour les murs et un mode pour la vitre, l'erreur maximale commise sur une simulation d'un an est inférieure à  $0.07^{\circ}\text{C}$ . Cette troncature revient à éliminer tous les modes dont la constante de temps est inférieure à  $1860\text{s}$  (voir Table 1), ce qui est cohérent avec des sollicitations variant avec un pas de temps d'une heure.

La figure 2 représente les variations temporelles de température de l'air et du fluide caloporteur entre le 30 janvier et le 1er février lorsque le scénario ci-dessus est appliqué, calculées avec le modèle complet et un modèle réduit à 10 modes pour le plancher. On remarque le saut brutal de la température du fluide lorsque le chauffage est remis en route, la température moyenne du fluide passant de  $17^{\circ}\text{C}$  à  $35^{\circ}\text{C}$ . On constate ensuite qu'avec le scénario envisagé, le système n'atteint jamais le régime permanent, ce qui prouve la nécessité d'un simulateur dynamique. Par ailleurs, la correspondance entre les deux simulations est très satisfaisante. Ce constat est confirmé par la figure 3 représentant la variation de l'écart entre ces deux modèles pour la même période. La différence sur la température de l'air est inférieure à  $0.2^{\circ}\text{C}$  (l'écart maximal sur une simulation d'un an étant de  $0.21^{\circ}\text{C}$ ), et celle sur la température moyenne du fluide inférieure à  $0.4^{\circ}\text{C}$  (l'écart maximal sur une simulation d'un an étant de  $0.4^{\circ}\text{C}$ ). Les différences apparaissent principalement lors des changements de régime. Cela est dû à deux phénomènes. La

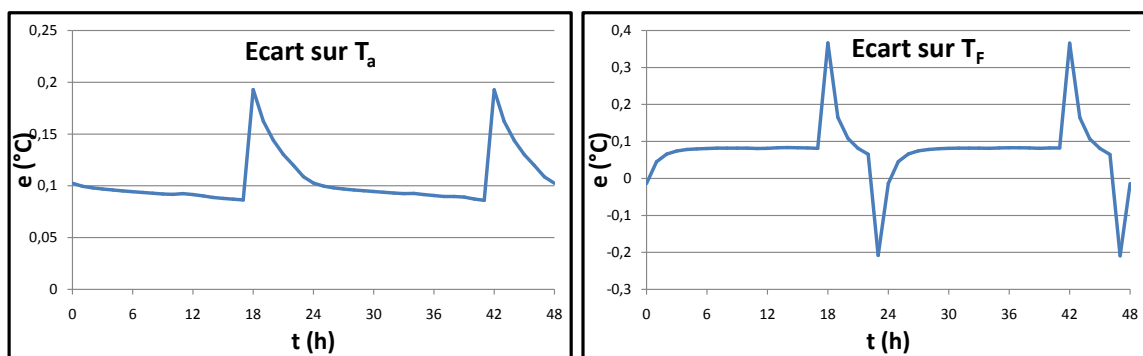


Figure 3 : Ecart entre le modèle complet et le modèle réduit à 10 modes en fonction du temps sur la température de l'air (gauche) et du fluide caloporteur (droite)

remise en fonctionnement du système de chauffage se traduit par un échelon en tempéra-

ture, la dynamique est extrêmement rapide, et donc très difficile à capturer. La troncature de la base éliminant les modes à dynamique rapide (pour exemple le 10ème mode a une constante de temps de 1410 s, voir la Table 1), il est donc normal de ne pas pouvoir reconstituer parfaitement cette évolution. Par ailleurs, lors du changement de régime, il y a un changement de base. La température est projetée sur une base tronquée. Plus la troncature est forte, plus l'erreur due au changement de base est importante. Néanmoins, l'écart maximum entre le modèle complet et un modèle tronqué à uniquement 10 modes est de l'ordre de  $0.2^{\circ}C$ , c'est à dire la précision d'un thermocouple.

## 5. Conclusion

Un modèle modal d'un bâtiment équipé d'un plancher chauffant a été créé. La dimension du problème a été réduite et seulement 16 inconnues (4 pour le bâtiment, 10 pour le plancher, 1 pour l'air et une pour le fluide caloporteur) sont nécessaires pour modéliser finement la dynamique temporelle de l'ensemble tout en respectant les détails de la géométrie. Par ailleurs, les propriétés d'orthogonalité des modes ont permis de découpler la résolution du système. Seules deux multiplications vectorielles sont nécessaires à la résolution du problème à chaque pas de temps. La rapidité de calcul, ainsi que la faible taille du système, permet d'envisager d'incorporer ce modèle dans une boucle de rétroaction afin de contrôler finement la température à l'intérieur du bâtiment. En suivant une démarche similaire, on peut envisager une modélisation tridimensionnelle du plancher, ce qui autoriserait des géométries plus complexes, sans remettre en cause fondamentalement le degré de réduction du modèle. Une extension est envisagée pour modéliser le fluide. Cependant il faudrait cette fois utiliser des outils plus sophistiqués comme la sous-structuration et des modèles non auto-adjoints ouverts.

## Références

- [1] P. Weitzmann, J. Kragh, P. Roots, S. Svendsen, Modelling floor heating systems using a validated two-dimensional ground-coupled numerical model, *Building and Environment*, 40 (2005), 153–163.
- [2] A. Laouadi, Development of a radiant heating and cooling model for building energy simulation software, *Building and Environment*, 39 (2004), 421–431.
- [3] L. Zhang, X. Liu, Y. Jiang, Simplified calculation for cooling/heating capacity, surface temperature distribution of radiant floor, *Energy and Buildings*, 55 (2012), 397–404.
- [4] G. Lefebvre, J. Bransier, and A. Neveu, Simulation du comportement thermique d'un local par des méthodes numériques d'ordre réduit, *Revue Générale de Thermique*, 302 (1987), 106–114.
- [5] C. Ménézo, J. Roux, and J. Virgone, Modelling Heat Transfer in buildings by coupling reduced-order models, *Building and Environment*, 37 (2002), 133–144.
- [6] E. Videcoq, M. Lazard, O. Quéméner, and A. Neveu, Online Temperature prediction using a Branch eigenmode reduced model applied to cutting process, *Numerical Heat Transfer A*, 55 (2009), 683–705.
- [7] S. Marshall, An Approximation Method for Reducing the Order of Linear System, *Control*, (1966), 642–653.
- [8] O. Quéméner, F. Joly, and A. Neveu, The generalized amalgam method for modal reduction, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 55 (2012), 1197–1207.
- [9] <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/>.
- [10] S. Ho, R. Hayes, and R. Wood, Simulation of the dynamic behaviour of a hydronic floor heating system, *Heat recovery Systems & CHP*, 15 (1995), 505–519.
- [11] C. Ménézo, H. Bouia, J. Roux, and J. Virgone, Adaptation of the balanced realization to the coupling of reduced order models for the modelling of the thermal behavior of buildings, *Mathematics and Computers in Simulation*, 53 (2000), 395–401.