

# Convection forcée laminaire de l'air entre deux parois soumises à des conditions de Fourier asymétriques

François GLORIAN<sup>1</sup>, Pierre TITTELEIN<sup>1</sup>, Annabelle JOULIN<sup>1\*</sup>, Stéphane LASSUE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Génie Civil et géo-Environnement (EA-4515), Faculté des Sciences Appliquées - Université d'Artois, Technoparc Futura 62400 Béthune, Université Lille Nord de France, 59000 Lille, France

\* (auteur correspondant : annabelle.joulin@univ-artois.fr)

**Résumé** - On se propose de modéliser un écoulement laminaire d'air en convection forcée entre deux parois dont les conditions aux limites de chauffage asymétrique imposées sont des conditions de type Fourier. Dans le cas d'un chauffage symétrique, lorsque le régime thermique et le régime dynamique sont établis, le nombre de Nusselt est déterminé analytiquement et les valeurs calculées sont constantes. Cependant, le problème étudié ici repose sur des conditions aux limites différentes sur les deux parois du canal vertical, et par conséquent la résolution analytique, notamment pour des conditions aux limites de Fourier, devient plus délicate.

## Nomenclature

$C_p$	capacité calorifique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$		
$D_h$	diamètre hydraulique, m		
$e$	distance entre parois, m		
$h$	coefficient d'échange, $W.m^{-2}.K^{-1}$		
$H$	hauteur, m		
$Nu$	nombre de Nusselt		
$l$	largeur, m		
$q$	flux de chaleur, $W.m^{-2}$		
$S$	surface (l.H), $m^2$		
$T$	température, K		
$U$	vitesse, $m.s^{-1}$		
$(x,y)$	repère cartésien orthonormé		
		<i>Symboles grecs</i>	
		$\lambda$	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
		$\theta$	température adimensionnée
		<i>Indices et exposants</i>	
		<i>éch</i>	échange
		sym	symétrique
		g,d	gauche, droite
		S	surface
		m	mélange

## 1. Introduction

Le contexte général de notre travail est l'étude de fenêtres pariéto-dynamiques [1]. Nous nous intéressons ici à un écoulement d'air laminaire en convection forcée entre deux parois verticales parallèles soumises à des conditions de chauffage asymétriques. Dans cette étude, une méthode de résolution est présentée, et les résultats obtenus sont comparés à ceux issus de simulations numériques stationnaires 2D réalisées à l'aide du logiciel commercial Fluent®. La méthode de résolution repose sur une hypothèse permettant de ramener chaque configuration de chauffage asymétrique à une configuration symétrique. Cette hypothèse a été présentée au congrès SFT 2013 [2]. Pour des conditions aux limites symétriques, les nombres de Nusselt sont établis analytiquement et le bilan thermique peut être déterminé. Par contre, pour des conditions aux limites asymétriques, se ramener à une configuration symétrique n'est pas suffisant et une hypothèse supplémentaire est nécessaire pour déterminer les flux et les températures sur chaque paroi lorsque le régime thermique est établi. Une attention particulière est portée sur la définition des coefficients d'échange à l'intérieur de la lame d'air en fonction de la température de mélange. Pour les calculer, une description détaillée de la méthode de résolution peut être obtenue dans les ouvrages [3], [4], [5], [6]. En ce qui

concerne la condition limite de type Fourier, les travaux de Sideman et al. [7] et de Hickman [8] cités dans l'ouvrage de Shah et London [6] ont permis de formuler une relation entre le coefficient d'échange  $h_{\text{éch}}$  (air-parois) et le coefficient aux parois  $h_{\text{sym}}$  (cas symétrique) :

$$Nu = \frac{h_{\text{éch}} \cdot D_h}{\lambda} = \frac{1 + \frac{140}{17 h_{\text{sym}}}}{\frac{74}{561} + \frac{1}{h_{\text{sym}}}} \quad (1)$$

## 2. Modèle géométrique et description du problème

Deux parois verticales planes et parallèles de hauteur  $H = 3 \text{ m}$  sont considérées dans ce travail (Figure 1). Cette hauteur est choisie de façon à ce que l'on puisse rendre compte de l'ensemble du phénomène convectif. Ces deux parois sont distantes d'une largeur  $e = 1 \text{ cm}$  formant un canal dans lequel l'air circule à vitesse connue. Une zone adiabatique de 50 cm est ajoutée en amont du canal pour obtenir un écoulement en entrée dynamiquement établi. Chacune des parois peut-être soumise à une condition limite de type Fourier symétrique et asymétrique. L'air entre à une température extérieure de 273 K, tandis que la température intérieure de l'ambiance est maintenue à 293 K.

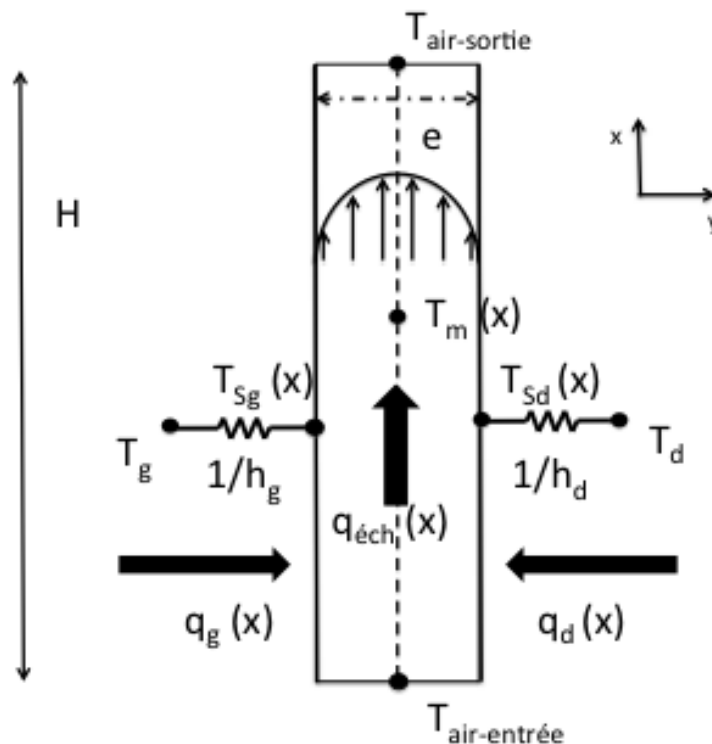


Figure 1: Représentation géométrique – cas général

Ci-dessous les hypothèses de notre étude :

- L'écoulement est laminaire et est caractérisé par un nombre de Reynolds inférieur à 2300 ;
- La convection est forcée;
- Le fluide étudié est l'air. Ses propriétés thermophysiques sont considérées constantes ;
- Le rayonnement n'est pas pris en compte dans cette étude ;
- Le régime thermique est établi.

Les simulations numériques sont réalisées en régime stationnaire à l'aide du logiciel commercial Fluent®. La discrétisation des équations est basée sur la méthode des volumes finis. Le débit massique et la température de l'air sont imposés en entrée. En sortie, une condition de pression atmosphérique est imposée. Les critères de convergence sont définis à l'aide de la méthode des résidus normalisés. Dans nos simulations, lorsque les résidus sont de l'ordre de  $10^{-10}$  pour l'ensemble des variables, le processus itératif s'arrête et la solution est atteinte.

### 3. Modélisation du problème avec conditions aux limites asymétriques de type Fourier

#### 3.1. Hypothèse fondamentale

Notre principale hypothèse consiste à supposer que pour chaque problème où des conditions de chauffage asymétriques sont appliquées, il existe une et une seule configuration dans laquelle les conditions de chauffage sont symétriques et aboutissent à la même évolution de la température de mélange d'air  $T_m(x)$ . Cela revient à dire qu'à chaque configuration symétrique correspond une infinité de configurations asymétriques dans lesquelles l'évolution de la température  $T_m(x)$  est identique (Figure 2). L'intérêt de cette hypothèse repose sur le fait que l'on sait résoudre une configuration symétrique.

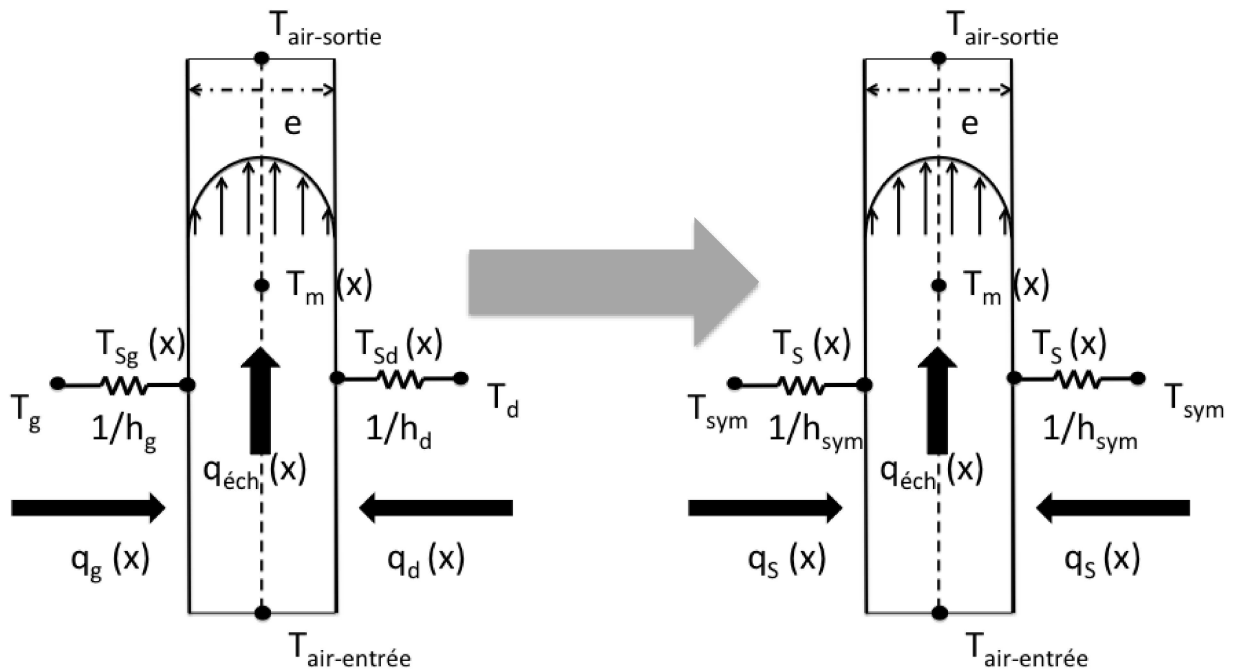


Figure 2 : Représentation de la configuration asymétrique (à gauche) ramenée à une configuration symétrique (à droite)

On considère que le régime dynamique est établi lorsque le profil de vitesse n'évolue plus. Pour le régime thermique, on ne peut pas utiliser les mêmes considérations car tant que l'on injecte de l'énergie dans le fluide en mouvement, le profil de température continuera d'évoluer. On utilise donc une température adimensionnée définie de la façon suivante :

$$\theta = \frac{T_s(x) - T(x, y)}{T_s(x) - T_m(x)} \quad (2)$$

où  $T_s$  est la température de paroi et  $T_m$  la température moyenne du fluide sur une section du conduit pondérée par la vitesse locale  $u(y)$ . C'est cette température de mélange que l'on utilise

pour caractériser l'enthalpie du fluide à la position axiale  $x$ . Elle nous servira à définir le coefficient d'échange thermique entre la paroi et le fluide:

$$h_{ech}(x) = \frac{q_s(x)}{T_s(x) - T_m(x)} \quad (3)$$

Avec ce coefficient d'échange, on définit le nombre de Nusselt à partir du diamètre hydraulique  $D_h$ :

$$Nu = \frac{h_{ech} \cdot D_h}{\lambda} \quad (4)$$

Le bilan énergétique fait apparaître une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{2lh_{ech}}{\dot{m} \cdot Cp} (T_s(x) - T_m(x)) \quad (5)$$

avec  $\dot{m} = \rho \cdot S \cdot U$ , correspondant au débit massique (kg/s).

Par ailleurs, une configuration asymétrique et sa configuration symétrique correspondante sont reliées par la relation suivante :

$$T_s(x) = \frac{T_{sg}(x) + T_{sd}(x)}{2} \quad (6)$$

Cette hypothèse est très proche du théorème formulé par Nield [9] et aboutit au même constat : on peut définir un nombre de Nusselt indépendant du caractère symétrique ou asymétrique des conditions de chauffage. En effet, l'article de Nield traite du problème de la convection forcée d'un fluide entre 2 parois proches soumises à des conditions de flux (ou de température) uniformes mais différentes selon la surface. Il propose une réflexion sur la façon dont le nombre de Nusselt doit être défini et démontre le théorème suivant : « Si le profil de vitesse est symétrique par rapport à l'axe du conduit, la valeur du nombre de Nusselt calculée à partir de la moyenne des flux et la moyenne des températures de surface est indépendante du ratio des flux aux parois. Cette valeur est ainsi identique à celle obtenue dans une configuration de chauffage symétrique. »

## 3.2. Configuration asymétrique

### 3.2.1. Système d'équations

En réalisant un bilan thermique dans une zone infinitésimale de la lame d'air, on obtient une équation différentielle du 1er ordre que l'on peut résoudre. On obtient alors l'évolution de la température  $T_m(x)$  de l'air sous la forme d'une fonction exponentielle décroissante [1].

Les conditions aux limites imposées sont des conditions de Fourier. Nous nous focalisons sur le cas particulier où les coefficients de convection  $h_g$  et  $h_d$  relatifs respectivement aux parois de gauche et de droite sont égaux à un même coefficient de convection  $h$  et les températures ambiantes  $T_g$  et  $T_d$  sont différentes (Figure 3).

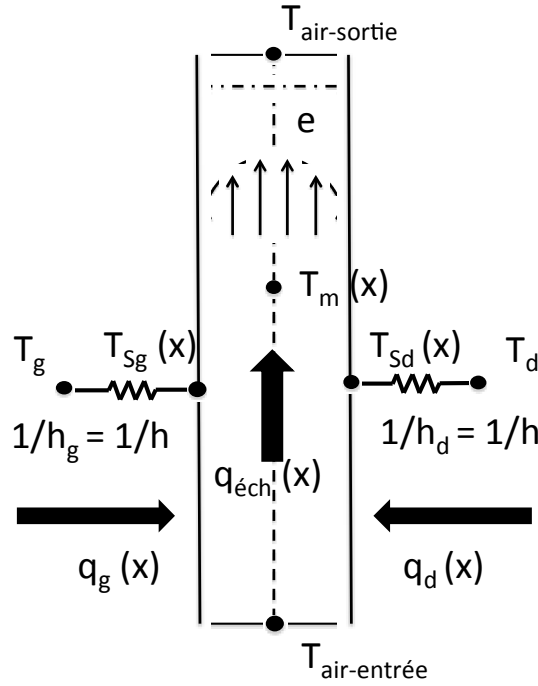


Figure 3 : Représentation de la configuration asymétrique étudiée

Nous présentons ci-dessous l'ensemble du système d'équations. Les 4 premières équations (8-a) correspondent à la configuration symétrique à laquelle on se ramène pour déterminer l'évolution de la température d'air  $T_m(x)$  de notre problème. Cette configuration est caractérisée par une même condition limite de type Fourier imposée aux 2 parois et composée d'un coefficient de convection  $h_{sym}$  et d'une température ambiante  $T_{sym}$ , correspondant à la température maximale que l'air peut atteindre en se réchauffant. On la détermine en considérant que le système devient purement conductif (figure 4).  $T_{sym}$  est la moyenne algébrique des températures ambiantes  $T_g$  et  $T_d$  :

$$T_{sym} = \frac{T_g + T_d}{2} \quad (7)$$

Les 3 dernières équations (8-b) correspondent au bilan thermique local et à l'expression de chacun des flux.

$$\begin{aligned}
 T_m(x) &= (T_{air\ entrée} - T_{sym}) e^{-\frac{2l \cdot h_{éch} \cdot h_{sym}}{m \cdot Cp(h_{éch} + h_{sym})} x} + T_{sym} \\
 q_{éch}(x) &= 2h_{sym}(T_{sym} - T_S(x)) = 2h_{éch}(T_S(x) - T_m(x)) & q_{éch}(x) &= q_g(x) + q_d(x) \\
 T_S(x) &= \frac{T_{Sg}(x) + T_{Sd}(x)}{2} & q_g(x) &= h(T_g - T_{Sg}(x)) \\
 & & q_d(x) &= h(T_d - T_{Sd}(x))
 \end{aligned} \quad (8-a) \quad (8-b)$$

$$Nu = \frac{h_{éch} \cdot D_h}{\lambda} = \frac{1 + \frac{140}{17h_{sym}}}{\frac{74}{561} + \frac{1}{h_{sym}}}$$

### 3.2.2. Résolution

Le système est ainsi constitué de 8 équations à 9 inconnues que l'on rappelle :

- les variables de température :  $T_{sd}(x)$ ,  $T_{sg}(x)$ ,  $T_m$  et  $T_S(x)$
- les variables de densité de flux :  $q_g(x)$ ,  $q_d(x)$  et  $q_{éch}(x)$
- les coefficients de convection ;  $h_{éch}$  et  $h_{sym}$

Il nous manque donc une relation pour résoudre le système. Cependant, avant d'aborder ce point, notons que le système peut être réduit à un système de 7 équations à 8 inconnues; dès lors le coefficient  $h_{sym}$  apparaît explicitement dans l'équation relative au bilan thermique :

$$\begin{aligned}
 q_{éch}(x) &= q_g(x) + q_d(x) \\
 2h_{sym}(T_{sym} - T_S(x)) &= h(T_d - T_{sd}(x)) + h(T_g - T_{sg}(x)) \\
 2h_{sym}(T_{sym} - T_S(x)) &= 2h\left(\frac{T_d + T_g}{2} - \frac{T_{sd}(x) + T_{sg}(x)}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{9}$$

Or  $T_S$  est la moyenne des températures de surface et  $T_{sym}$  celle des températures ambiantes. On a donc :

$$h_{sym} = h \tag{10}$$

A ce stade, nous avons complètement caractérisé la configuration symétrique à laquelle on s'est ramené. Cependant les flux et températures au niveau de chacune des parois restent indéfinis. Nous présentons maintenant la relation qui permet de fermer le système et qui constitue notre seconde hypothèse :

$$T_{sd}(x) - T_{sg}(x) = T_{sd\infty} - T_{sg\infty} = \frac{e}{\lambda} \cdot q_{\infty} \tag{11}$$

Nous considérons donc que la différence des températures de paroi est constante et si tel est le cas, on peut facilement obtenir sa valeur en résolvant le système lorsque le régime de chauffage nul est atteint, c'est-à-dire lorsque la température d'air vaut  $T_{sym}$ .

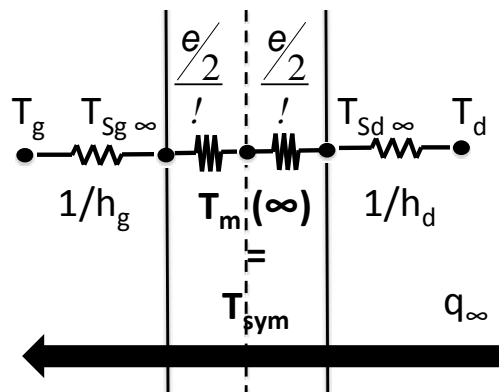


Figure 4 : Représentation du problème en régime de chauffage nul

### 3.2.3. Simulations numériques

sim.	débit massique (kg.s <sup>-1</sup> )	T <sub>air-entrée</sub> (K)	T <sub>g</sub> (K)	h <sub>g</sub> (W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup> )	T <sub>d</sub> (K)	h <sub>d</sub> (W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup> )
G	0,01	273	273	1000	293	3,34
F				20		4
H				9		5,29
I				6,67		6,67
G <sub>inv</sub>				3,34		1000
F <sub>inv</sub>				4		20
H <sub>inv</sub>				5,24		9

Tableau 1: Conditions aux limites des simulations G, F, H, I, G<sub>inv</sub>, F<sub>inv</sub>, H<sub>inv</sub>

Les valeurs dans le tableau ci-dessus correspondent au débit massique considéré dans une fenêtre pariétodynamique [2] et les coefficients de la simulation F sont proches de ceux utilisés dans la norme ISO 15099 [10].

Pour valider notre hypothèse (équation 11), nous considérons les simulations ci-dessus (Tableau 1). Ces configurations ont été choisies de façon à ce que, lorsque le régime de chauffage nul est atteint, le flux  $q_\infty$  soit identique tout comme la différence de températures de paroi ( $T_{Sd\infty} - T_{Sg\infty}$ ). Pour cela, la résistance équivalente aux résistances  $1/h_g$  et  $1/h_d$  mises en série doit être identique dans chacune des configurations. Pour l'ensemble des simulations, nous avons donc un flux  $q_\infty$  valant  $28 \text{ W.m}^{-2}$  et une différence de paroi ( $T_{Sd\infty} - T_{Sg\infty}$ ) valant  $11,6 \text{ K}$ . Remarquons que seule la configuration de la simulation I correspond au cas symétrique avec  $h = 6,67 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ . Par ailleurs, nous avons introduit un indice « inv » pour nommer certaines simulations. Cet indice signifie que l'on a juste permuté les valeurs entre les coefficients de convection  $h_g$  et  $h_d$  par rapport à la simulation originale.

## 4. Résultats

Le graphe (figure 5) montre que seule la simulation I présente une différence de températures de paroi constante et égale à  $11,6 \text{ K}$  à partir d'une certaine distance de la zone d'entrée et bien avant que le régime de chauffage nul ne soit atteint.

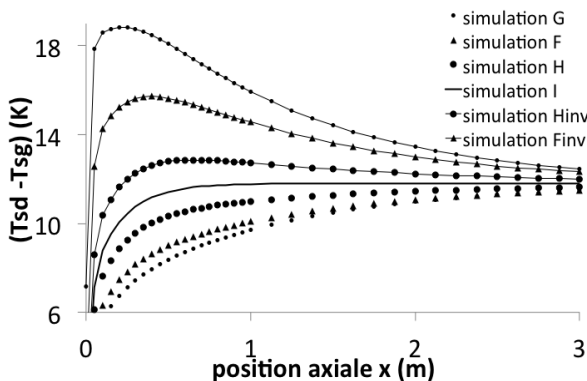


Figure 5 : Evolution de la différence des températures de paroi suivant la position axiale x

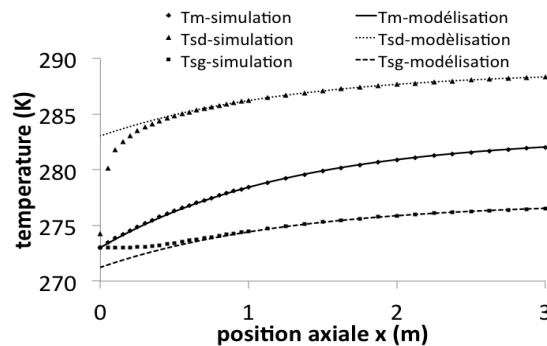


Figure 6 : Comparaison des températures modélisation/numérique

Quant aux autres simulations, la différence de températures de paroi est constante dès lors que le régime de chauffage nul est atteint. En amont de cet état, la différence des températures

de surface varie selon la position axiale. Elle est supérieure à  $(T_{Sd\infty} - T_{Sg\infty})$  lorsque  $h_g > h_d$ , et inférieure pour  $h_g < h_d$ . Plus l'asymétrie introduite dans les valeurs des coefficients de convection  $h_g$  et  $h_d$  est importante, plus la différence des températures de surface est éloignée de sa valeur en régime de chauffage nul.

La figure 6 représente une comparaison des températures de mélange, des parois gauche et droite en fonction de l'axe vertical, obtenues numériquement et théoriquement. A partir de l'obtention du régime thermiquement établi, les profils de température issus des simulations sont très proches de ceux issus de la modélisation, ce qui permet de conclure sur la fiabilité de notre modèle.

## 5. Conclusion

- Le problème asymétrique peut être résolu en considérant séparément:

**La composante symétrique du problème :** l'hypothèse fondamentale permet de se ramener à une configuration symétrique dont tous les paramètres sont connus.

**La composante asymétrique du problème :** dans l'hypothèse 2, on suppose que la différence entre les températures de parois est constante en régime thermique établi. Cette hypothèse caractérise ainsi l'asymétrie du chauffage pour la configuration étudiée et permet de connaître les différences en flux et température entre les 2 parois.

- La modélisation du problème rend bien compte de la thermique du canal en convection forcée dans un régime thermique et dynamique établi.

## Références

- [1] F. Gloriant, A. Joulin, P. Tittlein, S. Lassue, Échanges convectifs entre deux parois planes, verticales, soumises à des conditions de type Fourier, Congrès SFT 2013, Gérardmer
- [2] F. Gloriant, P. Tittlein, A. Joulin, S. Lassue, Supply-air Window Paziand®: comparison of two numerical models for integration in thermal building simulation, Conference EPPM, (2012).
- [3] A. Bejan, *Convection Heat Transfer*, Second ed. New-York: Wiley, 1995.
- [4] W. M. Kays and M. E. Crawford, *Convective Heat and Mass Transfer*, Third ed. New-York: McGraw-Hill, 1993.
- [5] J. Padet, *Principes des transferts convectifs*. Paris: Polytechnica, 1997.
- [6] R. K. Shah and A. L. London, *Laminar Flow Forced Convection in Ducts, Advanced in Heat Transfer*, Academic Press. New-York, 1978.
- [7] S. Sideman, D. Luss, and R. E. Peck, Heat transfer in laminar flow in circular and flat conduits with (constant) surface resistance, *Appli. Sci. Res.*, vol. A14, p. 157-171, 1964.
- [8] H. J. Hickman, An asymptotic study of the Nusselt-Graetz problem, Part 1: Large x behavior, *J. Heat Mass Transfer*, vol. 96, p. 354-358, 1974.
- [9] D. A. Nield, Forced convection in a parallel plate channel with asymmetric heating, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, no. 25, pp. 5609–5612, décembre 2004.
- [10] ISO-15099, Thermal performance of windows, doors and shading devices - detailed calculations, Technical report, 2003.

## Remerciements

Ce travail est financé dans le cadre du programme européen INTERREG IFORE (<http://www.ifore.eu>).