

# Sur la similarité entre la convection thermogravitaire et la convection thermomagnétique en zéro gravité dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée remplie d'un fluide paramagnétique.

Saber HAMIMID<sup>1,2\*</sup>, Messaoud GUELLAL<sup>2</sup>, Madiha BOUAFIA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées, Rue DRISSI Yahia - Bouira 10000, Algérie

<sup>2</sup>Laboratoire de Génie des Procédés Chimiques, Université de Sétif 1, Route Maâbouda, Sétif 19000, Algérie

<sup>3</sup>Laboratoire de Mécanique et Energétique d'Evry, Université d'Evry Val d'Essonne, France.

\* (auteur correspondant : sab\_hamimid@yahoo.fr)

**Résumé** - Dans ce travail, on simule la convection thermomagnétique en apesanteur avec l'approximation LMN en absence de pesanteur, dans une cavité carrée différentiellement chauffée et en présence d'un champ magnétique externe généré par deux spires. Nous avons ainsi mis en évidence l'existence d'une valeur seuil du champ magnétique, d'une position des deux spires de rayon donné et des directions des courants électriques pour que le mouvement convectif crée soit similaire à celui de la convection thermogravitaire.

## Nomenclature

$b$	champ magnétique, <i>Tesla</i>		
$b_0$	champ magnétique maximal $\mu_{m0}I / 2R$ , <i>Tesla</i>		
$B$	champ magnétique adimensionnel		
$Cp$	chaleur spécifique à pression constante, $J.kg^{-1}.k^{-1}$		
$g$	accélération de la pesanteur $m.s^{-2}$		
$H$	hauteur de la cavité, $m$		
$k$	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$		
$\bar{p}$	pression thermodynamique adimensionnelle		
$\Pi$	pression dynamique adimensionnelle $p - \bar{p} + \rho_0 g y / \rho_0 (\alpha_0 / H)^2$		
$Pr$	nombre de Prandtl $\nu / \alpha$		
$R$	rayon de la spire, $m$		
$Ra$	nombre de Rayleigh, $g \beta \Delta T H^3 / (\nu \alpha)$		
$Ram$	nombre de Rayleigh magnétique $\beta \Delta T H^2 \chi_0 B_0^2 / \mu_m \nu \alpha$		
$t$	temps adimensionnel		
$T$	température dimensionnelle, $K$		
$U, V$	vitesse adimensionnelles		
$X, Y$	coordonnées adimensionnelles		
		<i>Symboles grecs</i>	
		$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
		$\beta$	coefficient d'expansion thermique: $K^{-1}$
		$\Delta T$	différence de température, $K$
		$\varepsilon$	Parametre de Boussinesq $\varepsilon = \Delta T / 2T_0$
		$\mu$	viscosité dynamique du fluide, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
		$\mu_m$	perméabilité absolue du vide, $H.m^{-1}$
		$\chi_m$	susceptibilité magnétique
		$\nu$	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
		$\rho^*$	densité du fluide, $Kg.m^{-3}$
		$\theta$	température adimensionnelle
		<i>Indices et exposants</i>	
		$avg$	valeur moyenne
		$0$	état de référence
		$c$	Froid
		$h$	Chaud
		$*$	paramètres dimensionnels
		<i>Abréviations</i>	
		$BS$	Boussinesq
		$LMN$	Low Mach Number

*PC* Propriété constant  
*PV* Propriété variable

*Therg* Thermogravitaire  
*Therm* Thermomagnétique

## 1. Introduction

L'application d'un gradient de champ magnétique peut, sous certaines conditions, modifier l'écoulement de l'air en raison des propriétés paramagnétiques de l'oxygène [1]. Que ce soit pour le diamagnétisme ou le paramagnétisme, l'expression de la force magnétique appliquée aux matériaux linéaires paramagnétiques et diamagnétiques s'exprime sous la forme dite force de Kelvin [2] :

$$\vec{F}_{kelvin} = \frac{\chi_m^*(T)}{2\mu_m^*} \nabla b^2 = \frac{\rho \chi^*(T)}{2\mu_m^*} \nabla b^2 \quad (1)$$

Où  $b$  est l'induction magnétique de la distribution de champ en absence de substance magnétique. On peut rapporter les susceptibilités magnétiques à l'unité de masse :

$$\chi^* = \chi_m^* / \rho^* \quad (2)$$

La susceptibilité paramagnétique est inversement proportionnelle à la température absolue.

$$\chi^* = C / T \quad (3)$$

Un gradient de température dans le fluide conduit à une variation spatiale de cette force de volume qui crée le mouvement même dans un environnement à zéro gravité ( $g = 0$ ) et qui peut être inclus en tant que force extérieure supplémentaire (force de volume) dans les équations de Navier-Stokes comme suit :

$$\vec{F}_{kelvin} = \frac{\chi_m^*(T)}{2\mu_m^*} \nabla b^2 = \frac{\rho^* \chi^*(T)}{2\mu_m^*} \left( \frac{\partial b^2}{\partial x} \vec{ex} + \frac{\partial b^2}{\partial y} \vec{ey} \right) \quad (4)$$

Nous proposons ici d'étudier numériquement la convection naturelle dans l'air dans une cavité carrée différentiellement chauffée en présence d'un champ magnétique externe non uniforme créé par deux spires parcourues par des courants électriques, dans des conditions d'apesanteur, où le terme moteur du mouvement est la force de Kelvin.

L'influence du rayon et de la position des deux spires, la direction des courants électriques et la valeur du champ magnétique sont examinées pour une différence de température de 10 K, afin de créer un mouvement de convection naturelle très semblable à celui de la convection thermogravitaire.

## 2. Formulation mathématique

La géométrie spatiale considérée est illustrée sur la figure 1. Il s'agit d'une cavité carrée de côté  $H$  contenant de l'air considéré comme un gaz compressible et une substance paramagnétique, les parois verticales sont maintenues à des températures  $T_h$  et  $T_c$  (avec  $T_h > T_c$ ), tandis que les parois horizontales sont supposées adiabatiques. Nous supposons en plus que la cavité est imprégnée, de manière symétrique à  $y = H$  et à  $y = 0$ , par un champ magnétique non uniforme créé par deux spires horizontales coaxiales de rayon  $R$  comme indiqué sur la figure 1.

L'induction magnétique produite par la spire est calculée en utilisant la loi de Biot-Savart :

$$\vec{b} = \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_{\text{spire}} \frac{I d\vec{S} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (5)$$

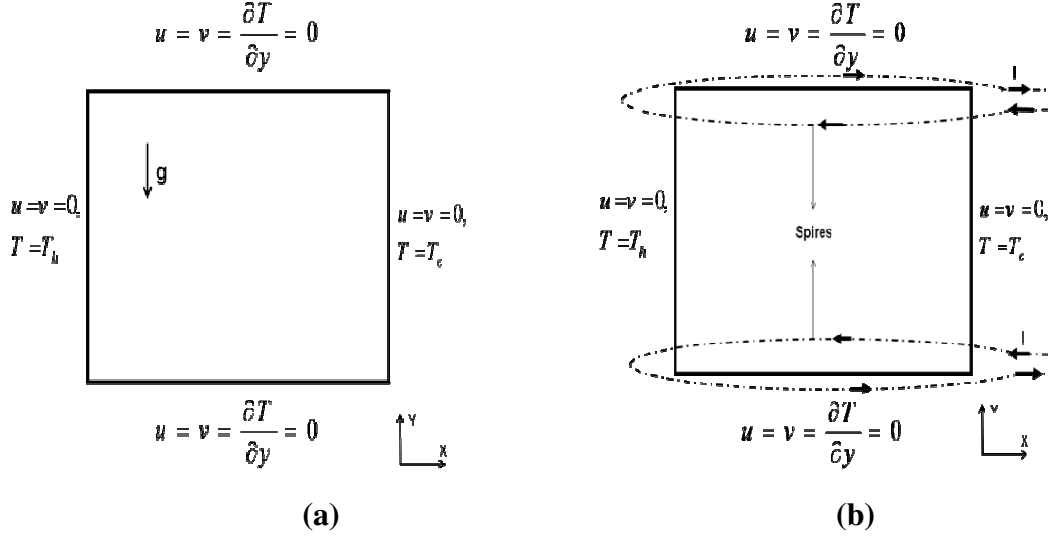


Figure 1 : configuration physique étudiée, **(a)** : convection thermogravitaire, **(b)** : convection thermomagnétique en zéro gravité.

Où  $I$  est l'intensité du courant électrique,  $r$  est la distance à partir d'un élément  $dS$  de la spire et  $dS$  une longueur élémentaire de la spire.

Au voisinage de l'axe de la spire, on peut donner une expression approximative du champ magnétique et qui est valable pour le cas où  $H/2 \ll R$ . Dans ce cas les expressions des composantes du champ magnétique créé par une spire dans le plan  $(xoy)$  sont données par (voir figures 2 et 3) :

$$b_x = -\frac{x}{2} \frac{db_y}{dy} = \frac{3}{2} xy \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + y^2)^{5/2}} \quad (6a)$$

$$b_y = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \quad (6b)$$

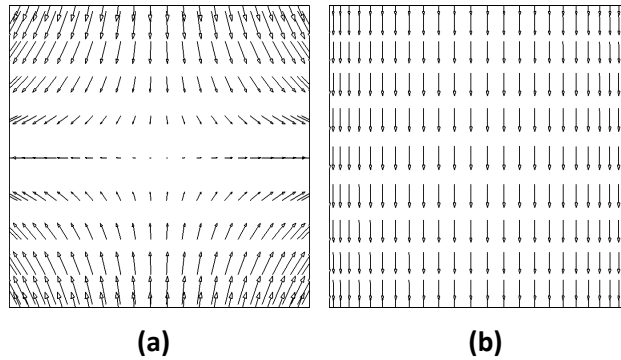


Figure 2 : vecteur champ magnétique **(a)** et vecteur force magnétique **(b)** pour le cas de la convection thermomagnétique en  $g=0$ .

Dans le cas d'une configuration bidimensionnelle (échange convectif négligé selon la direction  $Z$ ), (figure 1.b), le système d'équations de conservation est celui d'un écoulement à

faible nombre de Mach donné par Paolucci [3], auquel on ajoute le terme de la force de volume de Kelvin et l'équation de la susceptibilité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial X} + \frac{\partial \rho V}{\partial Y} = 0 \quad (7)$$

$$\rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial X} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \mu \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{1}{3} \nabla \mu \nabla \bar{V} \right\} + Ra_m \text{Pr} \frac{(\chi \rho - 1) \partial B^2}{4 \varepsilon \partial X} \quad (8)$$

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{1}{3} \nabla \mu \nabla \bar{V} \right\} + Ra_m \text{Pr} \frac{(\chi \rho - 1) \partial B^2}{4 \varepsilon \partial Y} \quad (9)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial}{\partial X} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{\gamma - 1}{2 \varepsilon \gamma} \frac{d \bar{P}}{dt} \quad (10)$$

$$\rho = \frac{\bar{P}}{(2 \varepsilon T + 1)} \quad (11)$$

$$\chi = \frac{1}{2 \varepsilon T + 1} \quad (12)$$

Les équations précédentes (7-12) contiennent une inconnue supplémentaire  $\bar{p}$  (la pression thermodynamique). Afin de fermer le problème, il faut une équation supplémentaire traduisant l'état initial, c'est l'équation de conservation de la masse:

$$\bar{P} = \frac{\int_{\Omega} d \Omega}{\int_{\Omega} \frac{1}{2 \varepsilon \theta + 1} d \Omega} \quad (13)$$

Où  $\Omega$  est le volume du système.

La deuxième équation supplémentaire est donnée par le calcul du terme  $\frac{d \bar{P}}{dt}$ . L'équation de conservation de masse (7), associée à l'équation d'énergie (10) et l'équation d'état (11) permet d'écrire  $\frac{d \bar{P}}{dt}$  sous la forme :

$$\frac{d \bar{P}}{dt} = 2 \varepsilon \gamma \cdot \frac{1}{\int_{\Omega} d \Omega} \cdot \int_S k \frac{\partial T}{\partial n} dS \quad (14)$$

On admet que la viscosité dynamique est prise soit constante  $\mu(T) = \mu(T_0) = \mu_0$  soit donnée par la loi de Sutherland :

$$\frac{\mu^*(T)}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S_{\mu}}{T + S_{\mu}} \quad (15)$$

Avec  $T_0 = 273k$ ,  $S_{\mu} = 110.5K$ ,  $\mu_0 = 1.68 \times 10^{-5} kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ , [4].

La conductivité thermique est donnée par :

$$k^*(T) = \mu^*(T) \frac{C_{p0}^* k_0^*}{\nu_0^*} = \frac{\mu^*(T)}{\text{Pr}} \quad (16)$$

Les équations précédentes sont rendues adimensionnelles en utilisant les variables adimensionnées suivantes :

$$\tau = \frac{\alpha t}{H^2}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{uH}{\alpha}, \quad V = \frac{vH}{\alpha}, \quad \Pi = \frac{p'H^2}{\rho\alpha^2}, \quad \bar{P} = \frac{\bar{p}}{p_0}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T} \quad \text{ou :}$$

$$\Delta T = T_H - T_C, \quad T_0 = \frac{T_H + T_C}{2}, \quad \chi = \chi^* / \chi_0; \mu_m = \mu_m^* / \mu_{m0}; B = \frac{b}{b_0}$$

Pour la résolution numérique, un code de calcul est confectionné en fortran où les différentes équations sont discrétisées moyennant la procédure numérique des volumes finis et le schéma d'approximation utilisé est celui de la "loi de puissance" (Power Law) [5]. Le système d'équations ainsi discrétisées est résolu par l'algorithme "SIMPLER". La technique ligne par ligne, qui combine entre une méthode directe (algorithme de thomas) et une méthode itérative (gauss Seidel), est utilisée pour la résolution des équations algébriques.

### 3. Résultats et discussions

Pour un nombre de Rayleigh de la convection naturelle fixé à  $10^6$ , une différence de température  $\Delta T = 10$  K pour le cas faible nombre de Mach et une hauteur  $H = 9.75 \cdot 10^{-2} m$ , plusieurs cas sont à considérer :

Le premier cas correspond à la convection naturelle dans l'approximation de Boussinesq, le deuxième cas à la convection thermomagnétique en zéro gravité, également dans l'approximation de Boussinesq ; le dernier cas concerne la convection thermomagnétique en zéro gravité dans le cadre du model faible nombre de Mach (*LMN*). Dans tous les cas la simulation numérique a été réalisée en supposant que les propriétés thermophysiques (viscosité, conductivité) sont constantes ou variables suivant la loi de Sutherland.

Le choix d'une valeur assez élevée du rayon des spires ( $R=4H$ ) est compatible avec la condition  $H/2 \ll R$  pour lesquelles les expressions du champ magnétique (6a) et (6b) sont valables. Cette valeur nous permet également d'obtenir une distribution uniforme de la force de Kelvin au niveau de la cavité (vecteurs force magnétique semblables à ceux du champ de force de gravité, (voir figure 2b)).

Les différents tests numériques effectués pour plusieurs valeurs du champ magnétique et du rayon des spires ont montré l'existence de valeurs seuils pour lesquelles la convection thermomagnétique à zéro gravité se rapproche à la convection thermogravitaire :

$R = 4H$  pour le rayon des deux spires

$B_0 = 1.4$  Tesla (qui correspond à un nombre de Rayleigh magnétique égale à  $Ra_m = 3019832.075$ ).

Les résultats représentatifs illustrant le nombre de Nusselt moyen, (tableau 1), l'évolution du nombre de Nusselt local au niveau des parois actives (Fig.3), l'évolution des profils de la température sur le plan médian horizontal de la cavité (Fig.4), les profils de température sur le plan médian vertical, (Fig.5), la distribution de la température au niveau des paroi adiabatiques supérieure et inférieure (Fig.6), les profils de vitesses horizontales dans le plan médian vertical, (Fig.7), les profils de vitesses verticales dans le plan médian horizontal (Fig.8), et enfin la distribution des lignes de courant et des isothermes (Fig. 9), montrent une superposition des profils jusqu'à 99%. Ces profils représentent les régimes thermique et dynamique de la convection thermogravitaire et ceux de la convection thermomagnétique en zéro gravité, dans l'approximation Boussinesq et dans le cadre du modèle faible nombre de Mach.

Cas test	Therg (BS,Ra=10 <sup>6</sup> )	Therm (BS,g=0,Ram=3017014)	Therm (LMN, PC)	Therm (LMN, PV)
$Nu(h)$	8.821	8.8209	8.8207	8.8212
$Nu(c)$	8.821	8.8208	8.821	8.8203
$\psi_{\max}$	16.844	16.783	16.788	16.790

Tableau 1 : valeurs moyennes du nombre de Nusselt obtenu aux parois actives et valeur maximale de la fonction de courant pour les différents cas étudiés.

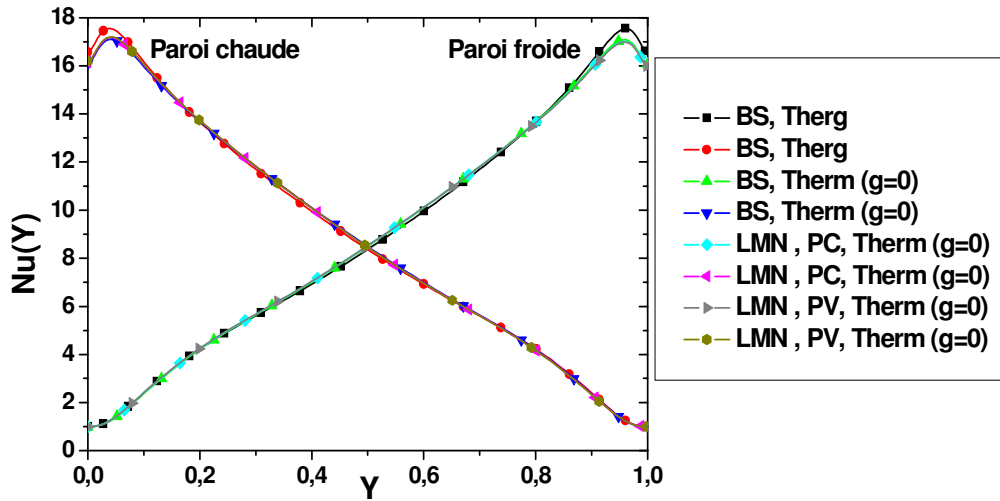


Figure 3 : Profils du nombre Nusselt aux parois actives pour différentes situations.

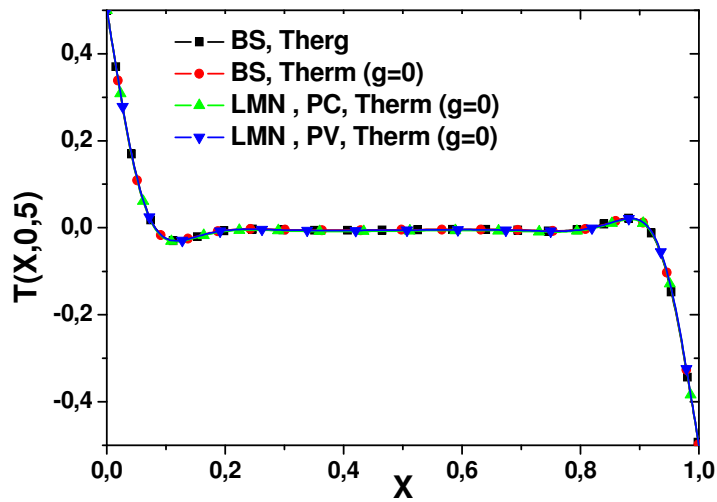


Figure 4 : Distribution de la température sur le plan médian horizontal de la cavité.

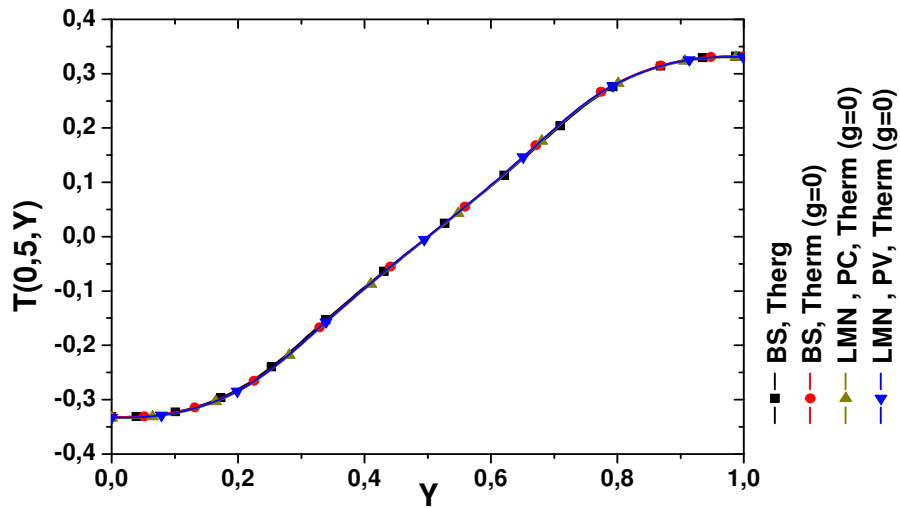


Figure 5 : Profils de la température sur le plan médian vertical.

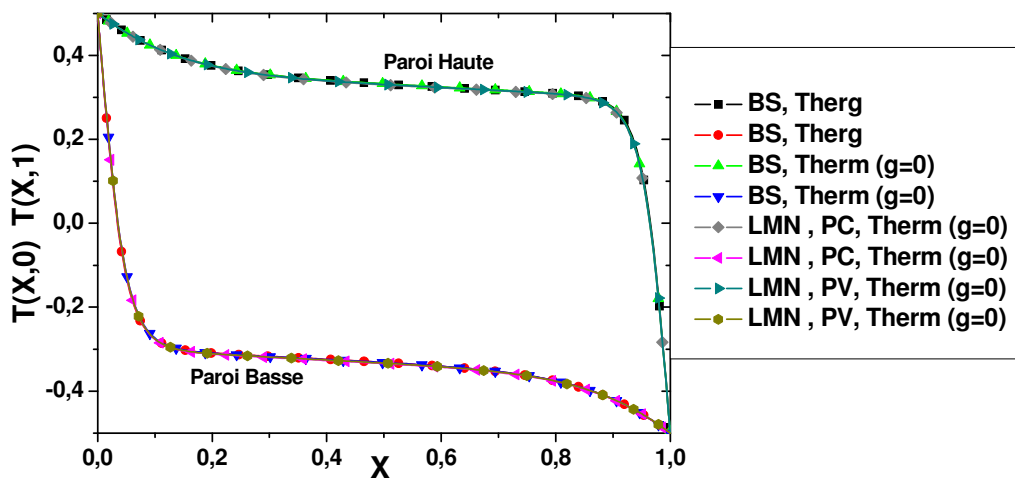


Figure 6 : Distribution de la température aux parois adiabatiques supérieure et inférieure.

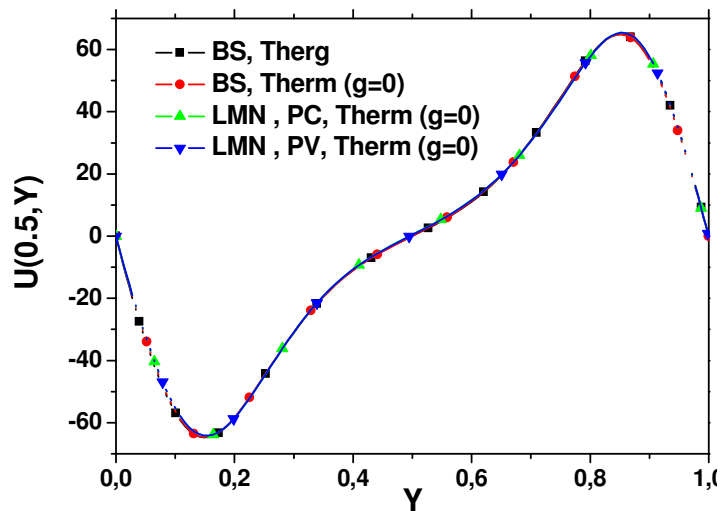


Figure 7 : Profils des vitesses horizontales dans le plan médian vertical.

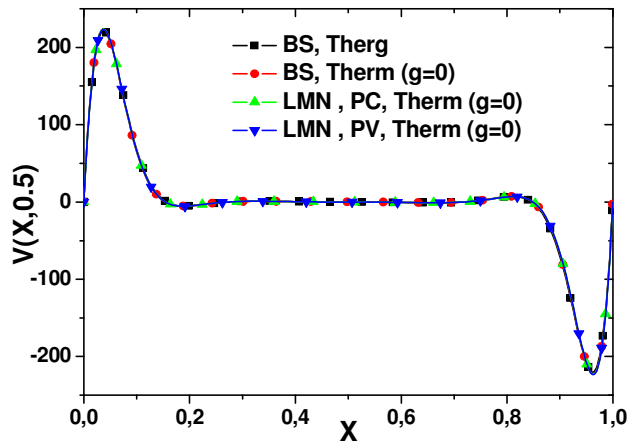


Figure 8 : Profils des vitesses verticales dans le plan médian horizontal.

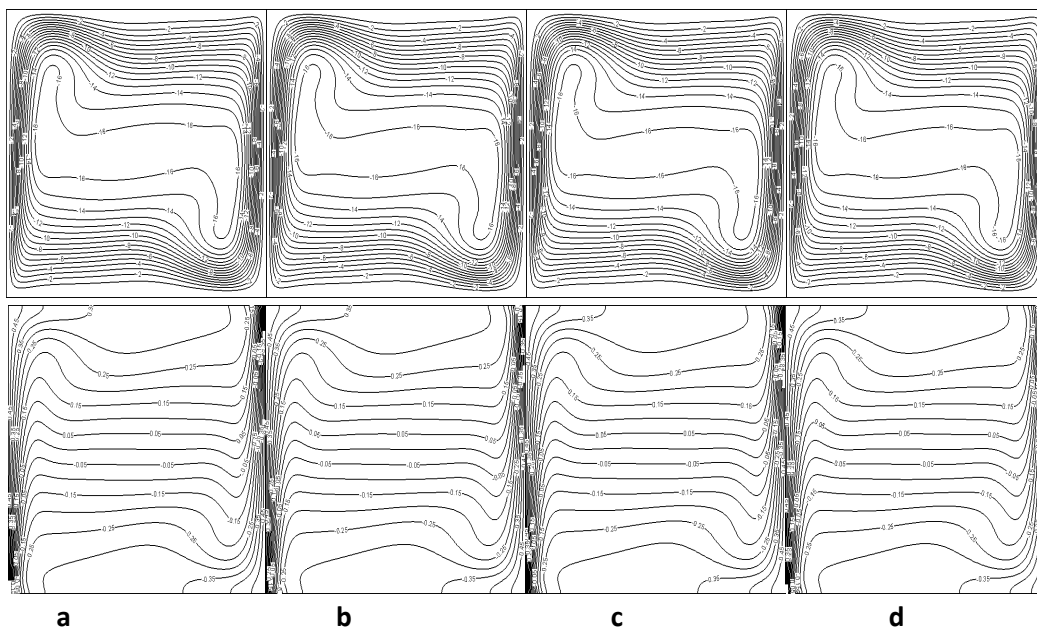


Figure 9 : Lignes de courant (Haut) et isothermes (Bas) (a) : thermogravitaire, (b) : themomagnétique, (c) : LMN, PC et (d) : LMN, PV

## 4. Conclusion

L'étude numérique réalisée a permis de comparer les effets de la convection thermogravitaire à ceux de la convection thermomagnétique à zéro gravité. Le mouvement convectif créé en apesanteur est semblable à celui créé par les effets thermogravitaires.

### Références

- [1] H. Ozoe, Magnetic convection, *Imperial College Press, London* (2005).
- [2] Bai B., Yabe A., Qi J. and Wakayama N. I., *AIAA Journal*, 37-12 (1999), 1538-1543.
- [3] Paolucci, S., On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations. *Technical Report* 82-8257 (1982), Sandia National Laboratories
- [4] White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill 1974.
- [5] Patankar S.V., *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere, Washington, D.C., (1980).