

Modélisation d'une cellule contenant un matériau à changement de phase soumis à un flux thermique pulsé

Jean BATINA^{1*}, Tarik KOUSKSOU¹, Serge BLANCHER¹

¹ Laboratoire de Thermique, Energétique et Procédés (LaTEP), Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA), BP 1155 – 64013 Pau, France.

* (auteur correspondant : jean.batina@univ-pau.fr)

Résumé

Un modèle mathématique a été développé pour étudier la fusion d'un matériau à changement de phase (MCP) à l'intérieur d'une cavité 2D. Le problème a été traité pour un chauffage par le bas à température constante, en supposant que le reste de la cavité est parfaitement isolé. L'écoulement thermo-convectif dans la zone liquide est simulé à l'aide de la méthode spectrale - collocation spécialement adaptée à cette situation. Pour une cellule rectangulaire, les résultats obtenus montrent que l'écoulement dans la phase liquide passe progressivement d'un régime multicellulaire à un régime unicellulaire. Nous montrons aussi l'évolution du nombre de Nusselt et de la fraction liquide dans la cavité durant le processus du changement de phase.

Nomenclature

c_p : capacité calorifique ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
 g : accélération de la pesanteur ($m.s^{-2}$)
 h : position de l'interface solide-liquide (m)
 k : conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
 L : chaleur latente ($J.kg^{-1}$)
 Nu : nombre de Nusselt
 P, Q : polynômes de Tchebichev
 T : température (K)
 t : temps (s)
 (x, y) : coordonnées (m)
 (u, v) : composante de la vitesse ($m.s^{-1}$)

Symboles grecs:

β : coefficient de dilatation (K^{-1})
 ψ : fonction de courant
 ρ : masse volumique $kg\ m^{-3}$
 ν : viscosité dynamique ($m^2.s^{-1}$)
 ω : vortacité

Indices:

F : Fusion
 L : liquid
 P : paroi
 S : solide

Introduction

L'objectif de ce travail consiste à étudier numériquement le comportement dynamique et thermique du processus de stockage/déstockage d'énergie d'un matériau (corps pur) à changement de phase (MCP) soumis à un flux thermique instationnaire. Une cellule isolée est analysée afin de comprendre le mécanisme de l'ensemble d'un système de cellules. Le MCP considéré se trouve confiné dans un domaine 2D fermé, dont les parois sont thermiquement isolées sauf la paroi inférieure chauffée à température variable ou non dans le temps (Fig.1). Au cours de ce processus instationnaire, le matériau dans la cellule se présente sous une ou deux phases, solide/liquide. L'interface de séparation des deux phases est une des inconnues déterminante du problème. Les phénomènes instationnaires dynamiques et thermiques associés à une température pulsée seront présentés, discutés et comparés à ceux obtenus dans la littérature [1]. Les équations instationnaires de Navier-Stokes, de l'énergie et de l'évolution de la frontière

liquide - solide sont résolues numériquement en espace par une méthode spectrale - collocation [2] spécialement adaptée à cette situation. Un schéma de Crank - Nicholson permet l'intégration dans le temps.

2. Modélisation

Une coupe de la cellule permet de travailler en coordonnées cartésiennes dans un domaine bidimensionnel plan (Figure 1).

Phase liquide : Les écarts de températures considérés sont supposés suffisamment faibles pour justifier l'hypothèse de Boussinesq dans le domaine liquide du MCP. Le fluide est supposé newtonien et isotrope, l'écoulement laminaire et incompressible. Les équations de Navier-Stokes sont explicitées en formulation (ω, ψ) comme suit :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - g\beta \frac{\partial T_L}{\partial x} \quad (1)$$

$$\rho_L C_{P_L} \left(\frac{\partial T_L}{\partial t} + u \frac{\partial T_L}{\partial x} + v \frac{\partial T_L}{\partial y} \right) = k_L \left(\frac{\partial^2 T_L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} \right) \quad (2)$$

$$\text{avec : } \omega = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad \text{et : } u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

Phase solide : Dans la partie solide, nous résolvons l'équation de diffusion :

$$\rho_S C_{P_S} \frac{\partial T_S}{\partial t} = k_S \left(\frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_S}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Frontière solide - liquide : L'évolution temporelle de l'interface $h(x,t)$ solide - liquide est donnée par [3] :

$$\rho_S L \frac{\partial h}{\partial t} = \left[k_L \left(\frac{\partial T_L}{\partial y} \right)_p - k_S \left(\frac{\partial T_S}{\partial y} \right)_p \right] \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (5)$$

Conditions aux limites :

Conditions dynamiques : Pour simplifier, les conditions dynamiques porteront sur la vitesse, ce qui entrainera immédiatement des conditions sur la fonction de courant ψ ($u = v = 0$ sur toutes les frontières solides)

Conditions thermiques : Parois latérales et paroi supérieure adiabatiques. Paroi inférieure chauffée à une température constante: $T(x,0)=T_0$. Frontière h : température de fusion du MCP: T_F

La résolution en espace de ces équations est réalisée au moyen de la méthode spectrale - collocation. Les fonctions tourbillon ω , de courant ψ et température T tronquées à des ordres de développement N_x selon l'axe x et N_y selon y , sont projetées sur les fonctions d'essais comme suit :

$$f(x, y, t) = \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_y} f_{kl}(t) P_l(y) Q_k(x) \quad (6)$$

où $P_l(y)$ et $Q_k(x)$ sont des bases polynomiales construites à partir des polynômes de Tchebychev et $f(x,y,t)$ représente ou h , ψ ou T (ω est calculé au moyen de ψ). Pour le cas de la fonction h , il n'y a pas de dépendance en y . Dans le but de mettre en œuvre une méthode spectrale on utilise la transformation de Landau [4] dans les deux phases du MCP pour se ramener au domaine $[-1,1] \times [-1,1]$. L'algorithme utilisé, résout séquentiellement à chaque pas de temps, successivement les équations de l'interface, de l'énergie puis de Navier-Stokes.

3. Résultats

La cellule est supposée de dimensions $X=5\text{cm}$ et $Y=2.5\text{ cm}$ (figure 1). Les résultats présentés correspondent à de l'eau initialement sous forme de glace à température uniforme $T_0 = -3\text{ }^\circ\text{C}$. A l'instant $t=0$, la paroi inférieure est portée à la température $T_p=20\text{ }^\circ\text{C}$, les autres parois de la cellule sont supposées être adiabatiques. Les constantes physiques de l'eau liquide sont déterminées à une température moyenne de $10\text{ }^\circ\text{C}$. Les calculs ont été effectués pour différents ordres de développement, nous présentons ici les résultats obtenus avec $N_x=62$ et $N_y=18$ polynômes de Tchebychev. Le pas de temps choisi est de 1s. Dans cette étude nous avons

introduit le nombre de Rayleigh instantané $Ra(t) = \frac{g\beta h_m^3 (T_0 - T_F)}{\alpha\nu}$ basé sur l'épaisseur

moyenne $h_m(t)$ de la couche liquide, afin d'établir le seuil critique pour l'apparition de la convection. Il est évident que le processus de la fusion dans la cavité est régie par les cinq paramètres sans dimension : le nombre de Rayleigh instantané (Ra), le nombre de Prandtl

($Pr=9.45$) et le nombre de Stefan $Ste = \frac{c_p (T_0 - T_F)}{L} = 0.25$. Nous analysons ci-dessous

l'évolution du champ dynamique et thermique dans le MCP en fonction de la température imposée à la paroi chauffée ainsi que la variation temporelle du nombre de Nusselt et l'interface liquide-solide.

Au début, quand apparaît la phase liquide, le transfert de chaleur à travers la cellule se fait uniquement par conduction. L'interface liquide-solide demeure droite et parallèle au bas de la cellule. Les isothermes sont également des lignes droites, comme on peut vérifier sur la Fig.2 présentant à gauche les lignes de courant et à droite les isothermes instantanées. Aucun écoulement n'est détecté dans la région liquide hormis, un très faible résidu de l'ordre de 10^{-16} sans signification physique, attribué à la précision de la machine. Les couches de fluide adjacentes à l'interface, plus froides et plus denses, se trouvent situées au-dessus des couches plus chaudes et plus légères au bas de la cellule. Il s'agit là d'une stratification potentiellement instable, ce qui représente l'essentiel du problème classique de Rayleigh-Bénard. Tant que le gradient de température dans la cellule demeure purement vertical, le $g\beta \frac{\partial T}{\partial x}$ dans l'équation (1)

est nul et il n'y a pas d'écoulement. Toutefois à mesure que l'interface progresse, le nombre de Rayleigh Ra augmente avec l'épaisseur de la couche liquide. La stratification devient instable lorsque Ra atteint le seuil critique de 3.10^4 pour le régime de conduction pure sans écoulement, de sorte que la moindre perturbation mécanique ou thermique s'amplifie et initie la convection en rompant l'équilibre thermique horizontal.

On constate que l'écoulement a pour effet de déformer les isothermes, mais l'interface demeure droite encore un moment, avant de commencer à se déformer également sous l'effet de la non uniformité de température consécutive à l'apparition des rouleaux convectifs. Il est intéressant de signaler qu'au début de la distorsion de l'interface au temps $t=1500\text{s}$, on dénombre dans la cavité 11 rouleaux de Bénard dont le sens de rotation alterne de l'un à l'autre. On remarque que la

dynamique de ces rouleaux est la conséquence de l'augmentation de la fraction liquide, et donc de la dynamique de l'interface. Ceci est dû au fait que la rotation des rouleaux de convection force le liquide à absorber de la chaleur en longeant le bas de la cavité avant de remonter pour la céder ensuite à l'interface. Ces résultats sont conformes aux résultats trouvés dans la littérature [1-2]. A mesure que le temps passe, le nombre de rouleaux convectifs dans la cavité diminue par phases successives correspondant toujours à un nombre de rouleaux impairs (correspondant toujours à une symétrie de la solution) jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul rouleau.

La figure 3, représente l'évolution en fonction du temps du nombre de Rayleigh en coordonnées logarithmiques. Après une évolution régulière on observe à partir de $Ra = 2.7 \cdot 10^4$ une modification soudaine du comportement liée à l'apparition de rouleaux convectifs, c'est le Rayleigh critique. La figure 4 présente le nombre de Nusselt moyen au bas de la cavité. En régime conductif, le nombre de Nusselt décroît de façon monotone en $t^{-0.33}$ jusqu'à atteindre une valeur minimale. Ce comportement est typique de tous les problèmes de changement de phase dominés par la conduction. La transition abrupte du régime conductif au régime convectif à $t=1200$ s, lorsqu'on atteint le nombre de Rayleigh critique (2.710^4) est nettement visible sur le graphique. On distingue aussi clairement le maximum relatif au régime convectif puis une diminution en $t^{-0.08}$ à partir de $t=1400$ s accompagnée par la diminution du nombre de rouleaux dans la zone liquide. Sur la figure 5, la fraction liquide totale dans la cavité permet aussi d'apprécier l'évolution du transfert de chaleur d'une façon globale cette fois. L'allure générale de la courbe est également classique, il faut noter que dans la zone purement conductive, la fraction liquide évolue comme $t^{0.36}$ puis à partir de $t=1200$ s dans la zone convective, l'évolution est pratiquement linéaire.

Conclusion

Le modèle physique et la méthode numérique retenus pour étudier l'écoulement thermo-convectif dans la phase liquide d'une part et de suivre l'interface liquide-solide dans la cavité d'autre part, s'est révélée pleinement satisfaisante, conforme aux résultats connus. Les résultats obtenus montrent clairement le passage d'un régime multicellulaire à un régime unicellulaire durant le processus de la fusion. Le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des rouleaux de Bénard a pu être établi à $2.7 \cdot 10^4$ en se basant sur l'épaisseur moyenne de la couche liquide. L'étude doit se poursuivre par une analyse fine des mécanismes dynamiques et thermiques qui conduisent la dynamique des rouleaux convectifs dans cette hypothèse 2D. L'objectif final étant d'étudier l'effet d'une modulation de température instationnaire sur le développement des rouleaux et le stockage/déstockage associé.

Références

- [1] A. H. Guerrero, S.M. Acevesc, E.C. Ruiza, J.C.B. Cervantes, Modeling of the charge and discharge processes in energy storage cells, Energy Conversion & Management 40 1753-1763, (1999)
- [2] J.Batina, M.Batchi, S.Blancher, R.Creff, C.Amrouche. "Convective heat transfer augmentation through vortex shedding in sinusoidal constricted tube". International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow. Vol.19, No.3/4, pp. 374-395, (2009).
- [3] Vasilios Alexiades, Alan D. Solomon, "Mathematical modeling of melting and freezing process", Hemisphere publishing corporation, (1997)
- [4] H. Landau, Heat conduction in a melting solid, Quart. Applied Math. 8, pp 81-94, (1950)

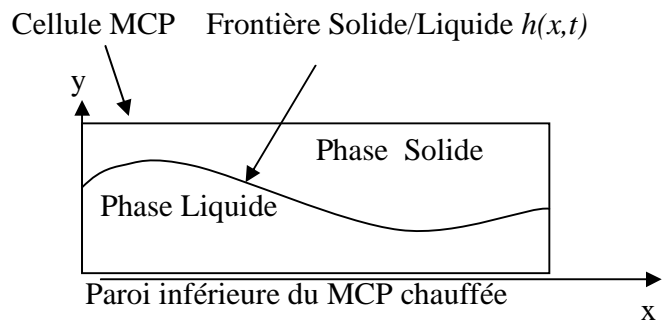


Figure1 : Cellule du MCP
(phases liquide et solide)

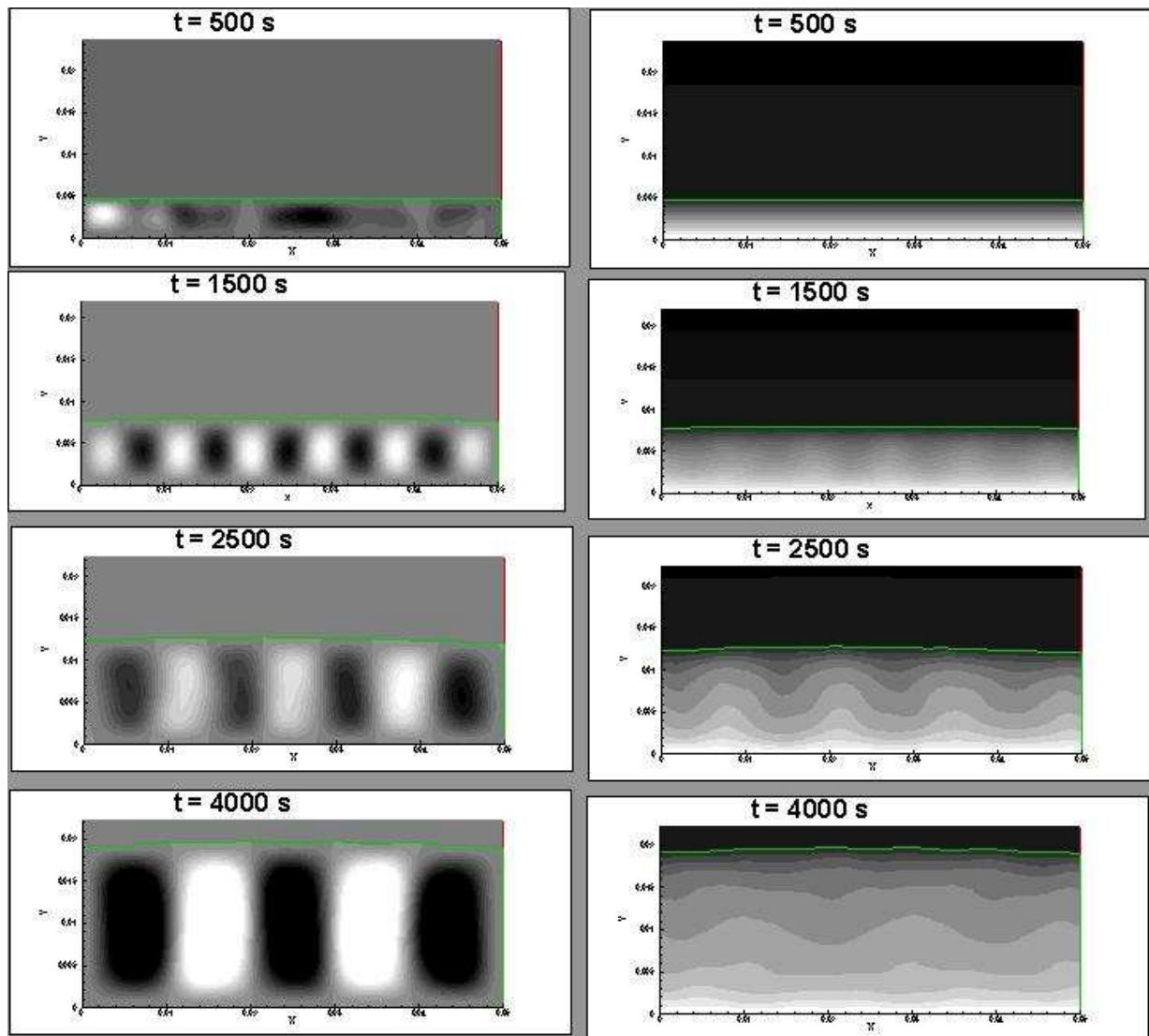


Figure 2 : Lignes de courant et isothermes

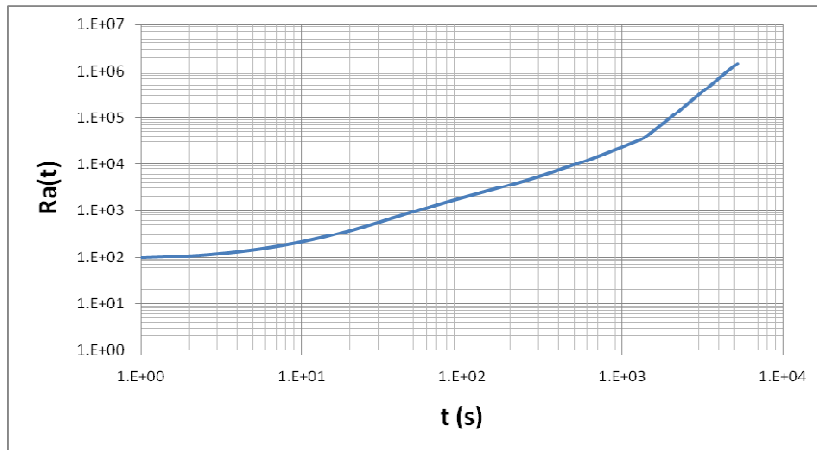


Figure 3 : Nombre de Rayleigh

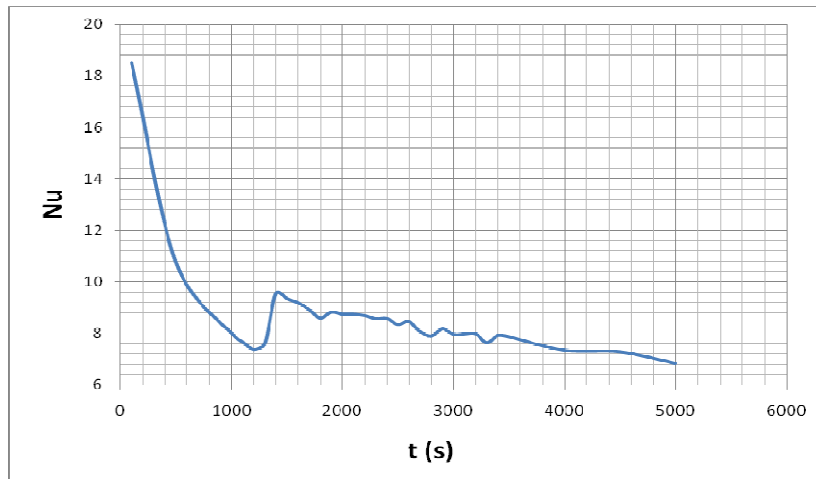


Figure 4 : Nombre de Nusselt

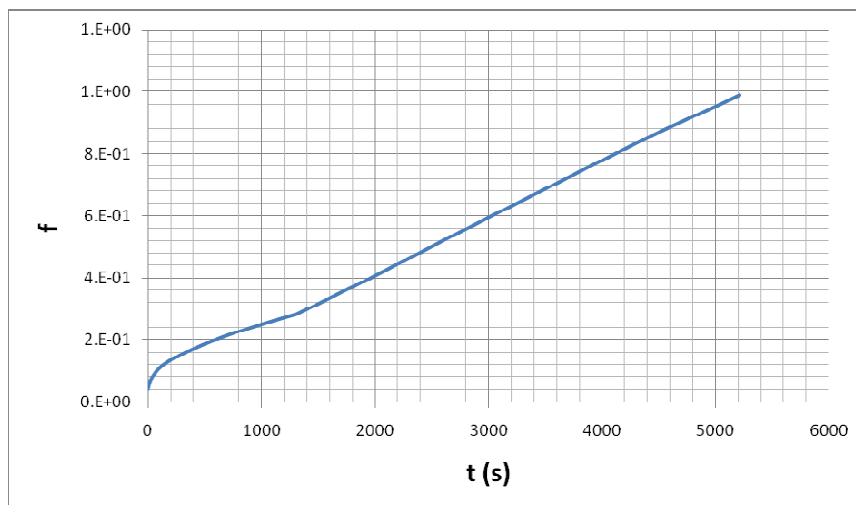


Figure 5 : Fraction liquide