

Modélisation ThermoHydroDynamique THD d'un film de lubrifiant situé à l'interface de deux solides en frottement

Najib LARAQI^{1*}, Mohammad Mehdi RASHIDI², Abderrahmane BAÏRI¹, Juan Mario GARCIA de MARIA³

¹ Laboratoire Thermique Interfaces Environnement, LTIE, EA4415, Université Paris Ouest, Département GTE, 50 Rue de Sèvres, F92410 Ville d'Avray, France

² Mechanical Engineering Department, Engineering Faculty of Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran

³ Universidad Politécnica de Madrid, Departamento de Física Aplicada (EUITI), Ronda de Valencia, 3, E-28012 Madrid, Espagne.

* : auteur correspondant : nlaraqi@u-paris10.fr, ou, nlaraqi@gmail.com

Résumé – Le comportement ThermoHydroDynamique, THD, des films de lubrifiant dépend fortement des conditions de fonctionnement (pression, vitesse), des propriétés physiques du lubrifiant et du niveau de température. Ce comportement est souvent non linéaire. Nous étudions dans cet article le comportement THD d'un film mince situé entre deux plans parallèles en mouvement relatif. Le régime thermique est considéré non établi et les propriétés physiques du lubrifiant sont indépendantes de la température. Une solution analytique est développée pour déterminer l'évolution 2D de la température. On montre que le flux généré par dissipation visqueuse est intégralement transmis aux deux solides, la partie transportée par le fluide est négligeable. Le couplage thermique des deux solides peut être représenté par un modèle de contact équivalent à celui du frottement sec. La résistance thermique de contact est remplacée par la résistance thermique du film.

Nomenclature

c	capacité thermique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	δ	épaisseur du film de lubrifiant, m
L	longueur, m	ρ	masse volumique, $kg.m^{-3}$
L_c	longueur caractéristique, m	μ	viscosité dynamique, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
R	résistance thermique, $m^2.K.W^{-1}$	λ	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
T	température, K	φ	densité de flux, $W.m^{-2}$
u	vitesse locale, $m.s^{-1}$	κ	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
V	vitesse de la paroi, $m.s^{-1}$	<i>Indices</i>	
x, y	coordonnées cartésiennes, m	$1, 2$	milieux 1 et 2
<i>Symboles grecs</i>		c	contact
α	coefficient de partage local	g	généré

1. Introduction

Le comportement thermohydrodynamique THD des films minces rencontrés dans la lubrification est d'un grand intérêt pour de nombreuses applications industrielles telles que : les engrenages, les contacts billes-bagues d'un roulement, les paliers, etc. Compte tenu du faible temps de séjour du film dans ce type de contact, le régime thermique n'est pas établi. Il est donc important de prendre en considération les phénomènes de transport (phénomènes convectifs) qui ont lieu principalement dans la zone d'entrée du lubrifiant dans le contact. De

nombreux travaux ont été consacrés à l'étude du comportement THD d'un lubrifiant dans un palier [1,2]. Les approches théoriques sont souvent basées sur la modélisation numérique de type différences finies, ou éléments finis.

L'étude développée dans cet article vise à proposer un modèle analytique explicite exact pour calculer la distribution bidimensionnelle de la température dans un film mince placé entre deux plans parallèles en mouvement de translation relatif.

2. Modèle analytique

2.1. Description du problème

On considère un film – mince - de lubrifiant, d'épaisseur constante δ , placé à l'interface de deux plans parallèles (Figure 1). Le plan inférieur (1) est supposé fixe et le plan supérieur (2) est mobile à la vitesse constante V . Les deux plans sont maintenus à des températures uniformes notées respectivement T_1 et T_2 . Le fluide est à la température de référence T_0 à son entrée dans le contact ($x=0$). L'écoulement est supposé de type Couette tel que : $u(y) = Vy / \delta$. On suppose que les propriétés physiques du lubrifiant sont indépendantes de la température.

2.2. Equations du problème et solution analytique

Le comportement thermique du film est gouverné par les équations suivantes :

$$\rho c u(y) \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \text{ soit : } \rho c \frac{Vy}{\delta} \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \frac{V^2}{\delta^2} \quad (1)$$

$$T(0, y) = T_0 = 0, T(x, 0) = T_1, T(x, \delta) = T_2 \quad (2)$$

Dans l'équation (1) le terme $\partial^2 T / \partial x^2$ a été négligé devant $\partial^2 T / \partial y^2$. En effet, les ordres de grandeur de ces deux termes sont respectivement : $\Delta T / L^2$ et $\Delta T / \delta^2$ avec $\delta \ll L$ ($\delta \approx \mu m, L \approx mm$). Dans tout ce qui suit, $T(x, y)$ correspond à : $T(x, y) - T_0$.

Pour résoudre les équations (1) et (2) on pose :

$$T(x, y) = U(y) + R(x, y) \quad (3)$$

avec :

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = -\frac{\mu V^2}{\lambda \delta^2}, \text{ avec : } U(0) = T_1, U(\delta) = T_2 \quad (4)$$

La solution de l'équation (4) est aisée et s'écrit sous la forme suivante :

$$U(y) = ay^2 + by + c, \text{ avec : } a = -\frac{\mu V^2}{2\lambda \delta^2}, b = (T_2 - T_1) \frac{1}{\delta} + \frac{\mu V^2}{2\lambda \delta}, c = T_1 \quad (5)$$

L'équation (5) correspond au régime thermique établi. La température $R(x, y)$ correspond au système homogène. Elle est régie par les équations suivantes :

$$\rho c \frac{Vy}{\delta} \frac{\partial R}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}, \text{ avec : } R(0, y) = -U(y), R(x, 0) = 0, R(x, \delta) = 0 \quad (6)$$

L'équation (6) peut être résolue en utilisant la méthode de séparation de variables : $R(x, y) = X(x) Y(y)$. On déduit les fonctions $X(x)$ et $Y(y)$ sous la forme suivante :

$$X = e^{-\alpha\delta\beta^2 x/V} \text{ et } Y = C A_i(-y\beta^{2/3}) + D B_i(-y\beta^{2/3}) \quad (7)$$

Dans l'équation (7) A_i et B_i désignent les fonctions d'Airy, C et D sont des constantes. Compte tenu des conditions aux limites (6) l'équation (7) peut se mettre sous la forme :

$$Y = C \left[A_i(-\beta_m^{2/3} y) - \frac{1}{\sqrt{3}} B_i(-\beta_m^{2/3} y) \right] = C \left[\frac{2}{3} \beta_m^{1/3} y^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \beta_m y^{3/2} \right) \right] \quad (8)$$

Où $J_{1/3}$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre $1/3$ et β_m sont les solutions de l'équation transcendante :

$$J_{1/3}(\gamma_m) = 0, \text{ avec : } \gamma_m = \frac{2}{3} \beta_m \delta^{3/2} \quad (9)$$

Les valeurs de γ_m et donc de β_m peuvent être déterminées par la relation de Mac Mahon telle que :

$$\gamma_m = \sigma - \frac{q-1}{8\sigma} - \frac{4(q-1)(7\mu-31)}{3(8\sigma)^3} - \frac{32(q-1)(83q^2-982q+3779)}{15(8\sigma)^5} - \frac{64(q-1)(6949q^3-153855q^2+1585743q-6277237)}{105(8\sigma)^7} - \dots \quad (10)$$

avec : $\sigma = (m + \nu/2 - 1/4)\pi$, $q = 4\nu^2$, $\nu = 1/3$, $\beta_m = \frac{3\gamma_m}{2\delta^{3/2}}$

L'expression de $R(x, y)$ s'écrit sous la forme :

$$R(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{D_m} y^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \beta_m y^{3/2} \right) e^{-\kappa\delta\beta_m^2 x/V} \quad (11)$$

N_m et D_m sont déterminés en utilisant la propriété de l'orthogonalité des fonctions propres telle que : $N_m = \int_0^\delta -U(y) y^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \beta_m y^{3/2} \right) dy$, et $D_m = \int_0^\delta y J_{1/3}^2 \left(\frac{2}{3} \beta_m y^{3/2} \right) dy$.

Il vient :

$$N_m = \frac{2}{3} \delta^{3/2} \left\{ -\frac{3cJ_{1/3}(\gamma_m)}{4} (1 - S_{1,4/3}(\gamma_m)) - cJ_{1/3}(\gamma_m) S_{0,1/3}(\gamma_m) - b\delta \left(\frac{2^{2/3}}{\gamma_m^{5/3} \Gamma(1/3)} - \frac{J_{-2/3}(\gamma_m)}{\gamma_m} \right) - a\delta^2 \frac{J_{4/3}(\gamma_m)}{\gamma_m} \right\} \quad (12)$$

où S est la fonction de Lommel, et :

$$D_m = \frac{3^{3/2} \Gamma(5/6)}{4\pi^{3/2}} \delta^2 \gamma_m^{2/3} F\left(1, \frac{5}{6}; 2, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -\gamma_m^2\right) \quad (13)$$

où F désigne la fonction hypergéométrique et Γ la fonction Gamma. La solution générale $T(x, y)$ s'écrit sous la forme explicite suivante :

$$T = U(y) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{D_m} y^{1/2} J_{1/3}\left(\frac{2}{3} \beta_m y^{3/2}\right) e^{-\kappa \delta \beta_m^2 x/V} \quad (14)$$

Le flux généré par dissipation visqueuse est :

$$\varphi_g = \frac{\mu V^2}{\delta} = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_{cv}(x), \quad (15)$$

avec : $\varphi_1(x) = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$, $\varphi_2(x) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=\delta}$

$\varphi_{cv}(x)$ est le flux transporté par le fluide. En utilisant l'équation (14) on déduit :

$$\varphi_1(x) = \lambda \left[b + \frac{3^{7/6} \Gamma(2/3)}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{D_m} \left(\frac{2}{3} \beta_m \right)^{1/3} e^{-\kappa \delta \beta_m^2 x/V} \right], \quad (16)$$

$$\varphi_2(x) = -\lambda \left[2a\delta + b + \delta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{D_m} \beta_m J_{-2/3}\left(\frac{2}{3} \beta_m \delta^{3/2}\right) e^{-\kappa \delta \beta_m^2 x/V} \right]$$

3. Résultats et discussions

L'expression de la température $T(x, y)$ donnée par l'équation (14) contient un terme en e^{-x/L_c} , où $L_c = V/(\kappa \delta \beta_m^2)$ est la longueur caractéristique de l'établissement du régime thermique. On montre qu'à l'abscisse $x \cong 4L_c$ la température ne dépend plus de l'abscisse x . Le terme en série $R(x, y)$ devient négligeable devant $U(y)$. On prendra pour calculer L_c la valeur de la première racine non nulle de l'équation transcendante : $\beta_1 = 3\gamma_1/(2\delta^{3/2})$, telle que $L_c = V/(\kappa \delta \beta_1^2)$. La valeur de γ_1 est donnée par la relation (10).

Pour mettre en évidence l'effet de la dissipation visqueuse seule, on prend : $T_1 = T_2 = T_0 = 0$. La figure 2 présente l'évolution de la température dans le plan médian : $y = \delta/2$. La courbe

représentative montre la montée progressive de la température du film depuis son entrée dans le contact avant d'atteindre la température du régime établi. Dans cet exemple, $L_c / \delta = 26,38$. On en déduit la longueur d'établissement du régime thermique, $x / \delta \cong 4L_c / \delta = 105$. Cette valeur est cohérente avec celle du graphique.

La figure 3 présente un exemple de cartographie thermique du film de lubrifiant. L'épaisseur du film δ étant petite devant L_c , le tracé est effectué en échelle logarithmique.

Le partage du flux généré par frottement est donné par les expressions de l'équation (16). En remplaçant a et b par leurs expressions respectives : $a = -\mu V^2 / (2\lambda\delta^2)$, $b = (T_2 - T_1) / \delta + \mu V^2 / (2\lambda\delta)$, dans l'équation (16) on obtient:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{2} \frac{\mu V^2}{\delta} + \frac{T_2 - T_1}{(\delta/\lambda)} - \varepsilon_1(x), \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2} \frac{\mu V^2}{\delta} + \frac{T_1 - T_2}{(\delta/\lambda)} - \varepsilon_2(x) \\ \varepsilon_1(x) &= -\lambda \frac{3^{7/6} \Gamma(2/3)}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{D_m} \left(\frac{2}{3} \beta_m \right)^{1/3} e^{-\kappa\delta\beta_m^2 x/V}, \\ \varepsilon_2(x) &= \lambda\delta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{D_m} \beta_m J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} \beta_m \delta^{3/2} \right) e^{-\kappa\delta\beta_m^2 x/V} \end{aligned} \quad (17)$$

On trouve des valeurs de $\varepsilon_1(x)$ et $\varepsilon_2(x)$ extrêmement faibles. Ceci signifie que dans le cas des films minces la part de flux transporté par le fluide est négligeable. Les expressions des flux $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ données par l'équation (17) s'apparentent à celles des contacts frottants secs [3-7]. On y trouve deux termes. Le premier est une part du flux généré par frottement $\alpha \varphi_g$ (ici cette part vaut $\alpha = 1/2$, avec $\varphi_g = \mu V^2 / \delta$). Le second est le flux de conduction entre les deux plans à travers la résistance thermique du film $R_f = \delta / \lambda$.

4. Conclusions

Nous avons présenté dans cet article une solution analytique explicite pour calculer le champ de température dans un film mince de lubrifiant. On peut évaluer la longueur caractéristique d'établissement du régime thermique par une relation simple. La solution analytique proposée est facile à mettre en œuvre et peut être programmée sur les logiciels de calcul formel (Maple, Matlab, Mathematica et d'autres). Les fonctions spéciales contenues dans la solution proposée sont disponibles dans une grande partie de ces logiciels.

On a montré que pour les contacts lubrifiés par des films minces la chaleur générée par dissipation visqueuse est intégralement transmise aux deux solides. Ce résultat permet d'écrire une relation simple de couplage thermique entre les solides. Cette relation est équivalente à celle utilisée dans les contacts frottants secs. La résistance thermique de contact est remplacée par la résistance thermique de la couche de lubrifiant.

Références

- [1] L. Costa, A.S. Miranda, M. Fillon, J.C.P. Claro, An analysis of the influence of oil supply conditions on the thermohydrodynamic performance of a single-groove journal bearing, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: *Journal of Engineering Tribology*, Vol. 217 (2) 133-144, 2003.

- [2] J. Bouyer and M. Fillon, Improvement of the THD Performance of a Misaligned Plain Journal Bearing, *Journal of Tribology*, vol. 125 (2) (2003) 334-342.
- [3] J.P. Bardon, Bases physiques des conditions de contact thermique imparfait entre milieux en glissement relatif, *Revue Générale de Thermique*, 386 (1994) 86-91.
- [4] N. Laraqi, Température de contact et coefficient de partage de flux généré par frottement sec entre deux solides. Approche nouvelle de la génération de flux, *Int. J. Heat Mass Transfer* 35 (1992) 3131-3139.
- [5] B. Bourouga, J.M. Briot, J.P. Bardon, Influence de la vitesse et de la charge sur la conductance thermique de transport entre les bagues d'un roulement à rouleaux, *Int. J. of Thermal Sciences*, 40 (7) (2001) 622-637.
- [6] A. Baïri, J.M. Garcia-de-Maria, N. Laraqi, Effect of thickness and thermal properties of film on the thermal behavior of moving rough interfaces, *European Physical Journal–Applied Physics*, 26 (1) (2004) 29-34.
- [7] N. Laraqi, Velocity and relative contact size effect on the thermal constriction resistance in sliding solids, *ASME J. Heat Transfer* 119 (1997) 173-177.

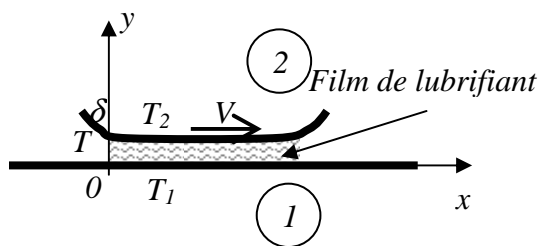


Figure 1 : Film mince de lubrifiant entre deux solides en mouvement relatif

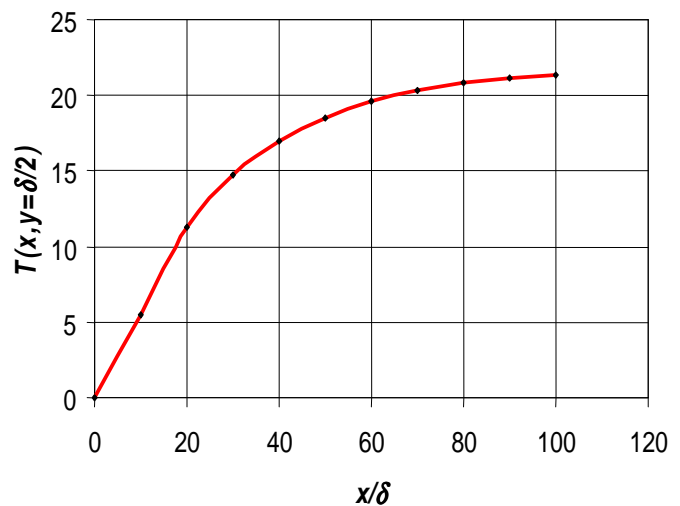


Figure 2 : Température le long de la direction de l'écoulement dans le plan médian du film $y=\delta/2$

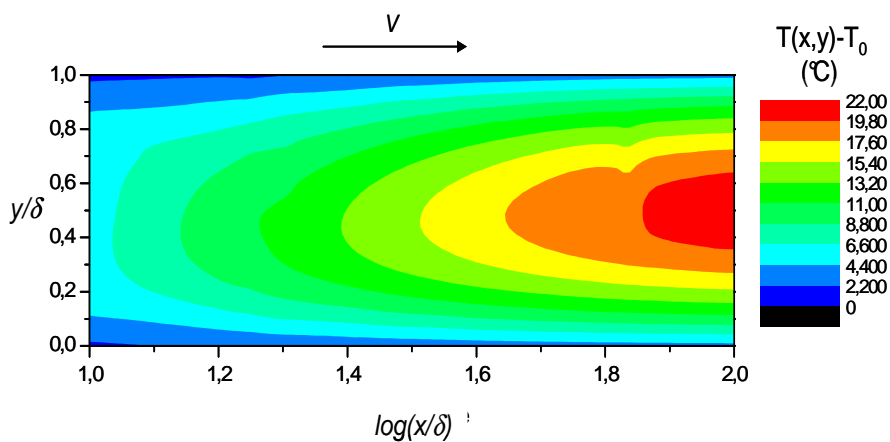


Figure 3 : Exemple de cartographie thermique du film de lubrifiant