

# Refroidissement d'un volume fini générant de la chaleur : analyse du processus constructal

Gilles MARCK<sup>\*1,2,3</sup>, Jean-Luc HARION<sup>2,3</sup>, Maroun NEMER<sup>1</sup>,  
Serge RUSSEIL<sup>2,3</sup>, Daniel BOUGEARD<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Ecole des Mines de Paris, 60, boulevard Saint-Michel, 75272 Paris Cedex 06, France

<sup>2</sup> Univ Lille Nord de France, F-59000 Lille, France

<sup>3</sup> EMDouai, EI, F-59500 Douai, France

\* auteur correspondant : gilles.marck@mines-paristech.fr

**Résumé** - Le problème initial abordé par la théorie constructale envisage l'allocation optimale de matériau hautement conducteur à l'intérieur d'un volume fini générant de la chaleur. L'un des enjeux fondamentaux de la théorie constructale est le déterminisme introduit dans le processus de construction de la solution, bien que de nombreux travaux montrent que cette solution soit non optimale. Après avoir précisé les hypothèses physiques utilisées habituellement, cette étude met en exergue certains points analytiques présentant un potentiel d'amélioration vers un optimum. Dans ce cadre, la production de chaleur au sein du matériau hautement conducteur, ainsi que la porosité du volume fini, sont examinées avec une attention particulière.

## Nomenclature

### Paramètres dimensionnels

$A$	Aire [ $m^2$ ]
$D, H, L$	Epaisseur, hauteur et largeur [ $m$ ]
$E_\phi$	Fonction erreur
$k$	Conductivité thermique [ $W/(m.K)$ ]
$n_1$	Nombre de volumes élémentaires dans $A_1$
$q'''$	Taux de génération de chaleur [ $W/m^3$ ]
$Q$	Quantité de chaleur [ $J$ ]
$T$	Température [ $K$ ]
$x, y$	Abscisse et ordonnée [ $m$ ]

### Paramètres adimensionnels

$\hat{k}$	Rapport de conductivité ( $= k_p/k_0$ )
$r$	Rapport d'aspect ( $= H/L$ )
$R$	Résistance thermique adimensionnée
$\phi$	Porosité ( $= A_{p,i}/A_i$ )

### Indices

$0$	Volume élémentaire
$min$	Minimum
$p$	Matériau de haute conductivité
$opt$	Optimal

## 1. Introduction

La théorie constructale a été initiée et développée par Bejan en 1997 [1], dans le cadre des problèmes d'optimisation de liaison entre un point et un volume [2]. Le problème traité est énoncé comme suit :

Considérons un élément de volume de taille fini dans lequel la chaleur est générée en chaque point, et qui est refroidi par le biais d'un petit dispositif (puits de chaleur) situé sur ses limites. Un montant fini de matériau à forte conductivité ( $k_p$ ) est disponible. Déterminons la distribution optimale de  $k_p$  à travers le volume tel que la plus haute température soit minimale. [1]

La théorie constructale s'appuie sur deux étapes consécutives pour construire le réseau arborescent de matériau  $k_p$  à travers  $k_0$  et assurant le refroidissement de la structure : l'optimisation

d'un volume élémentaire relatif à la plus petite échelle, puis son agencement au fil des échelles supérieures.

Dans sa première partie, cette étude est consacrée à la revue des hypothèses physiques mises en œuvre lors de l'optimisation du volume élémentaire. Plus particulièrement, l'intervalle de validité de hypothèse dite de « minceur » est quantifié grâce aux travaux de Kuddusi et Denton [3]. La seconde partie explicite l'erreur introduite dans le calcul de la porosité finale du volume, paramètre utilisé comme critère d'optimisation durant la seconde étape de l'approche constructale.

## 2. Matériau hautement conducteur et génération de chaleur

Bejan [1], ainsi que Ghodoossi et Egrican [4], utilisent la même hypothèse pour optimiser le volume élémentaire (voir la figure 1(a)) : en le considérant comme assez mince ( $H_0 \ll L_0$ ), la conduction dans le matériau  $k_0$  est uniquement orientée suivant  $y$ , tandis que la conduction dans  $k_p$  est orientée suivant l'axe  $x$ . Cette supposition est connue sous le nom « d'hypothèse de minceur ». Selon [1] et [4], elle entraîne que le transfert de chaleur au sein de la lamelle est gouverné par l'équation des ailettes (« fin equation »). Or, l'utilisation de cette équation particulière induit implicitement une production de chaleur au sein du matériau  $k_p$ , ce qui n'a pas particulièrement de sens physiquement.

Dans cette section, l'optimisation du volume élémentaire est effectuée en suivant l'approche constructale classique et sous l'hypothèse de minceur, mais en prenant clairement en compte la non production de chaleur à l'intérieur de  $k_p$ . Les paramètres géométriques et physiques du problème sont présentés sur la figure 1.

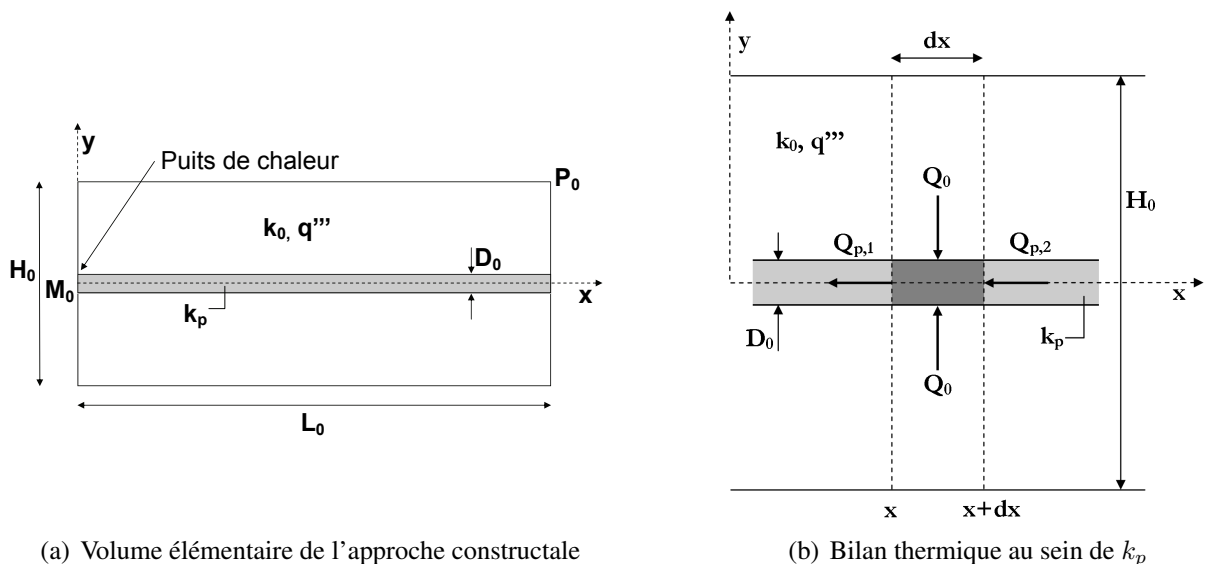


Figure 1 – Paramètres physiques relatifs à l'optimisation du volume élémentaire

Le cas traité est bidimensionnel stationnaire : l'équation 1 est celle régissant le transfert de chaleur dans le matériau  $k_0$ , toujours sous l'hypothèse de minceur, et possédant un taux de

génération de chaleur  $q'''$ . Les conditions limites associées sont présentées en dessous, incluant à la fois les conditions adiabatiques sur la bordure extérieure et l'épaisseur de la lamelle  $k_p$  qui est exclue du domaine de validité, à l'inverse de [1] et [4].

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q'''}{k_0} = 0 \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\pm H_0/2} = 0 \quad (2)$$

$$T\left(x, \pm \frac{D_0}{2}\right) = T_0(x) \quad (3)$$

La résolution de cette équation sur l'aire  $k_0$  conduit à :

$$T(x, y) = \frac{q'''}{2k_0} \left[ H_0 \left( y - \frac{D_0}{2} \right) + \frac{D_0^2}{4} - y^2 \right] + T_0(x) \quad (4)$$

La conduction dans le matériau  $k_p$  est usuellement modélisée par l'équation d'ailette [1, 4]. Ici, une approche différentielle est appliquée, dont les paramètres sont détaillées sur la figure 1(b). Le bilan énergétique pour un élément différentiel appartenant à  $k_p$  est :

$$2Q_0 - Q_{p,1} + Q_{p,2} = 0 \quad (5)$$

où  $2Q_0$  est la quantité de chaleur venant du matériau  $k_0$  situé de part et d'autre de la lamelle hautement conductive.  $Q_0$  s'exprime comme :

$$Q_0 = q''' \frac{H_0 - D_0}{2} dx \quad (6)$$

Les chaleurs  $Q_{p,1}$  et  $Q_{p,2}$  sont évaluées grâce à la loi de Fourier :

$$Q_{p,1} = k_p D_0 \left. \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|_x \quad (7) \quad Q_{p,2} = k_p D_0 \left. \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|_{x+dx} \quad (8)$$

En substituant Eq. (6), Eq. (7) et Eq. (8) dans Eq. (5) et en évaluant le résultat, on obtient :

$$q''' (H_0 - D_0) + k_p D_0 \frac{1}{dx} \left( \left. \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|_x \right) = 0 \quad (9)$$

qui peut également être écrit comme :

$$k_p D_0 \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + q''' (H_0 - D_0) = 0 \quad (10)$$

La comparaison entre Eq. (10) et celle de l'ailette utilisée dans [1, 4] montre qu'elles diffèrent d'un terme  $q''' D_0$ . Physiquement, cela signifie que [1, 4] supposent implicitement une production de chaleur dans le matériau fortement conducteur  $k_p$ , qui transparait par le terme  $q''' D_0$  ajouté à Eq. (10). A noter que cette simplification initiale est transférée aux échelles supérieures au fil du processus constructal. La résolution de Eq. (10) s'effectue avec les conditions limites classiques : en  $x = 0$  la température est celle du puits de chaleur, tandis que la bordure extérieure  $x = L_0$  est adiabatique. En intégrant Eq. (10), on obtient :

$$T_0(x) = q''' \frac{H_0 - D_0}{k_p D_0} \left( L_0 x - \frac{x^2}{2} \right) + T(0, 0) \quad (11)$$

La substitution de Eq. (11) dans Eq. (4), conduit à :

$$T(x, y) - T(0, 0) = \frac{q'''}{2k_0} \left[ H_0 \left( y - \frac{D_0}{2} \right) + \frac{D_0^2}{4} - y^2 \right] + q''' \frac{H_0 - D_0}{k_p D_0} \left( L_0 x - \frac{x^2}{2} \right) \quad (12)$$

qui est valide pour  $y > 0$ . La température maximum est localisée au point le plus éloigné du puits de chaleur,  $P_0$  (figure 1(a)). La résistance thermique adimensionnée peut donc être écrite comme :

$$R_0 = \frac{T(L_0, H_0/2) - T(0, 0)}{q''' H_0 L_0 / k_0} = \frac{H_0}{8L_0} - \frac{D_0}{4L_0} + \frac{D_0^2}{8H_0 L_0} + \frac{k_0}{2k_p} \left( \frac{L_0}{D_0} - \frac{L_0}{H_0} \right) \quad (13)$$

L'introduction des nombres adimensionnels qui définissent les contraintes technologiques, *i.e.*  $\phi_0 = D_0/H_0$  et  $\hat{k} = k_p/k_0$ , ainsi que le rapport d'aspect  $r = H_0/L_0$  qui est le paramètre d'optimisation, conduit à :

$$R_0 = (\phi_0 - 1) \left[ \frac{1}{8} r (\phi_0 - 1) - \frac{1}{2\hat{k}\phi_0 r} \right] \quad (14)$$

Cette équation montre que  $R_0$  peut être minimisée en fonction de  $r$ . Le résultat est :

$$r_{opt} = \left( \frac{H_0}{L_0} \right)_{opt} = 2 \left( \frac{1}{\hat{k}\phi_0(1 - \phi_0)} \right)^{1/2} \quad (15)$$

$$R_{0,min} = \frac{1}{2} \frac{(1 - \phi_0)^2}{\sqrt{\hat{k}\phi_0(1 - \phi_0)}} \quad (16)$$

Kuddusi et Denton ont résolu analytiquement le champ de température du volume élémentaire, sans utiliser l'hypothèse de minceur et en ne supposant aucune génération de chaleur dans  $k_p$  [3]. Ils ont montré que des corrélations précises existent pour décrire le comportement du rapport d'aspect optimum et de la résistance thermique adimensionnée minimale. Leur étude fournit des valeurs de référence pour quantifier la déviation introduite par l'hypothèse de minceur, au regard du développement analytique formulé ci-dessus. Par exemple, dans le cas où le rapport de conductivité vaut  $\hat{k} = 400$ , ils ont montré que les solutions du problème d'optimisation sont :

$$r_{opt} = \left( \frac{H_0}{L_0} \right)_{opt} = 1,5443 \left( \hat{k}\phi_0 \right)^{-0,4060} \quad (17)$$

$$R_{0,min} = -0,0355 \ln \left( \hat{k}\phi_0 \right) + 0,1946 \quad (18)$$

Une de leurs conclusions souligne que l'hypothèse de minceur n'introduit pas une déviation importante du rapport d'aspect optimum du volume élémentaire, mais introduit une erreur importante concernant la résistance thermique adimensionnée minimale, en se positionnant par rapport aux valeurs issues de [1, 4]. Néanmoins, même si la divergence entre les solutions est effective, elle ne peut pas être attribuée seulement à l'hypothèse de minceur puisque [1, 4] supposent implicitement une production de chaleur dans  $k_p$ , à l'inverse de [3].

La figure 2 présente  $r_{opt}$  et  $R_{0,min}$  en fonction de la conductance  $\hat{k}\phi_0$ , pour [1, 4], [3] et la présente étude. Cette comparaison est faite à  $\hat{k} = 400$ . L'influence de l'hypothèse de minceur sur la solution ne peut être déterminée qu'en comparant les travaux de [3] avec la présente étude. La principale divergence prend place à de faibles valeurs de la conductance pour  $R_{0,min}$ , ce qui est cohérent puisque le rapport d'aspect optimal est supérieur à 0,35 pour ces faibles valeurs, le volume élémentaire ne pouvant plus être considéré comme mince. En revanche, en deçà de  $r_{opt} = 0,35$ , l'hypothèse de minceur est parfaitement justifiée et fournit un couple de valeur solution proche de la valeur exacte.

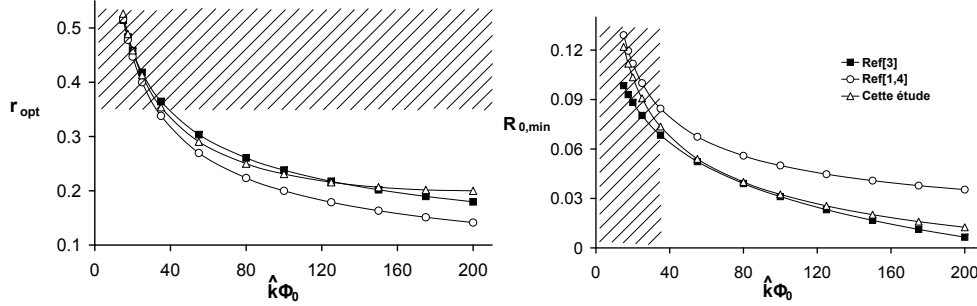


Figure 2 – Comparaison entre les différentes approches pour  $\hat{k} = 400$

### 3. Estimation de la porosité du volume

Une fois les caractéristiques optimales du volume élémentaire déterminées, celles-ci sont fixées définitivement pour la suite du processus de construction. Les volumes élémentaires sont alors agencés de part et d'autre d'un lien hautement conducteur  $k_p$  et leur nombre est déterminé de façon à minimiser la température du point le plus éloigné  $P_1$  [1, 4]. L'épaisseur optimale du lien  $k_p$  est calculée en minimisant une fois encore ce même critère mais par rapport à  $\phi$ ,  $\phi$  étant la fraction de matériau hautement conducteur allouée à l'ensemble du volume, appelée porosité. Le processus continue jusqu'à recouvrir complètement l'ensemble de la structure générant de la chaleur. En tant que contrainte d'optimisation, le calcul de la porosité revêt donc une importance particulière. De plus,  $\phi$  est un critère essentiel pour comparer les performances des structures entre-elles, grâce à  $R_{min}$  [5]. Bejan [1], Ghodoossi et Eğrican [4], Kuddusi et Denton [3], ainsi que Chen et al. [6], l'évaluent avec la même méthode : ils somment la quantité de matière  $k_p$  des échelles précédentes à la quantité présente dans la lamelle hautement conductrice du dernier niveau constructal. Cette méthode présente le désavantage de superposer certaines parties des structures entre-elles (voir la figure 3(a)), surestimant ainsi la valeur réelle de  $\phi$ . Les surfaces en gris foncé soulignent les intersections qui ont été comptées deux fois, et particulièrement les recouvrements entre le volume élémentaire et le premier niveau constructal (A), ainsi qu'entre la dernière lamelle  $k_p$  et l'avant dernière (B), le volume élémentaire (C) et le premier niveau constructal (D).

Un calcul géométrique prenant en compte ces remarques peut conduire à une évaluation plus précise de la porosité. En calculant l'erreur  $E_\phi$  introduite par le recouvrement des surfaces, il apparaît qu'elle est de nature cumulative concernant deux grandeurs (voir la figure 3(b)) : le niveau constructal et le nombre de volume élémentaire  $n_1$  de l'échelle 1. Ce cumul de l'erreur engendre donc son accroissement quel que soit le biais de l'ajout de matériau  $k_p$  : par augmentation du nombre de structure élémentaire à échelle constante ou par complexification de la structure.

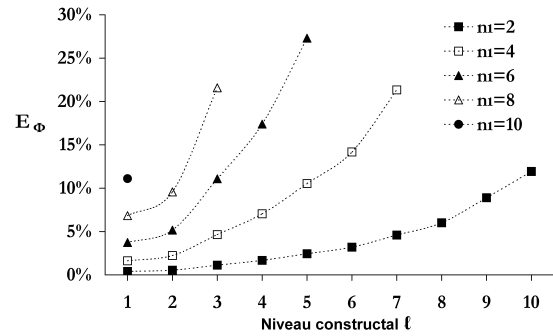
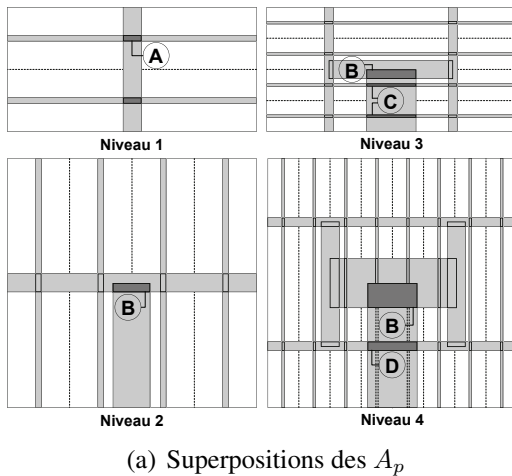


Figure 3 – Visualisation de l'erreur dans le calcul de la porosité

## 4. Conclusion

Dans un premier temps, cette étude montre que l'hypothèse de minceur telle qu'elle a été définie par Bejan dans [1] est parfaitement valide sous la condition que  $r_{opt} \leq 0,35$ , contrairement à ce qui a été énoncé par Kuddusi et Denton dans [3]. L'utilisation de l'équation d'ailette dans [1] et [4] a entraîné une confusion sur la génération de chaleur ou non dans le matériau hautement conducteur  $k_p$ . Dans un second temps, l'imprécision de l'évaluation de la porosité est soulignée, porosité qui est l'un des points fondamentaux de l'approche constructale puisqu'elle participe activement à la détermination de la structure optimale.

Puisque la validité de l'hypothèse de minceur a été démontrée, elle ne peut pas être considérée comme responsable du caractère non optimum des géométries constructales. Il faudrait donc repenser le processus de construction à partir des remarques formulées sur le calcul de la porosité. Néanmoins, la complexité d'un calcul géométrique plus précis ne laisse guère d'espoir quant à une formulation purement analytique d'un tel processus d'optimisation.

## Références

- [1] Adrian Bejan. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(4) :799 – 811, 1997.
- [2] Adrian Bejan. *Advanced Engineering Thermodynamics*. John Wiley & Sons, 3rd edition, 2006.
- [3] Lütfullah Kuddusi and Jesse C. Denton. Analytical solution for heat conduction problem in composite slab and its implementation in constructal solution for cooling of electronics. *Energy Conversion and Management*, 48(4) :1089 – 1105, 2007.
- [4] Lotfollah Ghodoossi and Nilüfer Eğrican. Exact solution for cooling of electronics using constructal theory. *Journal of Applied Physics*, 93(8) :4922 – 4929, 2003.
- [5] Lotfollah Ghodoossi. Conceptual study on constructal theory. *Energy Conversion and Management*, 45(9-10) :1379 – 1395, 2004.
- [6] Wenjun Wu, Lingen Chen, and Fengrui Sun. Heat-conduction optimization based on constructal theory. *Applied Energy*, 84(1) :39 – 47, 2007.