

Ascension d'une particule : étude de l'hydrodynamique et des transferts thermiques.

Aurélié MAUNOURY*, Cédric LE BOT, Eric ARQUIS

Laboratoire Transferts Ecoulements Fluides Energétique (TREFLE)
16 avenue Pey- Berland – 33607 PESSAC

* (auteur correspondant : maunoury@enscpb.fr)

Résumé – Le phénomène de transport de particules dans un fluide se rencontre dans de nombreux domaines d'application : énergétique, agroalimentaire... Nous avons entrepris la modélisation et la simulation numérique de l'ascension d'une particule d'une part ayant une température homogène et constante au cours du temps et d'autre part évoluant dans un fluide ayant une température différente de celle de la particule pour un régime de Stokes. L'analyse de ce processus va nous permettre de mieux comprendre l'hydrodynamique ainsi que les échanges thermiques liquide-solide.

Nomenclature

C	fraction volumique	T	température, K
c_p	capacité calorifique à pression constante, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	u	Vitesse, $m.s^{-1}$
C_D	coefficient de traînée	<i>Indices</i>	
d	diamètre de la particule, m	p	particulaire
D	distance entre les parois latérales, m	<i>Symboles grecs</i>	
F	force, N	λ	conductivité, $W.m^{-1}.K^{-1}$
g	gravité, $m.s^{-2}$	μ	viscosité dynamique, $Pa.s$
K	confinement	ρ	masse volumique, $kg.m^{-3}$
m	masse, kg	β	dilatation, K^{-1}
p	pression, Pa		
t	temps, s		

1. Introduction

L'ascension ou la sédimentation de particules est présente dans de nombreux domaines industriels tels que la métallurgie, l'agroalimentaire... L'une de ses applications industrielles concerne le transport de froid, celui-ci s'effectue par exemple, par l'intermédiaire de mélanges constitués de particules de glace dispersées dans une solution aqueuse communément appelés coulis de glace.

L'ascension comme la sédimentation reste encore mal définie tant d'un point de vue expérimental que numérique, bien que plusieurs études ([1], [2]) aient permis de quantifier et qualifier les écoulements générés en fonction des paramètres physiques et géométriques. Notre but est de prendre en compte les échanges de chaleur générés par une différence de température entre le fluide et la particule. Pour le moment, les travaux sur ce sujet se limitent à la simulation numérique d'une particule en régime de Stokes en 2D ou 3D dans un environnement isotherme [3].

Nous nous proposons d'aborder dans ce travail l'ascension d'une particule ayant une température fixe et plus froide que celle du fluide. Nous présenterons tout d'abord la méthode numérique utilisée suivie de la simulation numérique directe de l'ascension d'une particule en 2D gouvernée par le régime d'Oseen et échangeant de la chaleur avec le fluide environnant.

2. Méthodologie numérique

La modélisation numérique utilisée pour cette étude repose sur une méthode un fluide (One-Fluid Method) [4]. L'écoulement et les transferts thermiques de la particule sont résolus au cours du temps.

L'étude de l'écoulement diphasique (liquide-solide) se limitera aux fluides newtoniens en régime incompressible. On traduit ce problème par l'équation de conservation de la masse (1) et de conservation de quantité de mouvement (2):

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u = \rho g - \nabla p + \nabla \cdot (\mu(\nabla u + \nabla^t u)) \quad (2)$$

L'équation (2) est résolue par la méthode du Lagrangien Augmenté [5] (couplage entre vitesse et pression) dans lequel un algorithme itératif de minimisation permet d'assurer la contrainte d'incompressibilité (1). Les termes convectifs sont discrétisés au premier ordre (schéma upwind).

Notre étude porte sur les problèmes d'écoulements diphasiques. Afin de déterminer la position de chaque phase (liquide et particule) au cours du temps, une équation d'advection est résolue (3).

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \cdot \nabla C = 0 \quad (3)$$

La variable C, (fonction de phase) définit les zones correspondant au fluide (C = 0) et celle de la particule (C = 1). L'interface liquide-solide se situe dans les zones où $0 < C < 1$. Cette équation est résolue par un schéma VOF (Volume Of Fluid). Celui-ci permet de reconstruire par morceaux la fonction C au cours du temps [6].

La résolution de l'équation de la chaleur (4) va nous permettre de prendre en compte les transferts de chaleur. Celle-ci sera réalisée par le biais d'un schéma upwind.

$$\rho \cdot c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (4)$$

3. Analyse des résultats

La première étape de cette étude consiste à vérifier notre simulation par une comparaison à un cas analytique.

3.1. Validation de la méthode en 2D

3.1.1. Approche de Faxën

On travaille avec des nombres de Reynolds particuliers $Re_p \ll 1$. Dans ce cas, les forces de frottements visqueux sont prépondérantes devant les forces inertielles. Ceci nous permet de négliger le terme convectif $(\rho(u \cdot \nabla)u)$, très faible devant le terme visqueux $(\nabla \cdot (\mu(\nabla u + \nabla^t u)))$.

L'approche de Faxën [7] se base sur les équations d'Oseen et propose une solution analytique permettant de calculer la vitesse de sédimentation U_p . L'expression de la vitesse de sédimentation du modèle de Faxën est obtenue en égalisant la force de traînée à la force de flottabilité :

$$U_p = \frac{(\rho_f - \rho_p) \cdot \left(\frac{d}{4}\right)^2 \cdot g \cdot \left[\ln\left(\frac{D}{d}\right) - 0.9157 + 1.7244 \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2 - 1.7302 \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^4 \right]}{4\mu_f} \quad (5)$$

Il faut noter que l'approche de Faxën n'est valable que pour des valeurs de confinement $\left(\frac{d}{D}\right) < 0.4$ et pour des $Re_p \leq O(1)$.

On considère en 2D une particule solide cylindrique d'un rayon de 0.01 m effectuant une ascension dans un liquide. Le domaine de calcul est un rectangle de rapport de forme hauteur/largeur = 2.5 avec un coefficient de confinement $K = \frac{d}{D} = 0.1$. Afin d'obtenir, un nombre de Reynolds particulière de l'ordre de 10^{-2} , nous prenons artificiellement pour l'accélération de la gravité $9.81 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$ ce qui permettra d'avoir une vitesse moins importante et des échanges convectifs libres. Le maillage choisi est à pas d'espace variable de $60 \cdot 510$. Il permet d'avoir environ 40 mailles sur le diamètre du cylindre et il est plus grossier sur le reste du domaine. Pour assurer la stabilité du schéma en temps, nous avons choisi un pas de temps de 10^{-1} s . Les propriétés du fluide et de la particule sont répertoriées dans le tableau 1. Le fluide correspond à de la glycérine et le solide à du polypropylène. Le solide a une température plus froide de 10 °C par rapport au liquide. De plus, la température de la particule est fixe au cours du temps.

D'après une première étude [8], nous considérons que la variation de température du fluide autour de la particule perturbe très légèrement les caractéristiques du fluide et par conséquent l'hydrodynamique. Nous pouvons remarquer d'après le tableau 2 que la vitesse asymptotique calculée numériquement correspond bien à la vitesse analytique issue de l'approche de Faxën avec une précision inférieure à 5%.

	ρ	μ	c_p	λ	β
	$kg.m^{-3}$	$Pa.s$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	$W.m^{-1}.K^{-1}$	K^{-1}
Liquide à 20 °C	1260	1.5	2428	0.285	$5 \cdot 10^{-4}$
Solide à 10 °C	910	$1.5 \cdot 10^3$	1900	0.33	—

Tableau 1 : Caractéristiques physiques du fluide et de la particule.

3.1.2. Corrélation du nombre de Nusselt

La simulation numérique définie ci-dessus correspond à la configuration d'un cylindre horizontal isotherme, nous pouvons donc comparer le nombre de Nusselt global obtenu après stabilisation en température et vitesse à un nombre de Nusselt global issu d'une corrélation [9]. Afin de choisir une corrélation adaptée à notre cas, il nous faut d'abord estimer le nombre de Richardson pour déterminer le type de convection.

$$Ri = \frac{Gr}{Re_p^2} = \frac{(\beta g \rho^2 d^3 \Delta T / \mu^2)}{(\rho u d / \mu)} \quad (6)$$

Lorsque $Ri = 1$ on considère que la convection est mixte, quand $Ri > 1$ la convection naturelle l'emporte sur la convection forcée et lorsque $Ri < 1$ la convection forcée l'emporte sur la convection libre [10]. Dans notre cas, nous avons $Ri \cong 15$, par conséquent, la convection naturelle l'emporte sur la convection forcée. Nous comparons donc le nombre de Nusselt global obtenu numériquement au nombre de Nusselt global adapté au cas d'une convection naturelle d'un cylindre horizontal isotherme proposée par Morgan (8) [9] valable pour un nombre de Rayleigh compris entre 10^2 et 10^{-2} .

$$Ra_D = Gr \times Pr = \frac{(\beta g \rho^2 d^3 \Delta T / \mu)}{(\mu c_p / \lambda)} \quad (7)$$

$$Nu = 1.02 Ra_p^{0.148} \quad (8)$$

Comme nous pouvons le remarquer dans le tableau 2, le nombre de Nusselt global issu de la simulation numérique correspond bien au nombre de Nusselt global issu de la corrélation adaptée à notre cas avec une précision inférieure à 5%.

	Simulation numérique	Analytique	Précision
			%
Vitesse asymptotique en m.s ⁻¹	7.7*10 ⁻⁴	8*10 ⁻⁴	3.8
Nusselt Global	1.68	1.73	2.9

Tableau 2 : Comparaison des résultats numériques et analytiques.

3.2. Validation de la méthode en 3D

3.2.1. Vitesse asymptotique en 3D

Nous travaillons toujours en régime d'Oseen et nous considérons toujours le cas d'un fluide Newtonien. Nous reprenons les mêmes conditions et données que précédemment sauf que dans ce cas nous simulons en 3D avec un rapport hauteur/largeur et hauteur/profondeur de 5 et la particule est une sphère avec un diamètre de 0.01 m. Dans la littérature [11], nous trouvons un coefficient de traînée (9) nous permettant de calculer ensuite la vitesse (10).

$$C_D = \left[0.63 + \frac{4.8}{\sqrt{Re_p}} \right]^2 \quad (9)$$

$$u = \left(\frac{4}{3} \frac{gd\Delta\rho}{\rho C_D} \right)^{0.5} \quad (10)$$

Afin de tenir compte l'effet des parois il nous faut corriger notre vitesse analytique par le facteur suivant [11] :

$$f = \left[\frac{1 - d/D}{1 - 0.475(d/D)} \right]^4 \quad (11)$$

D'après le tableau 3, la vitesse asymptotique trouvée à l'aide de la simulation numérique concorde avec celle issue des expressions précédentes avec une précision égale à 5%.

3.2.2 Corrélation du nombre de Nusselt

Notre simulation consiste à représenter l'ascension d'une particule ayant une température fixe et évoluant dans un fluide ayant une température plus chaude de 10 °C. Le nombre de Richardson issu de cette simulation est de 109, nous nous trouvons donc dans le cas d'une convection naturelle.

Puisque non simulons une sphère isotherme subissant une ascension dans un liquide ayant une température plus chaude (de 10 °C), nous pouvons comparer le nombre de Nusselt global issu de la simulation numérique à celui trouvé à l'aide de la corrélation de Raithby/Hollands (12) [12] qui est valable pour un nombre de Rayleigh $Ra > 1$ dans le cas de sphère isotherme.

$$Nu_D = 2 + 0.56 \left[\frac{Ra_D Pr}{0.846 + Pr} \right]^{1/4} \quad (12)$$

D'après le tableau 3, le nombre de Nusselt global issu de la simulation numérique correspond bien à celui trouvé à l'aide d'une corrélation adaptée à notre configuration avec une précision égale à 5%.

	Simulation numérique	Analytique	Précision
			%
Vitesse asymptotique en m.s ⁻¹	3*10 ⁻⁴	3.16*10 ⁻⁴	5
Nusselt Global	3.2	3.36	5

Tableau 3 : Comparaison des résultats numériques et analytiques.

3.3. Etude de la couche limite thermique

Nous reprenons le cas 2D développé au 3.1.1 en modifiant de façon fictive les caractéristiques physiques de la glycérine afin de faire varier le nombre de Prandtl. Nous conservons les paramètres numériques utilisés précédemment. Nous observons alors l'impact de cette variation sur la couche limite thermique.

Nous faisons varier la capacité calorifique du fluide, d'après la figure 1, nous pouvons vérifier que conformément à ce qui était attendu plus le nombre de Prandtl augmente plus la couche limite thermique diminue. Cet effet est quantitativement exprimé sur la figure 2, nous pouvons également noter que l'épaisseur de la couche limite thermique tend à se stabiliser avec l'augmentation du nombre de Prandtl.

Nous avons également vérifié que si nous faisons varier la conductivité thermique à la place de la capacité calorifique nous obtenons les mêmes épaisseurs de couche limite thermique pour les mêmes nombres de Prandtl.

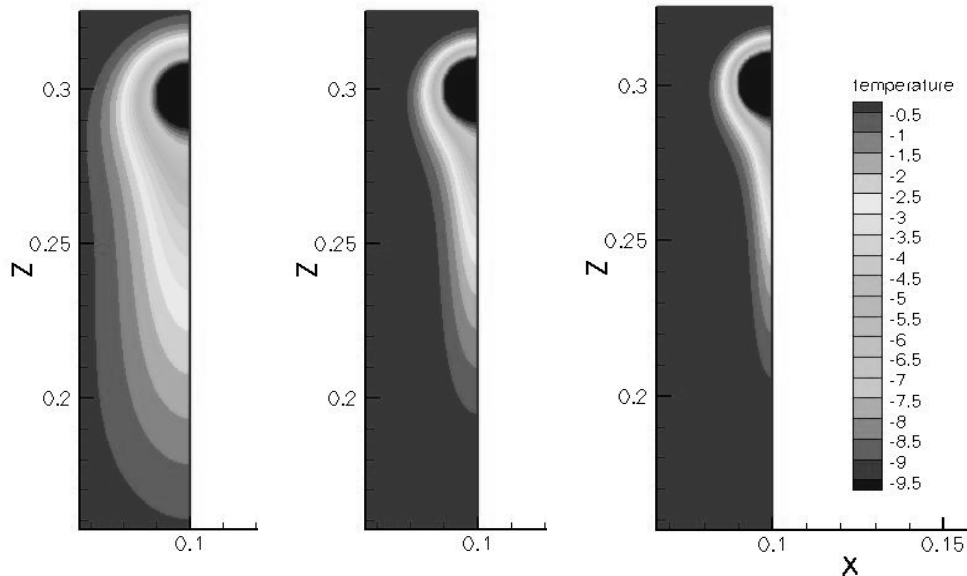


Figure1 : Couche limite thermique autour de la particule pour des nombres de Prandtl allant de gauche à droite de 1000, 5000, 12800. Illustration du domaine de calcul équivalent au demi du domaine réel.

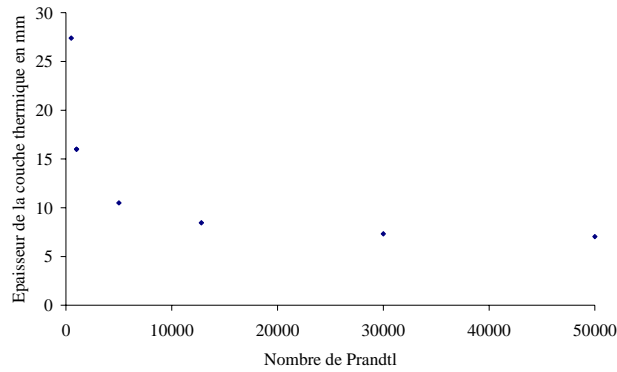


Figure2 : Epaisseur de la couche limite thermique autour de la particule en fonction du nombre de Prandtl.

4. Conclusion

Nous avons validé notre méthode numérique en 2D et 3D, tant en terme de dynamique (vitesse d'ascension) que de thermique (nombre de Nusselt) dans le cas d'un nombre de Reynolds faible et pour une condition thermique peu réaliste (température imposée). La prochaine étape sera de nous placer dans des conditions plus réalistes, notamment celui où la particule voit sa température évoluer lors de son déplacement ce qui nous permettra de comparer les résultats trouvés par le biais des simulations numériques avec ceux trouvés à l'aide d'une expérimentation [13]. Ces différentes étapes vont nous permettre d'approcher de notre objectif final qui est de simuler l'ascension d'une particule avec changement de phase.

Références

- [1] C. Vanroyen, *Interactions hydrodynamiques entre sphères dures en régime faiblement inertiel : modélisation et expérimentations appliquées à la sédimentation*, Thèse de l'Université de Bordeaux I (2004).
- [2] T.W. Pan, Numerical simulation of the motion of a ball falling in an incompressible viscous fluid , *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, p. 1035-1038, 1999.
- [3] G. Pianet, A. Ten Cate , J.J. Derkensen, E. Arquis, Assessment of the 1-fluid method for DNS of particulate flows : sedimentation of a single sphere at moderate to high Reynolds numbers, *Journal of Computers and Fluids*, 36, Issue 2, 359-375, 2007
- [4] J.P. Caltagirone, S. Vincent, Sur une méthode de pénalisation tensorielle pour la résolution des équations de Navier-Stokes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2001.
- [5] R. Glowinski, P. Le Tallec, Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics, *Studies in Applied in Mathematics*, Volume 9, 1989.
- [6] J. Breil, *Modélisation du remplissage en propergol de Moteur à propulsion solide*, Thèse de l'Université de Bordeaux I (2001).
- [7] J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Mechanics of fluids and transport processes, 1991.
- [8] A. Maunoury, C. LeBot, E. Arquis, Sédimentation d'une particule dans un fluide thermiquement stratifié, *Congrès Français de Thermique SFT 2006* (Ile de Ré, 16-19 mai), 27-32, 2006.
- [9] V.T. Morgan, *The overall convective heat transfer from smooth circular cylinder*, *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, New York, 199-264, 1975.
- [10] J.K. Walsh, A.W. Weimer, C.M. Hrenya, Thermophoretic deposition of aerosol particles in laminar tube flow with mixed convection, *Aerosol Science* 37, 715-734, 2006.
- [11] V.C. Kelessidis, Terminal Velocity of Solid Spheres Falling in Newtonian and non Newtonian Liquids, *Tech. Chron. Sci.*, Volume 1-2, 2003.
- [12] *Technique de l'Ingénieur*, BE 8 206, 2006.
- [13] J.-P. Bedecarrats, Y. Le Guer, J.-P. Dumas, E. Arquis, M. Rady, Etude de l'ascension d'un glaçon sphérique au sein d'une colonne d'eau, *Congrès Français de Thermique SFT 2006* (Ile de Ré, 25-28 mai)