

# Stabilité de la convection thermosolutale en couches fluide et poreuse superposées

Sílvia da Costa HIRATA<sup>1\*</sup>, Benoît GOYEAU<sup>1</sup>, Dominique GOBIN<sup>1</sup>,  
Renato Machado COTTA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Univ Pierre et Marie Curie, Univ Paris-Sud, CNRS, Lab FAST, F-91405, France

<sup>2</sup>LTTTC/PEM, POLI&COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro - RJ, 21945-970, Brazil

\*(auteur correspondant : silvia@fast.u-psud.fr)

**Résumé** - Ce travail concerne l'étude de l'apparition de la convection naturelle d'origine thermosolutale au sein d'une configuration constituée d'une couche fluide superposée à un milieu poreux. Le système est soumis à des gradients de température et de concentration colinéaires à la gravité. On utilise le modèle à deux domaines incluant la contribution du terme de Brinkman dans la région poreuse pour représenter les phénomènes de transport dans ce système bicouche. Le problème aux valeurs propres résultant de l'analyse de stabilité linéaire est résolu à l'aide de la Technique de la Transformation Intégrale Généralisée (GITT). Une étude de l'influence de certains paramètres caractéristiques sur la stabilité du système est présentée.

## Nomenclature

$d_f^*$	Épaisseur de la couche fluide, $m$	$\alpha_S$	Diffusivité massique, $m^2 s^{-1}$
$d_m^*$	Épaisseur de la couche poreuse, $m$	$\beta_T$	Coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$
$d^*$	Épaisseur totale, $m$	$\beta_S$	Coefficient d'expansion solutale
$\hat{d}$	Rapport des épaisseurs ( $\hat{d} = d_f^*/d_m^*$ )	$\varepsilon_T$	Rapport des diffusivités thermiques ( $\varepsilon_T = \alpha_{Tf}/\alpha_{Tm}$ )
$Da$	Nombre de Darcy ( $Da = K/d^2$ )	$\varepsilon_S$	Rapport des diffusivités massiques ( $\varepsilon_S = \alpha_{Sf}/\alpha_{Sm}$ )
$Gr_S$	Nombre de Grashof solutal ( $Gr_S = g\beta_S\Delta S^*d^{*3}/\nu^2$ )	$\eta$	Viscosité réduite ( $\eta = \mu_{eff}/\mu$ )
$Gr_T$	Nombre de Grashof thermique ( $Gr_T = g\beta_T\Delta T^*d^{*3}/\nu^2$ )	$\kappa$	Nombre d'onde adimensionné
$k$	Conductivité thermique, $W m^{-1} K^{-1}$	$\mu$	Viscosité dynamique du fluide, $kg m^{-1} s^{-1}$
$K$	Perméabilité, $m^2$	$\mu_{eff}$	Viscosité effective du milieu poreux, $kg m^{-1} s^{-1}$
$Pr$	Nombre de Prandtl ( $Pr = \nu/\alpha_{Tf}$ )	$\nu$	Viscosité cinématique du fluide, $m^2 s^{-1}$
$Ra_T$	Nombre de Rayleigh thermique ( $Ra_T = Gr_T Pr Da$ , $Ra_{Tf} = Ra_T/Da$ , $Ra_{Tm} = Ra_T \varepsilon_T$ )	$\rho$	Densité du fluide, $kg m^{-3}$
$Ra_S$	Nombre de Rayleigh solutal ( $Ra_S = Gr_S Sc Da$ , $Ra_{Sf} = Ra_S/Da$ , $Ra_{Sm} = Ra_S \varepsilon_S$ )	$\sigma$	Taux de croissance
$Sc$	Nombre de Schmidt ( $Sc = \nu/\alpha_{Sf}$ )	$\phi$	Porosité
<b>Symboles grecs</b>		<b>Indices et exposants</b>	
$\alpha_T$	Diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$ ( $\alpha_{Tf} = k_f/(\rho_0 C_p)_f$ , $\alpha_{Tm} = k_m/(\rho_0 C_p)_f$ )	$f$	Relatif au fluide
		$m$	Relatif au milieu poreux
		$T$	Thermique
		$S$	Solutal
		*	Relatif aux grandeurs dimensionnées

## 1. Introduction

Le transport de chaleur et de masse par convection naturelle au sein d'une configuration où coexistent une région fluide et une région poreuse se produit dans de nombreuses situations industrielles [1, 2] et environnementales [3]. Pour ces raisons, l'analyse des phénomènes de transport dans une configuration fluide-poreux a fait l'objet d'une attention particulière au cours des dernières décennies [4]. Le présent travail traite plus spécifiquement du cas de la convection *naturelle* au sein d'un système constitué d'une couche poreuse *homogène* surmontée d'une couche fluide.

Du point de vue de la modélisation, deux approches différentes peuvent être employées pour représenter les phénomènes de transport dans un système fluide-poreux : l'approche à *un domaine* et l'approche à *deux domaines*. La description à un domaine consiste à combiner les équations de conservation des deux régions en un système unique d'équations valables pour tout le domaine [2]. Cette représentation permet notamment de s'affranchir de l'écriture explicite des conditions limites à l'interface. On peut également décrire le transport à l'interface fluide-poreux à l'aide d'un modèle à deux domaines, où les couches fluide et poreuse sont modélisées séparément et les équations de conservation dans les deux régions sont couplées par des conditions limites appropriées à l'interface. La plupart des analyses à deux domaines [3, 5, 6] utilise la condition de glissement proposée par Beavers & Joseph [7] pour coupler l'équation de Stokes à la loi de Darcy. Une solution alternative à l'utilisation de la condition de glissement consiste à utiliser la correction de Brinkman à la loi de Darcy. Dans ce cas, les équations de conservation de la quantité de mouvement dans les deux régions sont du même ordre, et la continuité des vitesses et des contraintes tangentielles peut être imposée à l'interface. Le choix de la condition interfaciale la plus réaliste reste aujourd'hui un sujet d'actualité dont les enjeux principaux ont récemment été analysés par Goyeau *et al.* [8].

En utilisant le modèle à deux domaines et la formulation de Darcy, Chen et Chen [6] ont observé que les courbes de stabilité marginale du cas purement thermique, c'est-à-dire les courbes du nombre de Rayleigh thermique critique en fonction du nombre d'onde, peuvent être bimodales (i.e., les courbes présentent deux minima locaux). Les deux minima correspondent à différents modes de convection naturelle : le mode aux grands nombres d'onde (correspondant à des cellules convectives de petite longueur d'onde plutôt confinées dans la couche fluide) et le mode aux petits nombre d'onde (correspondant à des cellules convectives de grande longueur d'onde où la circulation est présente dans toute la région poreuse). Le comportement bimodal des courbes de stabilité a été également observé dans le cas thermosolutal, mais pour une gamme différente des valeurs des paramètres. La première analyse de stabilité linéaire d'un système bicouche basée sur le modèle à un domaine a été proposée par Zhao & Chen [9]. Ces auteurs ont observé le comportement bimodal des courbes dans le cas purement thermique, mais pas dans le cas thermosolutal.

L'objectif de ce travail est d'étudier les conditions de déclenchement de la convection naturelle d'origine thermosolutale dans un système fluide-poreux. On présente l'analyse de stabilité linéaire de la convection naturelle en utilisant le modèle à deux domaines avec la formulation de Brinkman. Nous proposons une extension des études précédentes [1, 6, 9], en analysant les écoulements de convection naturelle induits par des forces de volume thermique et/ou solutale (gradients de température et/ou concentration déstabilisants). L'influence des paramètres caractéristiques sur le déclenchement de la convection doublement diffusive est analysée.

## 2. Équations de Conservation

La configuration géométrique du problème étudié consiste en une couche poreuse horizontale d'épaisseur  $d_m^*$  et d'extension infinie dans les directions horizontales, surmontée d'une couche fluide d'épaisseur  $d_f^*$ . On note  $d^*$  l'épaisseur totale de la cavité ( $d^* = d_m^* + d_f^*$ ). Différentes températures et concentrations sont imposées aux parois externes : la frontière inférieure est maintenue à la température  $T_l^*$  et à la concentration  $S_l^*$ , et la frontière supérieure est maintenue à  $T_u^*$  et  $S_u^*$ . Le milieu poreux est saturé par le même fluide binaire qui occupe le reste de la cavité. L'écoulement est supposé laminaire et incompressible, et le fluide Newtonien satisfait l'hypothèse de Boussinesq :

$$\rho(T^*, S^*) = \rho_0(1 - \beta_T(T^* - T_0^*) - \beta_S(S^* - S_0^*)), \quad (1)$$

où  $T_0^*(S_0^*)$  sont des valeurs de référence, ici la demi-somme des valeurs aux parois. Enfin, on suppose que la matrice solide du milieu poreux est en équilibre thermique avec le fluide, et les effets Soret et Dufour sont négligés.

Compte tenu des hypothèses ci-dessus, les équations adimensionnelles pour la couche fluide s'écrivent sous la forme [10] :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{u} - (1 - Gr_T T - Gr_S S) \mathbf{e}_z \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr_f} \nabla^2 T \quad (4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = \frac{1}{Sc_f} \nabla^2 S \quad (5)$$

En supposant que le milieu poreux est isotrope et homogène, les équations adimensionnées pour la couche poreuse sont :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_m = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{\phi} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \right) = -\nabla P_m + \frac{1}{Da} \mathbf{u}_m + \eta \nabla^2 \mathbf{u}_m - (1 - Gr_T T_m - Gr_S S_m) \mathbf{e}_z \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u}_m \cdot \nabla T_m = \frac{1}{Pr_m} \nabla^2 T_m \quad (8)$$

$$\phi \frac{\partial S_m}{\partial t} + \mathbf{u}_m \cdot \nabla S_m = \frac{1}{Sc_m} \nabla^2 S_m \quad (9)$$

où  $Pr_m = Pr_f \varepsilon_T$  et  $Sc_m = Sc_f \varepsilon_S$ . Les conditions limites adimensionnées aux frontières supérieure et inférieure s'écrivent :

$$\mathbf{u}(1) = 0, T(1) = \frac{T_u^* - T_0^*}{\Delta T^*}, S(1) = \frac{S_u^* - S_0^*}{\Delta S^*} \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_m(0) = 0, T_m(0) = \frac{T_l^* - T_0^*}{\Delta T^*}, S_m(0) = \frac{S_l^* - S_0^*}{\Delta S^*}. \quad (11)$$

Enfin, à l'interface  $z = d_m^*/d^* = d_m = 1/(1 + \hat{d})$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{u}_m, -P + 2 \frac{\partial w}{\partial z} &= -P_m + 2 \eta \frac{\partial w_m}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} = \eta \frac{\partial u_m}{\partial z}, \\ T = T_m, \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{\partial T_m}{\partial z}, S = S_m, \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_S} \frac{\partial S_m}{\partial z}. \end{aligned} \quad (12)$$

On exprime la viscosité réduite du terme de Brinkman par  $\eta = \mu_{eff}/\mu_f = 1/\phi$  et, pour simplifier les calculs, on a supposé que  $(\rho C_p)_m/(\rho C_p)_f = 1$ .

En suivant la procédure classique d'analyse de stabilité linéaire, on exprime le système d'équations en termes des variables perturbées et on retient seulement les termes linéaires. Les équations aux perturbations ainsi que la solution GITT du problème aux valeurs propres résultant de l'analyse de stabilité linéaire ont été présentées en détail dans [10].

### 3. Résultats et Discussion

On analyse ici les cas où les écoulements de convection naturelle thermosolutale sont induits par des forces de volume thermique et/ou solutales. Afin de valider la méthode d'analyse et le code numérique, nous avons comparé nos résultats aux valeurs exactes obtenues pour les cas limites du problème de Rayleigh-Bénard, à savoir pour une couche complètement fluide ( $Da \rightarrow \infty, \phi = 1$ ) et pour une couche complètement poreuse ( $\hat{d} \rightarrow 0$ ). Pour ces cas limites, la courbe de stabilité dans le plan  $(Ra_T, Ra_S)$  est une droite si les champs de température et concentration satisfont les mêmes conditions aux limites [4]. Pour les conditions de température et concentration prescrites aux

parois externes, le cas de la cavité fluide conduit à :  $-Ra_{Tf} + Ra_{Sf} = 1707.77$ , avec un nombre d'onde correspondant de  $\kappa = 3.12$ . Les mêmes conditions limites appliquées au cas de la cavité poreuse conduisent à :  $-Ra_{Tm} + Ra_{Sm} = 4\pi^2 \approx 39.48$ , avec  $\kappa = \pi \approx 3.14$ . Compte tenu des définitions  $\Delta T = T_u - T_l$  et  $\Delta S = S_u - S_l$ , on peut déterminer les régions où les gradients verticaux de température et concentration sont stabilisants ou déstabilisants. La région où les deux forces de volume sont stabilisantes ( $Ra_T > 0$  et  $Ra_S < 0$ ) est évidemment toujours stable. Il a été vérifié que les courbes  $Ra_S \times Ra_T$  obtenues avec le présent modèle sont des lignes droites qui croisent les axes en  $(0, 1707.77)$ ;  $(-1707.77, 0)$  et  $(0, 39.48)$ ;  $(-39.48, 0)$ .

Pour l'ensemble des résultats présentés dans cette section, les paramètres suivants sont fixés :  $Pr_f = 10$ ,  $\varepsilon_T = 1$ ,  $\varepsilon_S = 1/\phi = 1/0.39$  et  $Da = 10^{-5}$ . Afin de comparer les résultats obtenus aux principaux résultats existant dans la littérature, nous présentons les courbes de stabilité marginale en termes de  $Ra_T$ . Les courbes  $Ra_S \times Ra_T$ , pour trois valeurs différentes du rapport des épaisseurs  $\hat{d}$  sont présentées dans la figure (1a). Les points  $Ra_T = 0$  et  $Ra_S = 0$  correspondent respectivement aux cas purement solutal et purement thermique. Comme pour les cas limites, lorsque  $Ra_T$  augmente (i.e., les forces thermiques deviennent de plus en plus stabilisantes), les gradients de concentration nécessaires pour déstabiliser le système deviennent plus importants. Cependant, on observe que les courbes pour  $\hat{d} \neq 0$  ne sont pas des droites. Pour mieux comprendre ce phénomène, l'évolution du nombre d'onde critique  $\kappa$  en fonction de  $Ra_T$  est représentée sur la figure (1b). Deux régions peuvent être clairement distinguées : pour des valeurs négatives de  $Ra_T$ , le mode de convection critique est celui aux grandes valeurs de  $\kappa$ , alors que le mode aux petites valeurs de  $\kappa$  est le plus critique pour des valeurs positives de  $Ra_T$ . Comme pour le cas de la convection thermique, les résultats montrent l'existence de deux modes de convection naturelle : le mode aux grands nombres d'onde et le mode aux petits nombres d'onde.

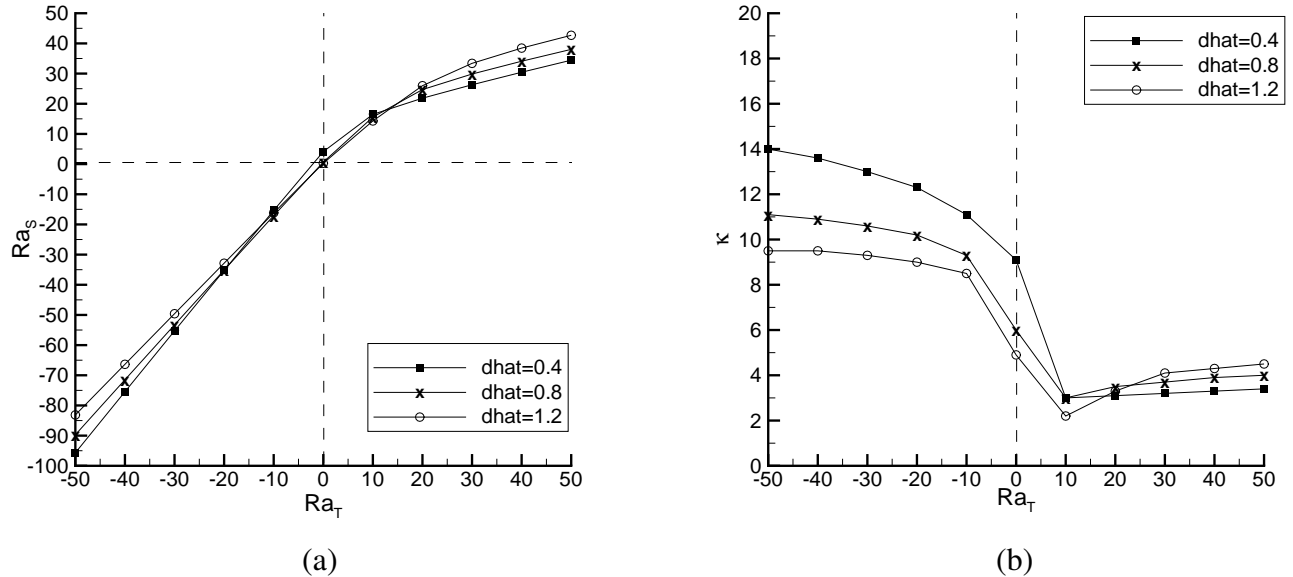


Figure 1 : (a) Nombre de Rayleigh solutal critique et (b) nombre d'onde correspondant en fonction du nombre de Rayleigh thermique, pour trois valeurs différentes du rapport d'épaisseurs  $\hat{d}$  et  $Da = 10^{-5}$ .

Les lignes de courant et les profils de la vitesse verticale pour  $\hat{d} = 0.8$  et différentes valeurs de  $Ra_T$  sont présentés dans les figures (2a) à (2d), où les deux modes de convection sont mis en évidence. Contrairement au cas purement thermique, où une seule cellule convective est observée, on constate l'existence d'un régime multi-cellulaire lors du déclenchement de la convection thermosolutale. Pour  $Ra_T = -20$  (figure 2a), on observe trois cellules convectives contrarotatives dans la région fluide, et la vitesse verticale dans la région poreuse est essentiellement nulle. Lorsque  $Ra_T$  augmente, la

longueur d'onde des cellules augmente (le nombre d'onde diminue), et à  $Ra_T = 0$  (figure 2b) on n'observe qu'une cellule confinée dans le fluide. Pour  $Ra_T = +20$  (figure 2c) l'écoulement commence à pénétrer dans la région poreuse. Finalement, pour  $Ra_T = +50$  (figure 2d) un ralentissement global du système est observé.

Chen & Chen [6] ont été les premiers à observer l'empilement vertical de cellules convectives dans le cas thermosolutal, à l'aide du modèle à deux domaines avec formulation de Darcy. Ces derniers considèrent que le régime multi-cellulaire rend l'ensemble du système plus stable. L'utilisation du modèle à un domaine a permis à Zhao & Chen [9] d'observer le même type de structuration des cellules convectives, sans mettre en évidence le comportement bimodal des courbes de stabilité. Dans ces études, le cas thermosolutal a été étudié uniquement pour un nombre de Rayleigh thermique fixé ( $Ra_T \sim 50$ ). À notre connaissance, le présent travail est le premier à étudier l'influence de la variation du nombre de Rayleigh thermique, ce qui empêche une comparaison systématique avec les études précédentes.

Une représentation des courbes de stabilité marginale en fonction de  $Ra_T$  et de  $\kappa$  est proposée pour plusieurs valeurs de  $\hat{d}$  sur les figures (3a) à (3c). Ce type de représentation met clairement en évidence l'influence du nombre de Rayleigh thermique et l'évolution des différents modes. A  $Ra_T = -20$ , les courbes pour les trois valeurs de  $\hat{d}$  étudiées présentent un seul minimum aux grands nombres d'onde. Le passage de  $Ra_T = -20$  à  $Ra_T = 20$  met clairement en évidence l'apparition du comportement bimodal.

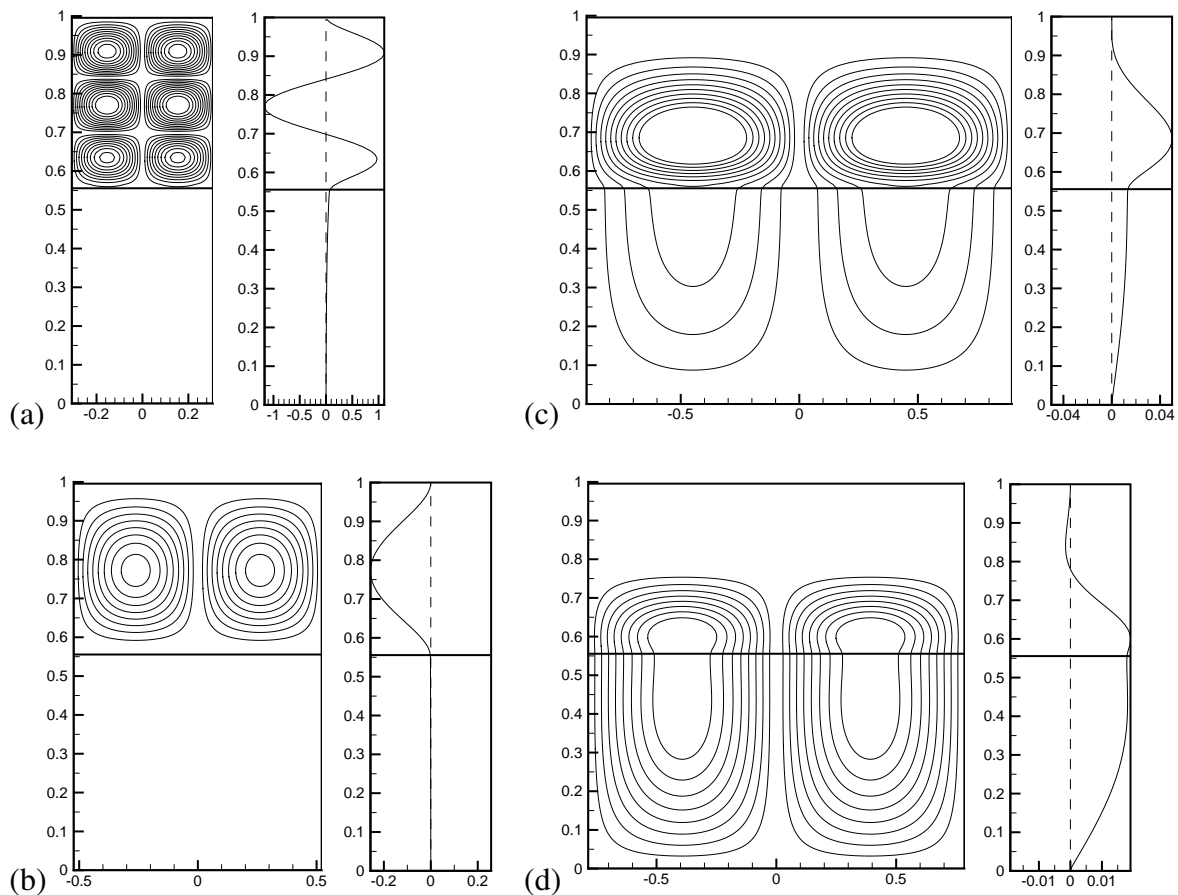


Figure 2 : Lignes de courant et profils de vitesse verticale au déclenchement de la convection pour  $\hat{d} = 0.8$  et  $Da = 10^{-5}$  : (a)  $Ra_T = -20$ ,  $Ra_S = -35.1$  et  $\kappa_{cr} = 10.2$ ; (b)  $Ra_T = 0$ ,  $Ra_S = 0$  et  $\kappa_{cr} = 6.0$ ; (c)  $Ra_T = 20$ ,  $Ra_S = 24.7$  et  $\kappa_{cr} = 3.5$ ; (d)  $Ra_T = 50$ ,  $Ra_S = 38$  et  $\kappa_{cr} = 4.0$ . La ligne horizontale épaisse représente l'interface fluide-poreux.

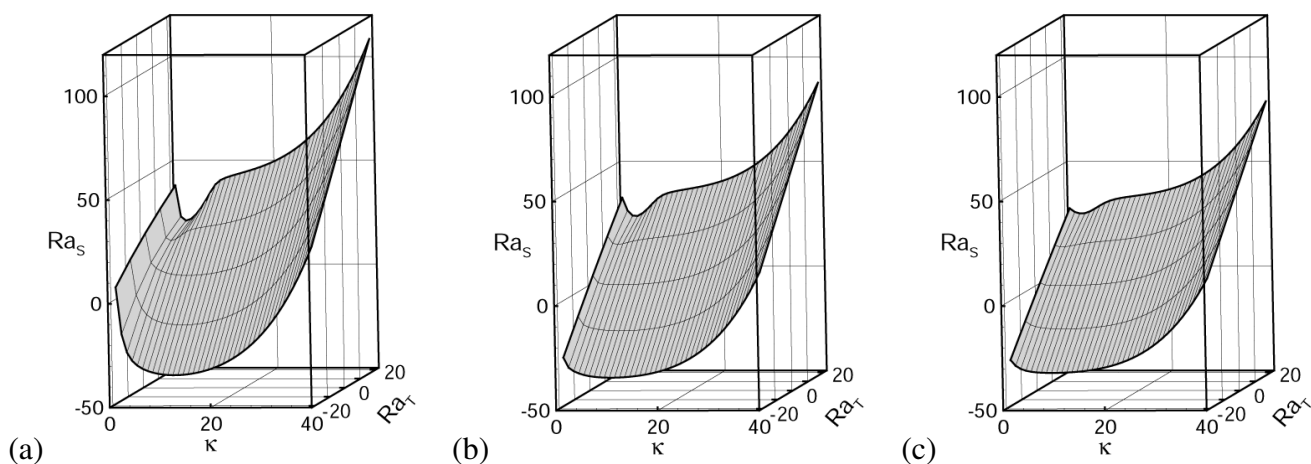


Figure 3 : Limites de stabilité pour  $Da = 10^{-5}$  et (a)  $\hat{d} = 0.4$ , (b)  $\hat{d} = 0.8$ , (c)  $\hat{d} = 1.2$ .

## 4. Conclusions

L'analyse de stabilité linéaire du déclenchement de la convection thermosolutale dans un système constitué d'une couche poreuse surmontée d'une couche fluide a été présentée. Nous avons montré que les deux modes de convection naturelle observés pour la convection d'origine purement thermique sont également présents dans le cadre de la convection thermosolutale. Dans ce cas, le nombre de Rayleigh thermique joue un rôle déterminant. L'étude d'une gamme plus large des valeurs des paramètres caractéristiques (rapport d'épaisseurs, rapport des diffusivités thermiques) est envisagé.

## Références

- [1] Worster, M. G., Instabilities of the Liquid and Mushy Regions During Solidification of Alloys, *J. Fluid Mech.*, 237 (1992), 649-669.
- [2] Arquis, E. and Caltagirone, J.P., Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide - milieu poreux : application à la convection naturelle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 299 (1984).
- [3] Carr, M. and Straughan, B., Penetrative Convection in a Fluid Overlying a Porous Layer, *Advances in Water Res.*, 26 (2003), 263-276.
- [4] Nield, D.A. and Bejan, A., Convection in Porous Media, *Springer-Verlag, New York, 3rd Edition* (2006).
- [5] Nield, D. A., Onset of Convection in a Fluid Layer Overlying a Layer of a Porous Medium, *J. Fluid Mech.*, 81 (1977), 513-522.
- [6] Chen, F. and Chen, C. F., Onset of Finger Convection in a Horizontal Porous Layer Underlying a Fluid Layer, *J. Heat Transfer*, 110 (1988), 403-409.
- [7] Beavers, G. S. and Joseph, D. D., Boundary Conditions at a Naturally Permeable Wall, *J. Fluid Mech.*, 30 (1967), 197-207.
- [8] Goyeau, B. and Lhuillier, D. and Gobin, D. and Velarde, M.G., Momentum Transport at a Fluid-Porous Interface, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 46 (2003), 4071-4081.
- [9] P. Zhao and C. F. Chen, Stability analysis of Double-Diffusive Convection in Superposed Fluid and Porous Layers Using a One-Equation Model, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 44 (2001), 4625-4633.
- [10] Hirata, S. C., Stabilité de la Convection Thermique et/ou Solutale en Couches Fluide et Poreuse Superposées, *Ph.D. Dissertation, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, France* (2007).

## Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre du PICS CNRS-CNPq "Écoulements et Transferts en Milieux Poreux" de la direction SPI du CNRS. SCH est titulaire d'une bourse du gouvernement brésilien (CAPES).