

# Etude de la convection thermosolutale combinée avec l'effet Soret dans une couche poreuse verticale

Mohammed ER-RAKI<sup>1</sup>, Mohammed HASNAOUI<sup>1\*</sup>, Abdelkhalk AMAHMID<sup>1</sup> & Mohammed EL GANAOU<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LMFE, Département de Physique, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech, Maroc

<sup>2</sup>Université de Limoges, SPCTS UMR 66 38 CNRS, Faculté des Sciences et Techniques, Limoges, France

\* (auteur correspondant : [hasnaoui@ucam.ac.ma](mailto:hasnaoui@ucam.ac.ma))

**Résumé** - Il s'agit d'une étude analytique et numérique de la convection thermosolutale induite dans une matrice poreuse verticale, soumise à des flux horizontaux de chaleur et de masse, en présence de l'effet Soret. Le phénomène de la thermodiffusion (effet Soret) est représenté dans cette contribution par une valeur spécifique du paramètre de Soret,  $S_p = 1$ . Ce travail porte sur l'étude de la dynamique des écoulements et l'analyse des comportements thermiques et massiques observés pour cette situation particulière.

## Nomenclature

$A_r$	rapport de forme de la cavité	<i>Symboles grecs</i>	
$Le$	nombre de Lewis	$\varepsilon$	porosité normalisée du milieu
$S_p$	paramètre de Soret	$\psi$	fonction de courant
$N$	rapport des forces solutales et thermiques.	$\zeta$	vorticité
$R_T$	nombre de Rayleigh thermique	$\eta$	facteur de relaxation

## 1. Introduction

La convection naturelle induite par des gradients imposés de température et de concentration est communément appelée double diffusion ou convection thermosolutale. Le phénomène de la thermodiffusion, résultant en général de l'imposition d'un gradient permanent de température à un mélange binaire, peut également se manifester dans une telle situation et jouer un rôle non négligeable. En raison de son intérêt pratique dans les domaines industriel et environnemental, l'effet Soret a été pris en compte dans plusieurs études récentes sur la convection naturelle thermosolutale induite dans des milieux poreux ou dans des milieux fluides. Sur la base de ces études, conduites expérimentalement et/ou théoriquement, il apparaît que la thermodiffusion combinée avec la convection naturelle peut modifier la nature des bifurcations et engendrer des comportements spécifiques tels que la multiplicité des solutions et le phénomène d'hystérésis [1-2].

Dans cette contribution, on s'intéresse à l'étude du problème de la double diffusion combinée avec l'effet Soret dans une cavité de Darcy verticale, soumise à des flux uniformes de chaleur et de masse. La formulation mathématique de ce problème conduit à un paramètre  $S_p$  qui caractérise l'effet Soret et qui résulte d'une normalisation appropriée. Les résultats analytiques et numériques sont présentés pour le cas  $S_p = 1$ . Pour montrer la spécificité des comportements observés pour cette valeur de  $S_p$ , quelques résultats obtenus avec  $S_p \neq 1$  [3-4] seront présentés à titre comparatif.

## 2. Formulation mathématique

La configuration étudiée est une enceinte poreuse verticale de hauteur  $H'$  et de largeur  $L'$ . Les parois verticales de la cavité sont soumises à des flux de chaleur,  $q'$ , et de masse,  $j'$ , uniformes. Les parois horizontales sont considérées adiabatiques et imperméables. Le milieu poreux est supposé homogène, isotrope, obéissant au modèle de Darcy et saturé par un fluide binaire, incompressible et obéissant à l'approximation de Boussinesq.

Le modèle mathématique adimensionnel décrivant ce problème peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\eta \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta = R_T \left( \frac{\partial T}{\partial x} + N \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (2)$$

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{Le} (\nabla^2 S + S_p \nabla^2 T) \quad (3)$$

$$\nabla^2 \psi = -\zeta \quad (4)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5)$$

Les conditions aux limites associées sont telles que:

$$\left. \begin{array}{l} \psi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 1 - S_p \quad \text{pour} \quad x = \pm \frac{1}{2} \\ \psi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{A_r}{2} \end{array} \right\} \quad (6)$$

où  $\zeta$ ,  $\psi$ ,  $T$ ,  $S$ ,  $u$  et  $v$  sont des variables adimensionnelles représentant respectivement la vorticité, la fonction de courant, la température, la concentration et les composantes horizontale et verticale de la vitesse.

Les transferts thermiques et massiques sont représentés respectivement par les nombres adimensionnels  $Nu$  et  $Sh$  donnés par :

$$Nu = \frac{1}{T(0.5, 0) - T(-0.5, 0)} \quad \text{et} \quad Sh = \frac{1}{S(0.5, 0) - S(-0.5, 0)} \quad (7)$$

## 3. Solution analytique approchée

Dans la limite d'une cavité élancée ( $A_r \gg 1$ ), la solution analytique approchée du problème peut être développée en utilisant les approximations suivantes :

$$\psi(x, y) = \psi(x), \quad T(x, y) = C_T y + \theta_T(x) \quad \text{et} \quad S(x, y) = C_S y + \theta_S(x) \quad (8)$$

Les paramètres  $C_T$  et  $C_S$  apparaissant dans l'équation (8) représentent respectivement les gradients verticaux de température et de concentration. Les expressions de ces paramètres peuvent être obtenues en considérant que le transfert de chaleur et de masse est nul à travers toute section horizontale de l'enceinte poreuse.

L'introduction des simplifications (8) dans les équations (1) à (3) avec  $S_p = 1$ , conduit à un système d'équations différentielles ordinaires dont la solution analytique dépend du signe d'un paramètre  $\phi$  donné par l'expression suivante :

$$\phi = R_T [C_T (1 - N) + NLeC_S] \quad (9)$$

Dans cette contribution, on s'intéressera aux valeurs positives de  $\phi$  pour lesquelles le comportement de type couche limite est possible (on posera alors  $\phi = \Omega^2$  avec  $\Omega > 0$ ).

Les résultats des deux régimes pseudo conductif et celui de couche limite sont déduits de la présente étude comme cas limites. Ils correspondent respectivement à des valeurs suffisamment faibles et suffisamment élevées de  $\Omega$ .

### 3.1. Régime pseudo conductif

Ce régime est observé pour des valeurs de  $R_T$  suffisamment faibles ( $\Omega$  au voisinage de zéro). Les expressions approximatives de  $\psi$ ,  $T$  et  $S$  sont données par :

$$\psi(x) = \frac{R_T}{2} \left( -x^2 + \frac{1}{4} \right) \quad (10)$$

$$T(x, y) = C_T y + x + \frac{R_T C_T}{6} \left( x^3 - \frac{3}{4} x \right) \quad (11)$$

$$S(x, y) = C_S y - \frac{R_T (C_T - LeC_S)}{6} \left( x^3 - \frac{3}{4} x \right) \quad (12)$$

Les expressions correspondantes de  $Nu$  et  $Sh$  dans ce régime sont données par:

$$Nu = \frac{12}{12 - R_T C_T} \quad \text{et} \quad Sh = \frac{12}{R_T (C_T - LeC_S)} \quad (13)$$

$$\text{avec } C_T = \frac{10R_T}{120 + R_T^2} \quad \text{et} \quad C_S = \frac{(LeR_T^2 - 120)}{(Le^2 R_T^2 + 120)} C_T \quad (14)$$

### 3.2. Régime de couche limite

On a montré dans des études antérieures [5] que ce régime n'est observé que pour des valeurs assez grandes de  $\Omega$  et ce dernier paramètre est inversement proportionnel à l'épaisseur de la couche limite verticale notée  $\delta$ . Les expressions simplifiées de  $\psi$ ,  $T$  et  $S$ , correspondant aux écoulements de type couche limite, sont données par:

$$\psi(x) = k \left( 1 - e^{\Omega(\lambda x - \frac{1}{2})} \right) \quad (15)$$

$$T(x, y) = C_T y + (1 - kC_T)x + \lambda k C_T \frac{e^{\Omega(\lambda x - \frac{1}{2})}}{\Omega} \quad (16)$$

$$S(x, y) = C_S y + k(C_T - LeC_S)x - \lambda k(C_T - LeC_S) \frac{e^{\Omega(\lambda x - \frac{1}{2})}}{\Omega} \quad (17)$$

$$\text{avec } \Omega = \sqrt{R_T [C_T (1 - N) + NLeC_S]} \quad \text{et} \quad k = \frac{R_T}{\Omega^2}$$

Le paramètre  $\lambda$  est égal à 1/ (-1) pour les valeurs positives / (négatives) de  $x$ .

Les expressions de  $C_T$  et  $C_S$  sont données par :

$$C_T = k \left( 1 - \frac{2}{\Omega} \right) \left[ 1 + G \left( 1 - \frac{3}{\Omega} \right) \right]^{-1}, \quad C_S = [LeG \left( 1 - \frac{3}{\Omega} \right) - 1] \left[ Le^2 G \left( 1 - \frac{3}{\Omega} \right) + 1 \right]^{-1} C_T \quad (18)$$

où  $G = k^2$ .

Les expressions de Nu et Sh deviennent :

$$Nu = \frac{I}{1 - kC_T(1 - \frac{2}{\Omega})} \quad \text{et} \quad Sh = \frac{I}{k(C_T - LeC_S)(1 - \frac{2}{\Omega})} \quad (19)$$

Pour des valeurs négatives de N, deux expressions différentes de  $\Omega$ , décrivant deux types de comportements, peuvent être déduites selon la valeur attribuée à N. Ces expressions de  $\Omega$  sont données par :

$$\Omega \cong R_T^{2/5} Le^{2/5} (Le^2 + NLe + N)^{-1/5} \quad \text{pour} \quad N > \frac{-Le^2}{1 + Le} \quad (20)$$

$$\Omega \cong R_T^{1/2} [-(Le^2 + NLe + N)]^{1/4} \quad \text{pour} \quad N < \frac{-Le^2}{1 + Le} \quad (21)$$

Pour des valeurs positives de N, seule l'expression de  $\Omega$  donnée par l'équation (20) reste possible ; il lui correspond donc un seul comportement de type couche limite. Ce résultat est différent de celui rapporté dans la référence [4] pour  $S_p \neq 1$  où il a été montré que deux comportements de type couche limite sont possibles même pour des valeurs positives de N.

#### 4. Méthode numérique

La méthode numérique est utilisée dans un but de valider les résultats obtenus analytiquement. Les équations (1) à (5) sont discrétisées à l'aide d'une méthode classique aux différences finies. Toutes les discrétisations spatiales sont réalisées à l'aide d'un schéma centré précis au second ordre. La résolution des équations (1) à (3) est effectuée à l'aide d'une méthode implicite aux directions alternées et celle de l'équation (4) par une méthode de sur-relaxation successive. Les résultats numériques rapportés dans ce papier ont été effectués avec maillage de  $81 \times 201$  et un rapport de forme  $A_r = 8$  sélectionné sur la base de tests préliminaires utilisant des rapports de forme  $A_r$  variant dans la gamme  $1 \leq A_r \leq 12$ .

#### 5. Résultats et discussion

Quelques résultats typiques seront présentés dans cette section pour illustrer l'effet des principaux paramètres de contrôle. Sur la figure 1 on présente les variations de  $\Omega$ , Nu et Sh en fonction de  $R_T$  pour  $Le = 10$ ,  $S_p = 1$  et  $N = -3$ . Deux tendances sont observées dans les évolutions de Nu et Sh lorsque  $R_T$  est varié. Dans le cas de Sh, l'évolution est d'abord caractérisée par une diminution linéaire importante (dans la gamme  $10^{-3} \leq R_T < 1$ ) vers un minimum, suivie d'une inversion de tendance qui prend à nouveau un aspect linéaire pour  $R_T > 10$ . Les grandes valeurs de Sh, observées pour les faibles  $R_T$ , indiquent que les concentrations au niveau des parois verticales tendent à prendre des valeurs égales. Durant la phase de diminution de Sh, Nu reste constant ( $Nu \cong 1$ ) indiquant une prédominance du régime pseudo-conductif. Au démarrage de la convection, l'évolution de Nu prend un aspect linéaire avec une pente positive. La figure 1 montre clairement l'accord existant entre les résultats basés sur l'approche de l'écoulement parallèle et ceux correspondant aux régimes pseudo-conductif et de couche limite, respectivement à des valeurs suffisamment faibles et suffisamment élevées de  $R_T$ . Quant à l'évolution de  $\Omega$  avec  $R_T$ , elle est caractérisée par une augmentation constante et linéaire par morceau avec un changement de pente (diminution de la pente) au démarrage de la convection. L'augmentation de  $\Omega$  avec  $R_T$  est compatible avec la diminution de l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  puisque ce dernier paramètre est inversement proportionnel à  $\Omega$  ( $\delta \propto \Omega^{-1}$ ).

L'effet du rapport des forces d'origines solutales et thermiques (via le paramètre  $N$ ) sur  $\Omega$ ,  $Nu$  et  $Sh$  est présenté sur la figure 2 pour  $R_T = 100$ ,  $S_p = 1$  et  $Le = 10$ . L'évolution de  $\Omega$  avec  $N$  est caractérisée d'abord par une faible diminution de type linéaire tant que les forces solutales restent négligeables ou à la limite du même ordre que celles d'origines thermiques. L'allure de la courbe de  $\Omega$  change d'aspect et précipite son évolution vers des faibles valeurs dès que les forces solutales prennent le dessus. En d'autres termes, l'épaisseur de la couche limite,  $\delta$ , devient assez large pour les grandes valeurs de  $N$  (disparition du régime de couche limite lorsque  $N$  devient assez important). Pour la situation correspondant à  $S_p = 1$ , on peut montrer analytiquement que  $\delta$  augmente avec  $|N|$  même pour  $N < 0$ . Ce comportement diffère de celui rapporté précédemment pour  $S_p \neq 1$  [4] où on a montré que  $\delta$  peut augmenter ou diminuer avec  $N$  dépendamment du signe de ce dernier. Finalement, la figure 2 montre que les évolutions de  $Nu$  et  $Sh$  avec  $N$  sont quasiment constantes tant que les forces solutales ne sont pas dominantes. Les tendances changent vers l'augmentation pour  $N > 1$  avec un comportement asymptotique (prouvé analytiquement mais non encore atteint pour  $Sh$ ) pour des valeurs suffisamment élevées de  $N$ .

Pour chacun des comportements évoqués, on présente une comparaison des profils de  $T$  et  $S$  trouvés (à mi-hauteur) pour  $S_p = 1$  avec ceux obtenus pour  $S_p \neq 1$ . Les figures 3 et 4 illustrent ces profils pour  $R_T = 10^3$ ,  $Le = 3$  et  $N = 3$  (Eq. (20)) et  $R_T = 50$ ,  $Le = 3$  et  $N = -3$  (Eq. (21)). On peut noter que les profils horizontaux de  $T$  et  $S$  correspondant à l'équation (20) présentent un comportement de type couche limite pour  $S_p \neq 1$  (Fig. 3a) mais un tel comportement est absent pour le profil de concentration pour  $S_p = 1$  (Fig. 3b). Quant au comportement correspondant à l'équation (21), il est caractérisé par une différence notable en termes de profils pour  $S_p \neq 1$  (Fig. 4a) et  $S_p = 1$  (Fig. 4b).

## 6. Conclusion

L'effet Soret combiné avec le phénomène de la double diffusion est étudié analytiquement et numériquement dans une enceinte poreuse verticale de Darcy soumise à des flux horizontaux de chaleur et de masse pour une situation particulière correspondant à  $S_p = 1$ . L'accent est mis sur l'effet de  $R_T$  et  $N$  et une comparaison en termes de profils de température et de concentration est illustrée en considérant des valeurs de  $S_p \neq 1$  afin de montrer la spécificité du cas particulier étudié.

## Références

- [1] D.T. Hurlle and E. Jakeman, Soret-driven thermosolutal convection, *J. Fluid Mech.*, 47 (1971), 667-687.
- [2] D. Gutkowicz-Krusin, M. A. Collins, and J. Ross, Rayleigh-Bénard instability in nonreactive binary fluids. I. Results, *Phys. Fluids*, 22 (1979), 1443-1450.
- [3] M. Er-Raki, M. Hasnaoui, A. Amahmid and M. Mamou, Soret effect on the boundary layer flow regime in a vertical porous enclosure subject to horizontal heat and mass fluxes, *Int. J. Heat and Mass Transfer, Part A*, 49 (2006), 3111-3120.
- [4] M. Er-Raki, M. Hasnaoui, A. Amahmid, M. Mamou and M. Bourich, Soret effect on double diffusive boundary layer flows in a vertical porous cavity, sous presse, *Journal of Porous Media*.
- [5] A. Amahmid, M. Hasnaoui, M. Mamou and P. Vasseur, Boundary layer flows in a vertical porous enclosure induced by opposing Buoyancy Forces, *Int. Journal Heat Mass Transfer*, vol. 42, pp. 3599-3608, 1999.

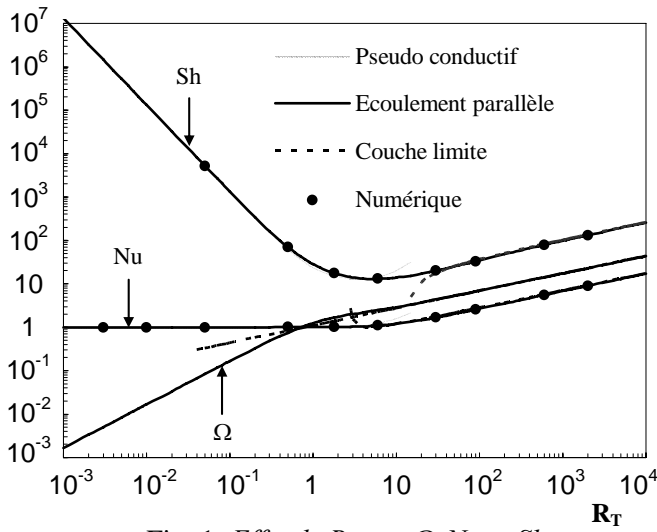


Fig. 1: Effet de  $R_T$  sur  $\Omega$ ,  $Nu$  et  $Sh$

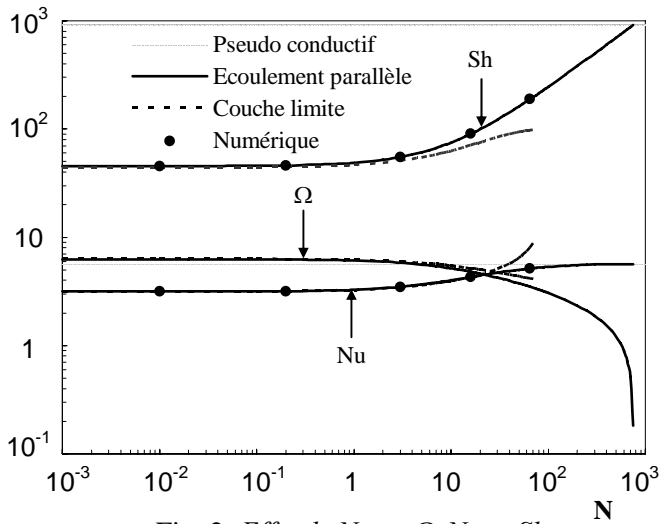


Fig. 2: Effet de  $N$  sur  $\Omega$ ,  $Nu$  et  $Sh$

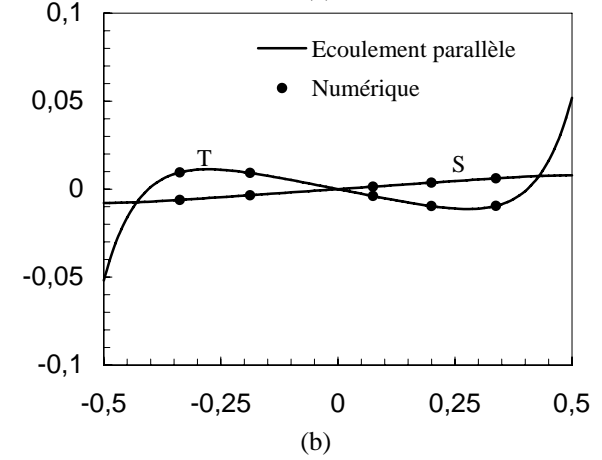
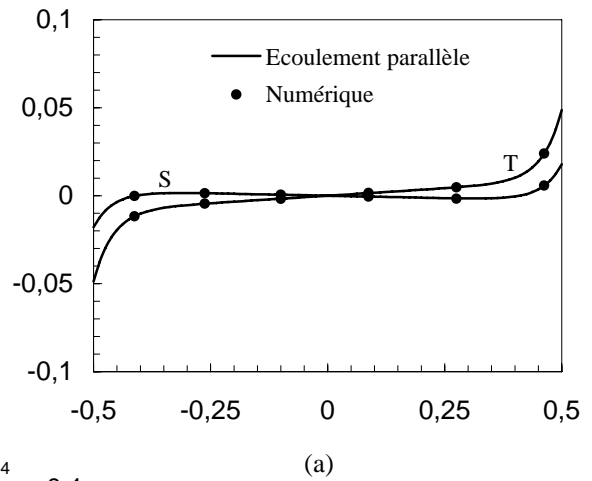


Fig. 3: Evolutions des profils de  $T$  et de  $S$  à mi-hauteur de la cavité : (a)  $S_p = 0.5$  et (b)  $S_p = 1$ .

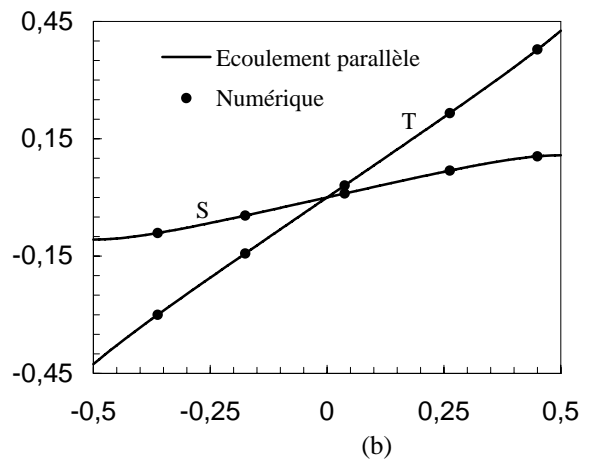
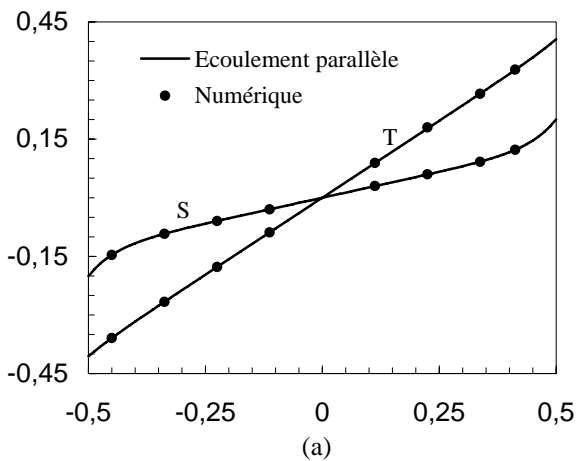


Fig. 4: Evolutions des profils de  $T$  et de  $S$  à mi-hauteur de la cavité: (a)  $S_p = -0.5$  et (b)  $S_p = 1$ .