

Modélisation analytique de la transpiration thermique en régime modérément raréfié.

J.Gilbert MEOLANS, Irina A. GRAUR*

IUSTI, UMR CNRS 6595, Ecole Polytechnique Universitaire de Marseille
5, rue E.Fermi – 13453 Marseille Cedex 13

*(auteur correspondant : irina.graour@polytech.univ-mrs.fr)

Résumé – On développe une approche analytique des écoulements pilotés par gradient de température en régime de glissement. Les résultats sont comparés à ceux d'autres méthodes.

Nomenclature

H	hauteur du canal, m	T	température, K
L	longueur du canal, m	σ_p	coefficient de vitesse de glissement
w	largeur, m	σ_T	coefficient de glissement thermique
ρ	masse volumique, kg/m^3	λ	libre parcours moyen, m
u, v	composantes de vitesse, $m.s^{-1}$	<i>Indices et exposants</i>	
p	pression, Pa	s	paramètre de glissement
μ	viscosité dynamique, $N.s.m^{-2}$	w	paroi

1. Introduction

Le phénomène de transpiration thermique est étudié dans les micro canaux. On maintient un gradient de température constant le long des parois entre les deux réservoirs. Un écoulement gazeux est ainsi créé et entretenu en régime stationnaire.

Depuis que O.Reynolds créa en 1879 le terme « transpiration thermique », beaucoup d'auteurs ont analysé ce phénomène en employant des modèles cinétiques (BGK [1], S-modèle [2]) ou en résolvant l'équation de Boltzmann linéarisée [3]. Les profils de vitesse, le flux de chaleur, et le débit massique ont été obtenus numériquement sur une gamme étendue de nombre de Knudsen. Les profils de vitesse et de température ont été également obtenus à partir du système de Navier-Stokes [4].

Dans ce travail une solution analytique complète est donnée en régime de glissement pour des nombres de Knudsen inférieurs à 0.25. Les résultats sont en très bon accord avec la solution numérique d'équations macroscopiques (Navier-Stokes associé à des conditions limites de glissement). Nos résultats sont aussi comparés avec des résultats déduits des approches cinétiques (S-modèle) : l'accord est généralement satisfaisant. Toutefois des différences significatives apparaissent sur les profils transversaux de vitesse et sont discutés à la fin de l'article.

2. Equations utilisées et conditions aux limites

Nous considérons un écoulement gazeux stationnaire dans des micro canaux rectangulaires reliant deux réservoirs maintenus à la même pression. Les températures dans les réservoirs d'entrée et de sortie sont respectivement égales à T_{in} et T_{out} . On suppose que la température de paroi varie linéairement de $T_{w_{in}}$ à $T_{w_{out}}$, dans la direction x de l'écoulement. Dans ces

conditions le gaz s'écoule du réservoir froid vers le réservoir chaud. Le phénomène porte le nom l'effet « thermal creep » ou « transpiration thermique ». Nous analysons ici ce phénomène dans des canaux où le profondeur H est plus grande que le libre parcours moyen et beaucoup plus petite que la longueur du canal L , ou que sa largeur w . Il est donc possible de considérer cette configuration comme en écoulement entre deux plans parallèles infinis où les paramètres physiques dépendent seulement de deux coordonnées spatiales.

On utilise les équations de Navier-Stokes (NS) pour décrire ces écoulements stationnaires.

Les conditions aux limites sont les conditions de symétrie sur l'axe et les conditions de glissement de vitesse et de saut de température sur les parois. La condition de glissement du premier ordre s'écrit [5]:

$$u_s = \sigma_p \frac{\mu}{p} v_m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w + \sigma_T \frac{\mu}{p} \left(\frac{\partial \ln T}{\partial x} \right)_w, \quad (1)$$

où $v_m = \sqrt{2RT_w(x)}$ est la vitesse moléculaire la plus probable à la température de surface T_w , σ_p le coefficient de vitesse de glissement, σ_T le coefficient de glissement thermique. La viscosité μ est exprimée dans le cadre du modèle d'interaction des sphères dures variables (VHS) [6]. Dans cet article nous employons le coefficient $\sigma_p = 1.012$ de glissement de vitesse donné par Kogan [5], dans le cas d'une réflexion purement diffuse. La valeur bien connue de σ_T égale à 0.84, suggéré par Kogan [5], la valeur calculée pour l'hélium en [7], et la valeur mesurée en [8] pour l'air, sont utilisées dans ce travail. Enfin une condition aux limites proposée par Kogan [5] est également choisie pour décrire le saut de température à la paroi. En outre, le libre parcours moyen est écrit en fonction des paramètres macroscopiques suivant la forme usuelle $\lambda = k_\lambda \mu / p \sqrt{RT}$, où k_λ dépend du modèle d'interaction moléculaire. Pour le modèle des sphères dures (HS) la formule de Chapman [9] conduit à $k_\lambda = \sqrt{\pi/2}$. On utilise ici $k_\lambda = 2(7 - 2\omega)(5 - 2\omega) / 15\sqrt{2\pi}$ du modèle VHS [6] plus général que le modèle HS, ω un index de viscosité compris entre 0.5 et 1.0 suivant le gaz.

3. Analyse dimensionnelle

Dans l'étude stationnaire de l'écoulement les dérivées par rapport aux temps sont omises. Les variables sont adimensionnées de la façon suivante : la coordonnée x de la direction de l'écoulement par la longueur du canal L , la coordonnée y normale à la paroi par la profondeur H du canal. Le rapport d'aspect hauteur/largeur ε est égal à $\varepsilon = H/L$ est très petit devant 1. La vitesse u dans la direction de l'écoulement est normalisée par la vitesse u_R , qui est proche de la vitesse de sortie et du même ordre que la vitesse débitante. La vitesse v est normalisée par εu_R . La pression est normalisée par la pression de sortie p_{out} (où l'indice «out» se rapporte aux conditions de sortie). La température est normalisée par la température de paroi en sortie de canal $T_{w_{out}}$; finalement la densité est normalisée par la valeur appropriée $\rho_{w_{out}}$ de sortie, et le coefficient de viscosité par la valeur μ_{out} correspondant à la température $T_{w_{out}}$. On introduit enfin une deuxième variable thermique adimensionnée θ :

$$\tilde{\theta} = \frac{T - T_{axe}(x)}{T_w(x) - T_{axe}(x)}$$

où T_{axe} est la température sur l'axe de symétrie. Cette forme de température, adimensionnée a été choisi pour obtenir une variable θ et sa dérivée par rapport à y , toutes deux d'ordre zéro,

c'est-à-dire du même ordre que 1. En outre, nous considérons des écoulements pilotés par gradient de température où la pression reste partout proche de sa valeur réservoir p_{out} . Ce pourquoi, comme pour la température et pour les mêmes raisons, nous présentons une seconde variable adimensionnée $\tilde{\Pi}$ pour représenter la pression :

$$\tilde{\Pi} = \frac{p - p_{out}}{p_M - p_{out}}, \quad (2)$$

où p_M représente le maximum de la pression dans le canal. Nous obtenons ainsi une variable $\tilde{\Pi}$ et sa dérivée par rapport à x toutes deux d'ordre zéro. On obtient

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{p - p_{out}}{p_M - p_{out}} \right) = \frac{1}{p_M - p_{out}} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}} = \frac{p_{out}}{\Delta p_M} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}$$

et une forme semblable pour la dérivé par rapport à y . Les nombres de Knudsen, de Reynolds et de Mach basés sur les paramètres précisés ci-dessus, s'écrivent:

$$Re = \frac{\rho_{w_{out}} u_R H}{\mu_{w_{out}}}, \quad Kn = \frac{\lambda}{H} = \frac{k_\lambda}{H} \frac{\mu_{w_{out}}}{p_{out}} \sqrt{RT_{w_{out}}}, \quad Ma = \frac{u_R}{a_{w_{out}}}, \quad Kn = k_\lambda \sqrt{\gamma} \frac{Ma}{Re} \quad (3)$$

où $a_{w_{out}} = \sqrt{\gamma RT_{w_{out}}}$. Il est nécessaire de rappeler que nous limitons notre étude aux régimes de glissement caractérisés par un nombre de Knudsen inférieur à 0.25. En outre, étant données les conditions aux limites du système, il est évident que les écoulements étudiés seront à faible nombre de Reynolds (Re d'ordre zéro ($O(1)$) ou d'ordre ε ($O(\varepsilon)$)).

4. Bilans énergétiques et expressions analytiques finales

Les différentes étapes pour obtenir le système d'équations analytiques approchées sont les suivantes:

- dans le système de NS nous utilisons la relation générale liant les nombres Kn, Re et Ma (3).
- nous admettons que dans le micro canal $Re \sim 1$ ou $Re \sim \varepsilon$: nous pouvons ainsi éliminer quelques termes adimensionnés $\varepsilon \ll 1$.
- nous estimons l'ordre de grandeur des termes restant en utilisant des bilans énergétiques dans le canal : pour un gaz macroscopiquement au repos, puis en prenant en compte le mouvement macroscopique.

Deux propriétés principales sont utilisées pour simplifier le système plus avant:

- nous précisons notre choix sur l'ordre de grandeur des variables thermiques

$$T_{out} - T_{in} \sim T_{out} \sim T_{in}, \quad \tilde{T} \sim 1, \quad \partial \tilde{T} / \partial \tilde{x} \sim 1$$

- nous estimons les ordres des grandeurs respectifs des flux thermiques caractérisant le transfert transversal et le transfert dans le sens de l'écoulement. Nous supposons que le mouvement du gaz ne change pas les ordres de grandeur relatifs de ces transferts. Cette hypothèse est basée sur les très faibles valeurs des débits massiques considérés.

Nous obtenons ainsi une vitesse de référence u_R , proche de la vitesse de sortie ($u_R \sim u_{out}$), pour normaliser les deux composants u et v de la vitesse, et pour expliciter le nombre de Re

$$u_R = \frac{\varepsilon}{2 p_{out}} \frac{R}{Pr} \mu_{w_{out}} \frac{T_{w_{out}}}{H} = \frac{1}{2 p_{out}} \frac{R}{Pr} \mu_{w_{out}} \frac{T_{w_{out}}}{L}, \quad Re = \frac{\rho_{w_{out}} u_R H}{\mu_{w_{out}}} = \frac{\varepsilon}{2 Pr}$$

ou Pr est le nombre de Prandtl. En suivant la méthode indiquée ci-dessus, nous obtenons l'expression analytique du profil transversal de vitesse :

$$\tilde{u}(\tilde{y}) = \left(\frac{3}{2}(4\tilde{y}^2 - 1) - 6Kn_*\tilde{T}^{\omega+0.5} \right) \frac{2\sigma_T K_\omega \text{Pr} \tilde{T}^\omega - \tilde{T}\tilde{Q}}{1 + 6Kn_*\tilde{T}^{\omega+0.5}} + 2\sigma_T K_\omega \text{Pr} \tilde{T}^\omega \quad (4)$$

où les notations suivantes sont employées

$$Kn_* = K_{slip} Kn_{out}, \quad \partial\tilde{T}/\partial\tilde{x} = K_w, \quad K_{slip} = \sigma_p \sqrt{2}/k_\lambda$$

et où \tilde{Q} est le débit massique adimensionné de la façon suivante $Q = \tilde{Q}\mu_{out}H/2\text{Pr}L$.

L'expression analytique de la distribution de pression $\tilde{\Pi}$ est obtenue sous la forme:

$$\tilde{\Pi} = \int_0^{\tilde{x}} A d\tilde{x} - \tilde{Q} \int_0^{\tilde{x}} B d\tilde{x} = \tilde{\Pi}_A - \tilde{Q}\tilde{\Pi}_B$$

$$\tilde{\Pi}_A = \frac{2\sigma_T \text{Pr}}{Kn_*} \left(D_{\omega+0.5}(\tilde{x}) + \frac{1}{6Kn_*(\omega+0.5)} \ln \frac{1+1+6Kn_*\tilde{T}_{w_{in}}^{\omega+0.5}}{1+6Kn_*\tilde{T}^{\omega+0.5}} \right),$$

où on utilise $D_\nu(\tilde{x}) = (\tilde{T}^\nu(\tilde{x}) - \tilde{T}_{w_{in}}^\nu)/\nu$

$$\tilde{\Pi}_B = \frac{c}{K_w} \left(\left(1 + \frac{1}{2}cKn_* + \frac{1}{4}c^2Kn_*^2 \right) D_{\omega+2}(\tilde{x}) - cKn_*(1+cKn_*)D_{2\omega+2.5}(\tilde{x}) + c^2Kn_*^2D_{3\omega+3}(\tilde{x}) \right), \quad c = \frac{6}{1+3Kn_*}$$

En écrivant $\tilde{\Pi}(\tilde{x}=1) = 0$, on obtient

$$\tilde{Q} = \frac{\frac{2\sigma_T \text{Pr}}{Kn_*} \left(D_{\omega+0.5} + \frac{1}{6Kn_*(\omega+0.5)} \ln \frac{1+1+6Kn_*\tilde{T}_{w_{in}}^{\omega+0.5}}{1+6Kn_*\tilde{T}^{\omega+0.5}} \right)}{\frac{c}{K_w} \left(\left(1 + \frac{1}{2}cKn_* + \frac{1}{4}c^2Kn_*^2 \right) D_{\omega+2} - cKn_*(1+cKn_*)D_{2\omega+2.5} + c^2Kn_*^2D_{3\omega+3} \right)}, \quad D_\nu(\tilde{x})_{\tilde{x}=1} = D_\nu \quad (5)$$

5. Simulation et comparaison numériques avec approche analytique et d'autres théories

5.1. Simulation numérique

Pour la simulation numérique des écoulements en micro canal on résout le système d'équation NS. Les calculs sont effectués pour un écoulement bidimensionnel entre l'axe de symétrie et le plaque parallèle à la distance $H/2$. Les calculs sont exécutés pour différents gaz : hélium, azote et air dans un canal de hauteur $H = 10\mu m$ et de longueur $L = 1cm$. Nous comparons les profils analytiques et numériques pour différentes conditions :

- un écoulement d'hélium et un écoulement d'air pour lesquels les réservoirs sont maintenus à la pression atmosphérique p_{atm} , avec une différence de température entre les deux réservoirs maintenue égale à $277.4K$;
- des écoulements d'azote avec une différence de température maintenue égale à $300K$, où les pressions, toujours identiques dans les deux réservoirs, varient entre la pression atmosphérique p_{atm} et $p_{atm}/20$ (Tab. 1) ;
- des écoulements d'azote où les deux réservoirs sont maintenus à la pression atmosphérique et où la différence de températures varie entre $140K$ à $600K$ (Tab. 1).

$T_{out} - T_{in} (K)$	140	300	600	p_{out}	p_{atm}	$0.1p_{out}$	$0.05p_{out}$
Kn_{out}	0.008	0.0126	0.0209	Kn_{out}	0.0126	0.126	0.253
Q NS (num.)	1.318	2.665	4.887	Q NS (num.)	2.665	2.675	2.678
Q NS (anal.)	1.318	2.665	4.887	Q NS (anal.)	2.665	2.648	2.595
Q BE (S-mod)	1.252	2.408	4.102	Q BE (S-mod)	2.408	2.720	2.266

Tableau 1 : Débit adimensionné $Q \cdot 10^{12} \text{ kg/s}$ pour l'écoulement de nitrogène.

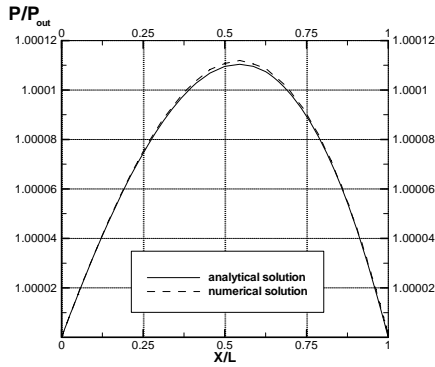


Figure 1 : Les profils de pression pour l'écoulement de l'hélium, $Kn_{out} = 0.036$

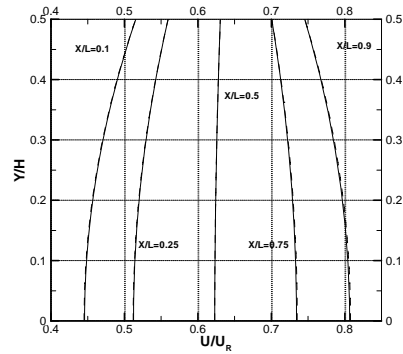


Figure 2 : Les profils de vitesse pour l'écoulement de l'hélium, $Kn_{out} = 0.036$

5.2. Comparaisons et commentaires

Le phénomène classique de transpiration thermique concerne le déclenchement et le développement d'un écoulement instationnaire entre deux réservoirs. Au début de l'expérience les deux réservoirs sont à la même pression et à des températures différentes, et leur différence de températures est maintenue pendant l'expérience. Quand les deux réservoirs sont reliés par un micro canal, le gaz s'écoule du réservoir froid vers le réservoir chaud jusqu'à ce que le débit s'annule. Dans notre étude les pressions des deux réservoirs sont maintenues égales et constantes. Nous obtenons un débit massique constant allant du réservoir froid vers le réservoir chaud, tandis qu'un profil non linéaire de pression s'établit le long du canal.

Les débits massiques calculés numériquement et analytiquement sont comparés dans le Tableau 1 pour différentes conditions d'écoulement. Les valeurs analytiques et numériques du débit massique coïncident pratiquement pour les petits nombres de Knudsen et commencent à différer d'environ 3% pour un Knudsen plus grand que 0.25. On compare aussi avec les résultats [2] à partir d'une résolution numérique de l'équation de Boltzmann basée sur la modélisation de l'opérateur collisionnel (S-modèle) et la discrétisation de l'espace de vitesse. La différence de débit massique entre l'approche analytique proposée et la méthode employée dans [2] est d'environ 10–15%. Il faut noter que l'auteur de [2] exprime l'intégrale de collisions de l'équation de Boltzmann en utilisant le S-modèle linéarisé, ce qui donne un nombre de Prandtl qui n'est correct que pour les gaz monatomiques. De plus, l'auteur utilise le HS modèle pour décrire l'interaction entre les molécules. On constate que dans la première moitié du canal le maximum de vitesse se trouve sur la paroi tandis que le gaz s'écoule « à contre pression » (Fig. 1). Au contraire, dans la deuxième partie la vitesse maximale est sur l'axe, le profil de vitesse a une forme semblable à celle de l'écoulement de Poiseuille, et la pression diminue dans la direction de l'écoulement (Fig. 1).

L'influence du gradient de température le long de la paroi est étudié dans une deuxième série de calculs. Le débit augmente avec le gradient de température (Tab. 1). Le nombre de Knudsen de sortie augmente ici du seul fait de l'augmentation de la température du réservoir de sortie, puisque la pression dans le réservoir reste la même.

L'influence des pressions de réservoir (i.e. celle de nombre de Knudsen) est étudiée dans une troisième série de calculs. On note que le débit dépend faiblement de la pression de réservoir pour la gamme de pression considérée (Tab. 1), ce qui n'est pas surprenant au vu des expressions analytiques (5). La pression à l'intérieur du canal augmente avec le nombre de Knudsen. Comme on l'a dit plus haut, les profils de vitesse changent d'allure le long du canal, mais ils deviennent de plus en plus uniformes lorsque le Knudsen augmente (Fig.1).

Les profils analytiques et numériques sont en général en bon accord. Les résultats de l'approche cinétique [2] sont dans un accord raisonnable, si l'on exclut la partie des profils transversaux de vitesse, très proche de la paroi. Cette différence locale peut être partiellement expliquée par les effets de couche de Knudsen.

6. Conclusion

Nous avons concentré notre intérêt sur une approche analytique non-isotherme basé sur les équations de Navier-Stokes pour un nombre de Knudsen inférieur ou égal à 0.25. A partir d'une méthode de petite perturbation pour les pressions de réservoir égales entre elles, on obtient une expression du débit, les profils analytiques de pression et de vitesse ainsi que le flux de la chaleur. Nos profils analytiques coïncident parfaitement avec les résultats numériques « exact » et ils sont en accord raisonnable avec les résultats donnés par l'approche cinétique du S-modèle (si on néglige les profils de vitesse au voisinage de la paroi). Les expressions analytiques obtenues sont originales pour des écoulements compressibles. Elles sont évidemment utiles pour le développement de divers dispositifs utilisant l'effet de transpiration thermique pour déclencher et entretenir un écoulement du gaz en micro canal. Expressions obtenues semblent très facile à employer; elles réduisent au minimum le temps de calcul. Les propriétés physiques principales de ces écoulements peuvent se résumer ainsi:

- le débit dépend très faiblement de la pression de réservoir et augmente régulièrement avec le gradient de la température.
- la variation de la pression le long du canal (d'ordre deux selon le nombre de Knudsen) est sensiblement non linéaire et présente une valeur maximale en un point voisin du milieu du canal.
- la courbure du profil de vitesse change en ce point. Dans la deuxième partie du canal cette courbure devient semblable à celle des profils isothermes; mais la vitesse de glissement reste partout plus importante que dans le cas isotherme.
- le flux transversal de chaleur adimensionné est une quantité du deuxième ordre selon ε . Il varie avec la coordonnée transversale y et dépend très sensiblement du coefficient thermique σ_T .

Références

- [1] Stvorik T.S., Park H.S. and Loyalka S.K. 1978 Thermal transpiration: A comparison of experiment and theory *J. Vac. Sci. Technol.*, 15(6), 1978, pp. 1844-1852.
- [2] Sharipov F, Non-isothermal gas flow through rectangular microchannels, *J. Micromech. Microeng.*, 9, 1999, 394-401.
- [3] Ohwada, T., Sone, Y., and Aoki, K. 1989 Numerical analysis of the Poiseuille and thermal transpiration flows between two parallel plates, *Physics of Fluids A*, 1(12), 2042-2049.
- [4] Karniadakis, G.E., Beskok A. *Microflow: fundamental and simulations*, Springer-Verlag, 2002.
- [5] Kogan M.N., *Rarefied gas dynamics*, Plenum Press, New York, 1969.
- [6] Bird, G.A. 1994 *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*, Oxford Press.
- [7] Sharipov F., Data on the velocity slip and temperature jump coefficients, In *Thermal and Mechanical Simulation*, 5th Int. Conf. EuroSimE 2004, pp.243-249, Shaker Publishing.
- [8] Prodnov B.T., Kulev A.N., Tuchvetov F.T., (1977), Thermal transpiration in a circular capillary with a small temperature difference, *Journal of Fluid Mechanics*, 88, N 4, 609--622.
- [9] Chapman, S. and Cowling, T.G. (1970), *The mathematical theory of non-uniform gases*, third edition, University Press, Cambridge.