

# Modélisation de la convection de double diffusion en présence de rayonnement dans une cavité carrée

Ahmed MEZRHAB<sup>1\*</sup>, Mohammed JAMI<sup>1</sup>, Denis LEMONNIER<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique & Energétique, Département de Physique, Faculté des Sciences 60000 Oujda, Maroc

<sup>2</sup>Laboratoire d'Etudes Thermiques, ENSMA, 86961 Futuroscope Chasseneuil cedex, France

\* (auteur correspondant : [mezrhab@sciences.univ-oujda.ac.ma](mailto:mezrhab@sciences.univ-oujda.ac.ma) )

**Résumé** – Dans cette communication, nous analysons les effets radiatifs sur la convection de double diffusion dans une cavité carrée différentiellement chauffée. Nous étudions l'influence du rapport de forces de flottabilité  $N$  sur un écoulement dans lequel les forces de poussée thermiques et massiques sont du même ordre de grandeur ( $Le = 1$ ) et coopèrent ( $N \geq 0$ ). Un schéma hybride, basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau (Lattice Boltzmann Method: LBM) pour la résolution des équations de mouvement et sur la méthode des différences finies pour le traitement des équations de l'énergie et de la concentration, est utilisé. L'équation de transfert radiatif est résolue par la méthode des ordonnées discrètes.

## Nomenclature

$C$	concentration, $kg.m^{-3}$	$x, y$	coordonnées cartésiennes, $m$
$C_0$	concentration moyenne, $(C_b + C_h)/2$	<i>Symboles grecs</i>	
$D$	diffusivité massique, $m^2.s^{-1}$	$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
$H(\vec{r}_p)$	flux radiatif adimensionnel incident sur la position $\vec{r}_p$ .	$\beta_c$	coefficient d'expansion massique, $m^3.kg^{-1}$
$i$	intensité du rayonnement, $Wm^{-2}$	$\beta_t$	coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$
$I$	intensité adimensionnelle du rayonnement, $i/4\sigma T_0^4$	$\varepsilon$	émissivité de la surface radiative
$\kappa$	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	$\Delta T$	différence maximale de température, $(T_c - T_f)$
$L$	longueur de la cavité, $m$	$\Delta C$	différence maximale de concentration, $(C_h - C_b)$
$Le$	nombre de Lewis, $\alpha/D$	$\theta$	température adimensionnelle, $(T - T_0)/\Delta T$
$N$	rapport des forces de flottabilité, $\beta_c \Delta C / \beta_t \Delta T$	$\Theta_0$	température moyenne adimensionnelle, $T_0/\Delta T$
$T_0$	température moyenne, $(T_f + T_c)/2$	$\nu$	viscosité cinématique du fluide, $m^2.s^{-1}$
$Pl$	nombre de Planck, $(k/L)/4\sigma T_0^3$	$\rho_0$	densité du fluide à $T_0$ , $Kg m^{-3}$
$Pr$	nombre de Prandtl, $\nu/\alpha$	$\sigma$	constante de Stefan-Boltzmann, $Wm^{-2}K^{-4}$
$Q_r$	flux radiatif adimensionnel, $q_r/4\sigma T_0^4$	$\kappa_0$	coefficient d'absorption du polluant, $m^{-1}$
$Ra$	nombre de Rayleigh, $g\beta_t \Delta T L^3 / \nu \alpha$	$\tau_0$	épaisseur optique maximale, $\kappa_0 L$
$S$	concentration adimensionnelle du polluant, $(C - C_0)/\Delta C$	$\tau(\vec{r})$	épaisseur optique locale, $\tau_0 [S \Delta C / C_h + C_0/C_h]$
$\hat{s}$	vecteur directeur, $\mu \vec{x} + \xi \vec{y}$	$\omega$	angle solide, $sr$
$T$	température, $K$	<i>Indices et exposants</i>	
$u, w$	composantes de la vitesse, $m.s^{-1}$	$c$	chaude
		$f$	froide
		$h$	haute
		$b$	basse
		$p$	paroi

## 1. Introduction

Le transfert simultané de chaleur et de masse dans un fluide est dû aux gradients de température et de concentration d'un composant du fluide. Ces gradients produisent les forces de poussée d'Archimède provoquant l'écoulement appelé convection de double diffusion. Ce phénomène a fait l'objet de plusieurs études [1,2]. Quand le fluide se comporte comme un milieu semi transparent, le rayonnement participe également au transfert de chaleur. Les paramètres optiques du fluide, comme le coefficient d'absorption, ainsi que sa variation au sein du fluide proportionnellement à la concentration d'un des composants, peuvent influencer la distribution de l'énergie radiative et par conséquent le champ thermique. Il en résulte, dans certains cas, une modification importante de la forme de l'écoulement et des flux de chaleur et de masse pariétaux [3,4]. L'objectif de ce papier est de montrer les effets du rayonnement volumique, du rapport des forces de flottabilité et du coefficient d'absorption du milieu sur le transfert de chaleur et de masse ainsi que sur l'écoulement dans une cavité carrée remplie d'un mélange binaire de gaz dont un des composants absorbe le rayonnement infrarouge.

## 2. Formulation mathématique et procédure numérique

Nous considérons une cavité verticale carrée contenant un mélange binaire de gaz de viscosité cinématique  $\nu$ , de diffusivité thermique  $\alpha$  et de diffusivité massique  $D$ . Ce dernier coefficient caractérise la diffusion d'un des composants (polluant) dans le mélange. Dans ce travail, la masse volumique du polluant sera toujours supposée supérieure à celle du mélange. Ainsi le fluide s'alourdit lorsque sa concentration en polluant augmente et s'allège lorsqu'elle diminue. Cela se traduit par  $\beta_c < 0$ . Par ailleurs, on suppose que le polluant absorbe et émet le rayonnement avec, lorsqu'il est pur, un coefficient d'absorption (gris)  $\kappa_0$ . Le mélange est, quant à lui, supposé transparent en l'absence totale de polluant. Les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables, tandis que les parois verticales sont isothermes et portées à des températures  $T_c$  et  $T_f$  ( $T_f < T_c$ ) comme l'indique la figure 1. De même, on impose sur ces parois des concentrations uniformes de polluant  $C_h$  et  $C_b$  ( $C_b < C_h$ ). Il en résulte des gradients simultanés de température et de concentration qui donnent naissance à un écoulement de convection naturelle de double diffusion. Le fluide est considéré comme incompressible, laminaire et bidimensionnel et l'approximation de Boussinesq est utilisée. Les surfaces radiatives sont supposées grises et diffuses en émission et réflexion.

Vu la simplicité de programmation et la possibilité de traiter des problèmes complexes, la méthode de Boltzmann sur réseau est adoptée dans ce travail. Cette méthode est fondée sur la simulation au niveau microscopique de l'évolution des molécules constituant le fluide. Nous en déduisons le champ de vitesse et, par la suite, les champs de température et de concentration sont obtenus en discrétisant les équations de l'énergie et de conservation de l'espèce polluante par la méthode des différences finies. A chaque itération interne, l'équation de transfert radiative est résolue numériquement par la méthode des ordonnées discrètes avec la quadrature S8.

### 2.1. Champs de vitesses

La discrétisation du domaine est faite suivant le modèle D2Q9 basé sur un réseau carré (voir Figure 2). Chaque motif du réseau est caractérisé par neuf vitesses discrètes ( $c_i$ , ( $i = 1 \dots , 9$ )) représentées sur la figure 3. Le système évolue par pas alternatifs de collision et de propagation suivant l'équation :

$$|f(\vec{r} + \vec{c}_i, t+1)\rangle = |f(\vec{r}, t)\rangle + \Omega |f(\vec{r}, t)\rangle \quad (1)$$

où  $f_i$  est une fonction de distribution d'une particule dans la direction  $i$  et  $\Omega$  est l'opérateur de collision. L'état du système peut être représenté par le vecteur  $|f(\vec{r}, t)\rangle = (f_1(\vec{r}, t), \dots, f_9(\vec{r}, t))^T$  défini dans un espace des phases ( $F = R^9$ ). Une autre idée, exprimée par D'Humièrre [5], consiste à étendre le vecteur  $|f\rangle$  en un vecteur  $|m\rangle$  appartenant à un espace des moments ( $M = R^9$ ). Certains de ces moments, comme la densité de masse  $\rho$  et les composantes de la quantité de mouvement  $\rho u$  et  $\rho w$ , se conservent après la collision. La présence de la force volumique  $g\beta\Delta T[\theta(\vec{r}, t) - NS(\vec{r}, t)]$  modifie la conservation de la vitesse verticale dans l'étape de collision, ce qui se traduit par :

$$w_{bc}^{ac} = w_{bc}^{bc} + g\beta\Delta T[\theta(\vec{r}, t) - NS(\vec{r}, t)] \quad (2)$$

où  $w^{ac}$  et  $w^{bc}$  représentent la composante verticale de la vitesse respectivement après et avant la collision.

Les conditions aux limites dynamiques sur les parois de la cavité sont de types 'rebonds', ce qui permet d'obtenir  $u = w = 0$ . Ainsi, pour un maillage régulier  $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$ , nous aurons :  $u = v = 0$  pour  $x = y = 1/2$ ,  $x = N_x + 1/2$  et  $y = N_y + 1/2$ .

## 2.2. Champs de température et de concentration

Les équations de bilan d'énergie et de concentration sont données par :

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\alpha}{L^2} \right) \frac{\Theta_0}{Pl} \nabla \vec{Q}_r \quad (3)$$

$$u \frac{\partial S}{\partial x} + w \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\alpha}{Le} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

La détermination de la divergence du vecteur flux de chaleur radiatif  $\nabla \vec{Q}_r$  nécessite la résolution de l'équation de transfert radiatif qui, pour un milieu absorbant, émettant, non diffusant et gris, peut s'écrire :

$$\mu \frac{\partial I(\vec{r}, \hat{s})}{\partial X} + \xi \frac{\partial I(\vec{r}, \hat{s})}{\partial Y} + \tau(\vec{r}) I(\vec{r}, \hat{s}) = \frac{\tau(\vec{r}) \Phi(\vec{r})}{4\pi} \quad (5)$$

où  $\Phi$ ,  $G$  et  $\vec{Q}_r$  sont, respectivement, l'énergie radiative émise, le rayonnement incident et le vecteur flux radiatif au point  $\vec{r}$  :

$$\Phi(\vec{r}) = \left( \frac{\theta(\vec{r})}{\Theta_0} + 1 \right)^4, \quad G(\vec{r}) = \int_{4\pi} I(\vec{r}, \hat{s}) d\omega, \quad \vec{Q}_r = \int_{4\pi} \hat{s} I(\vec{r}, \hat{s}) d\omega \quad (6)$$

L'intégration de l'équation de transfert radiatif (Eq. 5) sur toutes les directions de l'espace permet d'exprimer le terme source radiatif de l'équation d'énergie sous la forme :

$$\nabla \vec{Q}_r = \tau(\vec{r}) (\Phi(\vec{r}) - G(\vec{r})) \quad (9)$$

Le couplage numérique entre la méthode de Boltzmann sur réseau et la méthode des différences finies consiste à utiliser les mêmes pas spatial et temporel (égaux à 1 dans notre calcul) pour les deux méthodes. Dans ce cas, les conditions aux limites en température et concentration sont :

- Sur la paroi froide :  $\theta(1/2, y) = -0,5$  et  $S(1/2, y) = 0,5$  pour  $1/2 \leq y \leq N_y + 1/2$

- Sur la paroi chaude :  $\theta(N_x+1/2,y) = 0,5$  et  $S(N_x+1/2,y) = -0.5$  pour  $1/2 \leq y \leq N_y+1/2$
- Sur les parois horizontales,  $\frac{\partial \theta}{\partial y}(x,1/2) = 0$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial y}(x, N_y + 1/2) = 0$ ,  $\frac{\partial S}{\partial y}(x,1/2) = 0$  et  $\frac{\partial S}{\partial y}(x, N_y + 1/2) = 0$  pour  $1/2 \leq x \leq N_x+1/2$ .

En tout point de chaque paroi, on applique la condition de surface radiativement grise et diffuse :

$$I(\vec{r}_p, \hat{s}) = \varepsilon(\vec{r}_p) \frac{\sigma T_p^4}{\pi} + \frac{(1-\varepsilon(\vec{r}_p))}{\pi} H(\vec{r}_p) \quad (10)$$

où  $H$  représente le rayonnement pariétal incident :

$$H(\vec{r}_p) = \int_{\vec{n} \cdot \hat{s} < 0} I(\vec{r}_p, \hat{s}') |\hat{s}' \cdot \vec{n}| d\omega \quad (11)$$

Enfin, pour caractériser les transferts de chaleur et de masse aux parois, le nombre de Nusselt moyen est donné par :

$$Nu_w(x_p) = \frac{1}{L} \int_0^L \left( L \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x_p, y} + \frac{\Theta_0}{Pl} \varepsilon(\vec{r}_p) (\Phi(\vec{r}_p) - H(\vec{r}_p)) \right) dy \quad (12)$$

et le nombre de Sherwood moyen correspond à :

$$Sh(x_p) = \int_0^L \left( \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x_p, y} \right) dy \quad (13)$$

### 3. Résultats et discussions

Chaque configuration dépend au minimum de 8 paramètres ( $Le$ ,  $N$ ,  $Pl$ ,  $Pr$ ,  $Ra$ ,  $\varepsilon$ ,  $\tau(r)$ ,  $\Theta_0$ ). Les nombres  $Le$ ,  $Pl$ ,  $Pr$ ,  $Ra$  et  $\Theta_0$  sont fixés respectivement à 1, 0.02, 0.71,  $5 \times 10^6$  et 1.5. Afin de maximiser l'influence de l'absorption variable, on fixe  $C_b=0$  et il en résulte:  $\tau(\vec{r}) = \tau_0 [S + 0.5]$ . Trois valeurs (0, 1 et 8) du rapport des forces de flottabilité  $N$  ont été utilisées. L'épaisseur optique  $\tau_0$  a été prise entre 0 et 5. Nous supposons que les parois verticales sont noires ( $\varepsilon = 1$ ) tandis que les parois horizontales sont grises, diffuses et parfaitement réfléchissantes ( $\varepsilon = 0$ ).

#### 3.1. Isothermes, iso-concentrations et lignes de courant

Les tracés des isothermes, iso-concentrations et lignes de courant sont présentés sur la figure 4 pour deux valeurs de l'épaisseur optique ( $\tau_0 = 0$  et 5) et pour trois valeurs du rapport des forces de flottabilité ( $N = 0, 1$  et 8). Nous observons qu'à  $\tau_0 = 0$ , les champs de température et de concentration sont identiques et que la stratification de température au cœur de la cavité explique l'état de repos du fluide dans cette zone. Le mouvement symétrique du fluide est généré par les forts gradients thermiques qui se forment au voisinage des parois actives. Nous observons pour des forces de poussée comparables ( $N=1$ ), l'apparition d'un écoulement multicellulaire. Dans ce cas, le rayonnement modifie fortement le champ dynamique, notamment en augmentant le débit du fluide circulant dans la cavité. Cependant, quand les forces massiques deviennent dominantes ( $N=8$ ), l'influence du rayonnement n'apparaît qu'au centre de la cavité sous la forme de champs stratifiés et inclinés de température et de concentration. Nous trouvons ainsi que, dans cette zone, le fluide est au repos, c'est à dire que la force résultante y est nulle; ce qui explique l'inclinaison inverse des isothermes par rapport aux iso-concentrations. De plus, cet équilibre nécessite que la pente des isothermes soit  $N$  fois plus grande que celle des iso-concentrations.

### 3.2. Transferts de chaleur et de masse

D'après la figure 5, on remarque que le flux massique moyen à l'intérieur de la cavité augmente en fonction de  $N$ , mais il est peu sensible au rayonnement surtout pour des valeurs élevées de  $N$ . Pour  $N=0$ , l'influence du rayonnement sur la dynamique de l'écoulement, et par suite sur la répartition de la concentration, est maximale. Néanmoins, même dans ce cas, le flux massique moyen reste quasiment constant.

En ce qui concerne le transfert thermique, d'après la figure 6 on remarque que son évolution en fonction de  $\tau_0$  est importante quelque soit le rapport des forces de poussée. On constate que le rayonnement cause une baisse considérable du nombre de Nusselt moyen. Cela est dû principalement à une diminution importante du flux convectif à la paroi chaude. En fait, la température du fluide augmente lorsqu'il passe le long de la paroi basse où il reçoit, à cause de son absorptivité élevée, l'énergie émise par la paroi chaude. Par ailleurs, on remarque que le nombre de Nusselt moyen augmente lorsque  $N$  augmente. En fait, lorsque  $N$  s'accroît, les forces de poussée augmentent globalement et les vitesses d'écoulement s'intensifient. Le transfert convectif augmente et les effets de rayonnement décroissent.

### 4. Conclusion

Dans cette étude, nous avons modélisé les effets du rayonnement sur un écoulement de double diffusion pour un fluide semi-transparent dans une cavité carrée lorsque des gradients horizontaux de température et de concentration sont imposés. Nous avons pu constater que :

- Quand les forces massiques sont dominantes ( $N=8$ ), le rayonnement influence les champs thermique et dynamique, en particulier au centre de la cavité. La pente des iso-concentrations est accentuée, ce qui contrebalance les forces thermiques au sein de la cavité.

- L'écoulement est fortement dominé par les forces thermiques quand  $N$  se rapproche de 1. Dans ce cas le rayonnement a un grand effet sur les champs thermique, dynamique et de concentration. Le champ dynamique s'intensifie et homogénéise la concentration du polluant au centre de la cavité.

### Références

- [1] A. Draoui, F. Allard, C. Béghein, Numerical analysis of heat transfer by natural convection and radiation in participating fluids enclosed in a square cavity, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 2 (1991), 253-261.
- [2] M. Behnia, J. A. Reizes, G. De Vahl Davis, Combined Radiation and Natural Convection in a Rectangular Cavity with a Transparent wall and containing a Non-participating Fluid, *Int. J. For Numerical Methods In Fluids*, 10 (1990), 305-325.
- [3] A. Yücel, S. Acharya, M. L. Williams, Natural Convection and Radiation in a Square Enclosure, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 15 (1981), 261-278.
- [4] G. Lauriat, Combined Radiation-Convection in Gray Fluids Enclosed in Vertical Cavities, *Journal of Heat Transfer*, 104 (1982), 609-615.
- [5] D. d'Humière, Generalized Lattice Boltzmann Equation, in *Rarefied Gas Dynamics : Theory and Simulations*, Progress in Astronautics and Aeronautics, edited by Shizgal B.D. and Weaver D.P. (AIAA Washington DC), 159 (1992).

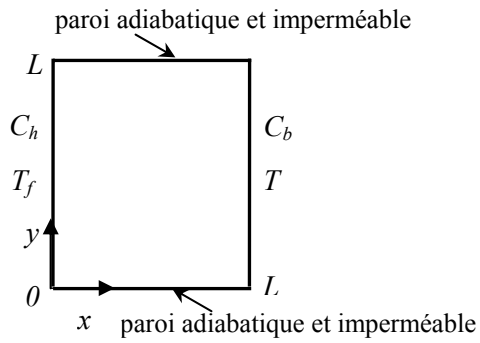


Figure 1 : Géométrie étudiée

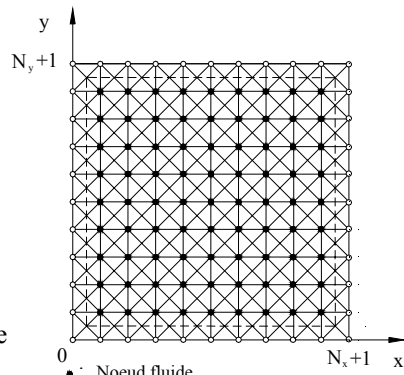


Figure 2 : Maillage utilisé

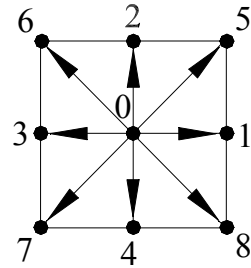


Figure 3 : Modèle D2Q9

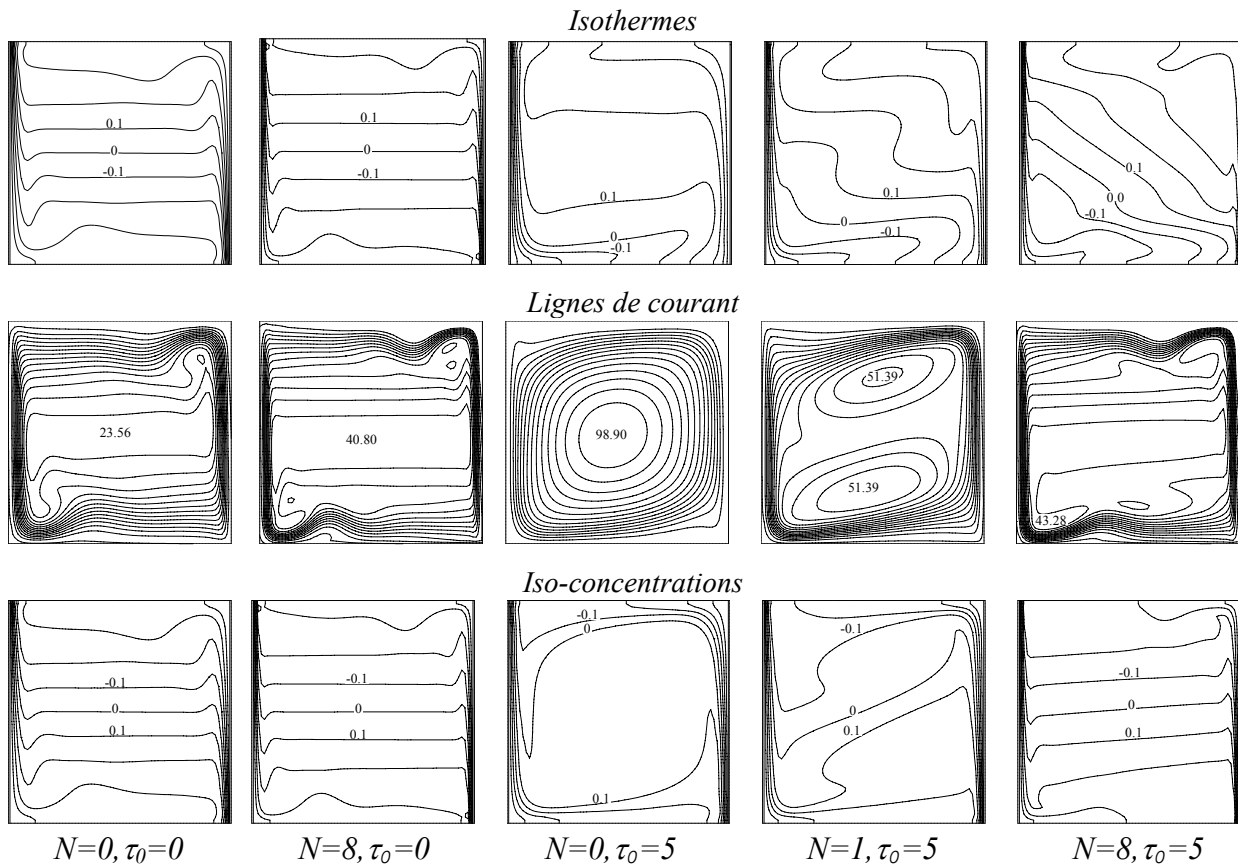


Figure 4 : Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations

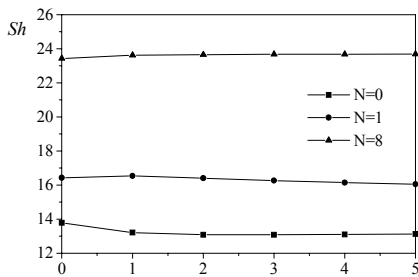


Figure 5 : Nombre de Sherwood moyen

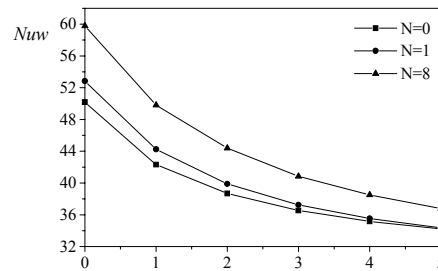


Figure 6 : Nombre de Nusselt moyen