

# Méthode de conduction inverse appliquée à l'estimation d'un flux non uniforme de chauffage par induction

**Aboubacar OUATTARA, Denis MAILLET, Michel LÉBOUCHE, Michel GRADECK**  
 LEMTA UMR-CNRS 7563 INPL -UHP Nancy1, 2 Avenue de la forêt de Haye, BP 160 54504 Vandoeuvre les Nancy.

**Résumé** -Le refroidissement de surfaces métalliques portées à haute température (500-600°C) par un jet d'eau impactant ou par un spray permet l'extraction de flux très élevés. Notre problème est celui de l'estimation du flux pariétal extrait par le fluide, et de la température de paroi (face avant), lors d'un chauffage par induction d'un disque en Nickel grâce à une mesure par thermographie infrarouge du champ de température en face arrière. Une configuration expérimentale et un dimensionnement sont proposés. Le problème direct est résolu et une procédure d'inversion est proposée.

## Nomenclature

$a$	diffusité thermique, $m^2.s^{-1}$	$T$	température, $K$
$c$	chaleur spécifique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	$z$	coordonnée axiale, $m$
$d$	distance écran anti-radiatif - surface, $m$	Alphabet grec	
$D$	diamètre de la rondelle ( $=2R$ ), $m$	$\varepsilon$	émissivité
$e$	épaisseur de la rondelle, $m$	$\delta$	épaisseur de peau, $m$
$g$	densité de flux de chauffage, $W.m^{-2}$	$\sigma$	constante de Stephan, $W.m^{-2}.K^{-4}$
$H$	coefficient de convection, $W.m^{-2}.K^{-1}$	$\bar{\sigma}$	conductivité électrique, $S/m$
$H(t)$	fonction d'Heaviside	$\varphi$	densité de flux de chaleur, $W.m^{-2}$
$J_0$	fonction de Bessel d'ordre 0	$\lambda$	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$J_1$	fonction de Bessel d'ordre 1	$\mu_r$	perméabilité magnétique relative
$m$	masse, $kg$	$\mu_0$	perméabilité magnétique du vide, $Hm^{-1}$
$p$	coordonnée de Laplace	$\omega$	pulsation, <i>radian</i>
$P$	puissance de chauffage, $W$	Indices	
$q$	densité surfacique de flux, $W.m^{-2}$	<i>LAT</i>	latéral
$r$	coordonnée radiale, $m$	<i>INF</i>	inférieur
$R$	rayon de la rondelle, $m$	<i>SUP</i>	supérieur
$s$	densité volumique de puissance, $W.m^{-3}$		
$S$	aire d'une surface du disque, $m^2$		
$t$	temps, $s$		

## 1. Introduction

Cette étude entre dans le cadre du refroidissement diphasique des produits sidérurgiques chez ARCELOR-MITTAL. Il s'agit du refroidissement statique diphasique d'un disque métallique (Nickel) chauffé par induction électromagnétique à haute température en vue d'estimer le flux extrait après impact d'un jet d'eau ou d'un spray. L'évaluation du flux extrait se fait par méthode inverse. Celle-ci doit nous permettre de remonter au flux de refroidissement. Dans les études précédentes, (*Kouachi et al* [1] et *Volle et al* [2] et [3]), des thermocouples permettaient une mesure directe du champ de température ; dans notre cas, la mesure se fera par thermographie infrarouge (IR). Cette technique présente l'avantage

d'acquérir tout le champ de température de la surface visée. L'estimation des flux pariétaux par méthode inverse avec utilisation d'une caméra IR a fait l'objet de plusieurs études (*P.Reulet et al [4], Groß et al [5], S. Seguir-Ouali et al [6]* ). Dans notre étude, nous avons opté pour un chauffage par induction électromagnétique qui permet de chauffer un matériau sans contact direct avec une source d'énergie. Ce procédé consiste à soumettre le corps à chauffer à un champ électromagnétique variable dans le temps, et à dissiper sous forme de chaleur l'énergie entrant dans le corps. La bande de fréquence employée est comprise entre la fréquence industrielle de 50 Hz et quelques mégahertz, si bien que les profondeurs de pénétration s'étagent entre quelques micromètres et quelques centimètres. Cela se traduit par un chauffage dans des couches voisines de la surface par un "effet de peau ". On peut déterminer l'épaisseur des couches appelée épaisseur de peau  $\delta$  avec :

$$\delta = \left( \frac{2}{\omega \mu \bar{\sigma}} \right)^{1/2} \quad : \quad \omega = 2\pi f \quad \text{et} \quad \mu = 4\pi 10^{-7} \mu_r \quad (1)$$

où  $f$  est la fréquence,  $\bar{\sigma} = 1.43 \times 10^7 \text{ S/m}$  et  $\mu_r = 600$  les conductivité électrique et perméabilité magnétique relative du Nickel. Pour une fréquence  $f$  de 400 kHz, cette épaisseur de peau est de l'ordre de 9 micromètres.

## 2. Configuration proposée

Nous considérons un disque de Nickel de rayon  $R = 10\text{cm}$  et d'épaisseur  $e = 2 \text{ cm}$  chauffé par induction à l'aide d'une densité de puissance  $p(r,z)$  et refroidi sur une de ses faces par l'impact d'un jet d'eau refroidissant sa face supérieure à l'aide d'une densité de flux  $\varphi_{jet}(r,t)$  (voir figure 1).

L'équation de la chaleur et ses conditions associées s'écrivent alors :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + s(r,z) = \rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{et} \quad T = T_\infty \quad \text{à} \quad t = 0 \quad (2.a,b)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = h_{SUP}(T)(T - T_\infty) + \varepsilon_{SUP} \sigma (T^4 - T_\infty^4) + \varphi_{jet} \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (2.c)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = h_{INF}(T)(T - T_\infty) + \varepsilon_{INF} \sigma (T^4 - T_\infty^4) \quad \text{en} \quad z = e \quad (2.d)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{en} \quad r = 0 \quad \text{et} \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = h_{LAT}(T)(T - T_\infty) + \varepsilon_{LAT} \sigma (T^4 - T_\infty^4) \quad \text{en} \quad r = R \quad (2.e,f)$$

On se place dans le cas où le chauffage par induction est réglé en puissance et donc constant en temps et mis en route à l'instant  $t = 0$ .

On désire travailler à des niveaux de température de  $600^\circ\text{C}$  et utiliser la thermographie infrarouge en face arrière ( $z = e$ ) pour estimer à la fois la puissance de chauffage  $p$  et le flux de refroidissement  $\varphi_{jet}$ . Il s'agit donc de résoudre successivement deux problèmes inverses .

Nous nous attacherons ici à étudier le premier problème inverse correspondant à  $\varphi_{jet} = 0$  et nous allons examiner successivement le problème direct et le problème inverse correspondant.

### 3. Problème direct

#### 3.1 Cas d'un chauffage par effet de peau uniforme

On s'intéresse ici au cas où le chauffage par induction de puissance totale  $P$  se traduit par un effet de peau uniforme d'épaisseur négligeable. Dans ce cas la source volumique s'écrit :

$s(r, z) = q_m [\delta(z) + \delta(z - e) + \delta(r - R)]$  avec  $q_m = P/(2\pi R(R + e))$  et  $\delta$  la distribution de Dirac.

Les corrélations de convection naturelle turbulentes :

$$\begin{aligned} Nu_{SUP} &= 0.54(Gr_{fD} \cdot Pr_f)^{0.25} = \frac{h_{SUP} \cdot D}{\lambda_{air}} & 10^5 \leq Ra_f \leq 2.10^7 \\ Nu_{INF} &= 0.27(Gr_{fD} \cdot Pr_f)^{0.25} = \frac{h_{INF} \cdot D}{\lambda_{air}} & 3.10^5 \leq Ra_f \leq 10^{10} \quad (3) \\ Nu_{LAT} &= 0.59(Gr_{fe} \cdot Pr_f)^{0.25} = \frac{h_{LAT} \cdot e}{\lambda_{air}} & 10^4 \leq Ra_f \leq 10^9 \end{aligned}$$

permettent de calculer les coefficients de convection naturelle sous la forme suivante pour  $\alpha = SUP, INF, LAT$ . Ces coefficients sont donnés par la table 1

$$h_\alpha = a_\alpha (T_P - T_\infty)^{1/2} + b_\alpha (T_P - T_\infty)^{1/4} + c_\alpha \quad (4)$$

Les nombres de Biot,  $Bi_{SUP} = \frac{h_{SUP} \cdot e}{\lambda_{NICKEL}}$ ,  $Bi_{LAT} = \frac{h_{LAT} \cdot R}{\lambda_{NICKEL}}$ , et  $Bi_{INF} = \frac{h_{INF} \cdot e}{\lambda_{NICKEL}}$  sont faibles ( $h$  inférieurs à 20 S.I) : on peut donc utiliser le modèle du petit corps pour estimer la température moyenne d'équilibre  $T_{moy}$  :

$$P = \sum h_\alpha (T_{moy}) S_\alpha (T_{moy} - T_\infty) + \sigma \varepsilon_\alpha (\sum S_\alpha) [T_{moy}^4 - T_\infty^4] = f(T_{moy}) \quad (5)$$

Cette relation  $P(T_{moy})$  pour  $\varepsilon_\alpha = 1$  est représentée sur la figure 2. On remarque que les pertes radiatives deviennent prédominantes dès que l'on élève la température. Le problème complet non linéaire (2) a été résolu pour des propriétés thermophysiques constantes pour le Nickel par un logiciel aux éléments finis (FLEX PD Ease) avec 105 nœuds, pour  $P = 20W$ . Les différences de température dans le disque sont légèrement supérieures au degré Celcius. Evidemment, le modèle (5) nécessite une émissivité totale indépendante de la température. Si ce n'est pas le cas pour le Nickel à haute température, une peinture noire sur toutes les faces permettra d'assurer cette condition. Pour la mesure, on vérifiera que l'émissivité de cette peinture quasi monochromatique dans la bande de la caméra ne dépende pas de la température (étalonnage avec un thermocouple implémenté dans le disque).

#### 3.2 Cas d'un chauffage par effet de peau annulaire

Pour des raisons pratiques, c'est à dire une double contrainte d'accès libre sur les deux faces du disque (une face impactée par le jet et l'autre observable par une caméra infrarouge, voir figure 4), on utilise un inducteur "pancake" générant un chauffage annulaire en surface :

$$p(r, z) = q_m \delta(z) [H(r - r_1) - H(r - r_2)] \quad \text{avec } q_m = P/(\pi(r_2^2 - r_1^2)) \quad (6)$$

Nous supposons la puissance absorbée indépendante du niveau de température, ce qui permet de travailler à moins de 100°C pour son estimation et d'utiliser un modèle linéaire en linéarisant pertes convectives et radiatives. On pose donc :

$h_{\alpha}^{Eq}(T) = h_{\alpha}(T) + 4\sigma\varepsilon_{\alpha}T_{Film}^3$  avec  $T_{Film} = 1/2(T_{max} + T_{\infty})$  pour  $\alpha = SUP, INF$   
 et  $h_{LAT}^{Eq} = 0$  où  $T_{max}$  est la température maximale atteinte connue à posteriori mais estimée par  $T_{max} = f^{-1}(P)$  donnée par le modèle(5).

### Cas sans perte

Le système (2) s'écrit alors,  $T$  désignant l'échauffement par rapport à l'ambiante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{et } T = 0 \text{ à } t = 0 \quad \text{et } \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ en } r = 0 \text{ et } r = R \quad (7.a, b, c)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = g(r,t) = q(r)H(t) \text{ en } z = 0 \quad \text{et } \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ en } z = e \quad (7.d, e)$$

On effectue une double transformée de Laplace en temps et de Hankel en r :

$$\bar{T}(r, z, p) = \int_0^{\infty} T(r, z, t) e^{-pt} dt \quad \text{et} \quad \tilde{\bar{T}}_n(z, p) = \int_0^R \bar{T}(r, z, p) r J_0(\alpha_n r) dr \quad \text{avec } \alpha_n = \frac{u_n}{R} \quad \text{où}$$

les  $u_n$  sont les solutions de  $J_1(u) = 0$ . L'équation (7) s'écrit alors après transformation :

$$\frac{\partial \tilde{\bar{T}}_n^2}{\partial z} - (\alpha_n^2 + \frac{p}{a}) \tilde{\bar{T}}_n = 0 \quad \text{avec} \quad u_n \approx n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{8(n\pi + \frac{\pi}{4})}$$

La solution s'écrit en face arrière ( $z = e$ )

$$\tilde{\bar{T}}_n = \tilde{Z}_n \tilde{g}_n \quad \text{avec} \quad \tilde{Z}_n = F(p + a\alpha_n^2) \quad \text{avec} \quad F(p) = \frac{1}{\lambda \sqrt{p/a} \sinh((\sqrt{p/a} \cdot)e)} \quad (8)$$

Dans l'espace temps-Hankel, il s'agit d'un produit de convolution :

$$\tilde{T}_n(z = e, t) = (e^{-a\alpha_n^2 t} f(t)) * \tilde{g}_n(t) = \tilde{q}_n \int_0^t f(u) e^{-a\alpha_n^2 u} du = \tilde{q}_n X_n(t) \quad \text{où } f(t) \text{ est l'original de } F(p).$$

$$\text{Le retour dans l'espace original est : } T(r, e, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n(e, t) \frac{J_0(\alpha_n r)}{J_0^2(\alpha_n R)} \quad (9)$$

### Cas avec pertes axiales linéarisées

On reprend l'équation (7) avec les équations (7.b) et (7.c) qui deviennent :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = g(r,t) = q(r)H(t) - h_{SUP}^{EQ} \cdot T \text{ en } z = 0 \quad (10.a) \quad \text{et} \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = h_{INF}^{EQ} \cdot T \text{ en } z = e \quad (10.b)$$

On obtient par la méthode des quadripôles, une solution similaire à (8). Seule change la forme de  $F$  qui s'écrit :

$$F(p) = \frac{1}{((h_{SUP}^{EQ} + h_{INF}^{EQ}) \cosh(e\sqrt{p/a}) + \frac{h_{SUP}^{EQ} h_{INF}^{EQ}}{\lambda \sqrt{p/a}} \sinh(e\sqrt{p/a}) + \lambda(\sqrt{p/a}) \sinh(e\sqrt{p/a}))} \quad (11)$$

On présente sur la figure 3 les résultats correspondant à un chauffage de  $P = 20W$ ,  $r_1 = 6.5cm$  et  $r_2 = 9.5cm$  calculés par transformation intégrale (inversion numérique de Laplace et troncature à 200 harmoniques) et par les éléments finis (avec pertes latérales). Les thermogrammes correspondent au point  $z = e$  et  $r = 0$ .

#### 4. Problème inverse

Le problème inverse est ici un problème des moindres carrés pour chaque harmonique. La solution s'écrit:

$$\hat{q}_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{k_{\max}} X_n^2(t_k)} \sum_{k=1}^{k_{\max}} X_n(t_k) \tilde{Y}_{nk} \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_{nk} = \sum_i \sum_j Y_{ij}(t_k) r_{ij} J_0(\alpha_n r_{ij}) \Delta r_{ij} \quad (12)$$

$\tilde{Y}_{nk}$  résulte d'une quadrature de transformée de Hankel où  $T(r,e,t)$  est évaluée expérimentalement par sa mesure  $Y_{ij}(t_k)$  au temps  $t_k$  et au pixel  $i, j$  de rayon  $r_{ij}$  sur la face arrière du disque. Il s'agit donc ici d'une méthode analytique d'inversion par décomposition en valeurs singulières et la reconstitution du flux s'effectue à l'aide de:

$$\hat{q}(r) = \frac{2}{R^2} \sum_1^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r)}{J_0^2(\alpha_n R)} \hat{q}_n \quad (13)$$

Application : Cas du chauffage par effet de peau annulaire avec pertes axiales (voir figure 4).

$q(r) = q_m [H(r - r_1) - H(r - r_2)]$  avec  $r_1 = 65mm$ ,  $r_2 = 95mm$ ,  $R = 100mm$ ,  $e = 20mm$ ,  $P = 20W$

$T_{\infty} = 27^{\circ}C$ ,  $\lambda = 90.7 W.m^{-1}.K^{-1}$ ,  $a = 2.3141 \times 10^{-5} m^2.s$ ,  $\varepsilon_{LAT} = 0.3$ ,  $\varepsilon_{INF} = 1$ ,  $\varepsilon_{LAT} = 0$  avec

$q_m = P / \pi(r_2^2 - r_1^2)$

La simulation du problème (ligne et non surface visée) nous donne les profils de température sur 200 harmoniques et 500 points (voir figure 5) et nous permet d'estimer le flux en créneau.

#### 5. Conclusion

Ce travail exploratoire concerne la faisabilité de l'utilisation d'une méthode de conduction inverse pour estimer un flux de chauffage par induction non uniforme. Cette estimation est nécessaire pour pouvoir ensuite remonter au flux de refroidissement produit par un jet d'eau ou un spray impactant la pièce chauffée à des températures voisines de  $600^{\circ}C$ . L'algorithme d'inversion proposée (approche modale dans l'espace de Hankel) reste à être testé numériquement sur des données bruitées.

#### Références

- [1] F. Volle, Conduction inverse sur un cylindre en rotation. Cas de l'ébullition convective induite par l'impact d'un jet d'eau, Thèse UHP-Nancy-I, 4 Dec.2006.
- [2] A. Kouachi, Etude expérimentale de l'ébullition convective d'un jet d'eau plan impactant une surface mobile portée à haute température, Thèse UHP-Nancy-I, 20 Oct. 2006.
- [3] F. Volle, A. Kouachi, M. Gradeck, D. Maillat, Estimation des flux extraits par un jet impactant une surface mobile : comparaison entre une méthode analytique 1D et une méthode numérique 2D. SFT2006, Tome1, Ile de Ré, 16-19 Mai 2006, page 167-172.
- [4] P. Reulet, P. Millan, Resolution of 3D unsteady linear and non-linear inverse problems using infrared observations. Eurotherm Winter School, Workshops Volume 2, METTI 2005, article W10.

[5] S. Groß, M. Soemers, A. Mhamdi, F. Al Sibai, A. Reusken, W. Marquardt, U. Renz. Identification of boundary heat fluxes in a falling film experiment using high resolution temperature measurements. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 48, Issues 25-26, December 2005, Pages 5549-5562.

[6] S. Seghir-Ouali, D. Saury, S. Harmand, O. Phillipart and D. Laloy, Convective heat transfer inside a rotating cylinder with an axial air flow. *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 45, Issue 12, December 2006, Pages 1166-1178.

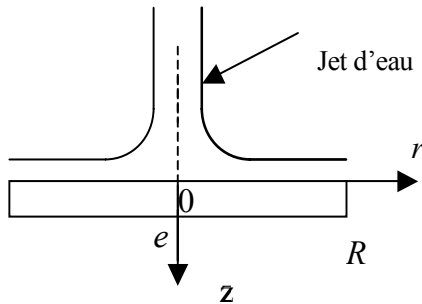


Figure 1 : Montage proposé

	$\alpha = SUP$	$\alpha = INF$	$\alpha = LAT$
$a_\alpha$	-0.2010	-0.1005	-0.3905
$b_\alpha$	2.6811	1.3405	5.2092
$c_\alpha$	-0.0429	-0.0215	-0.0834

Table 1 : Coefficients  $a_\alpha$ ,  $b_\alpha$ ,  $c_\alpha$  et  $D=200mm$ ;  $e=20mm$

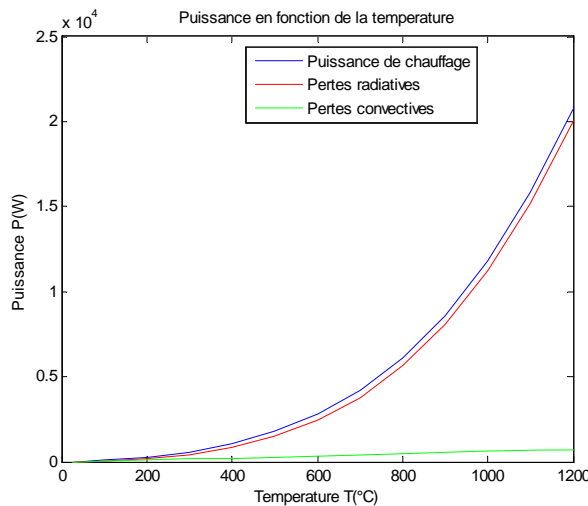


Figure 2 : Puissance en fonction de la température

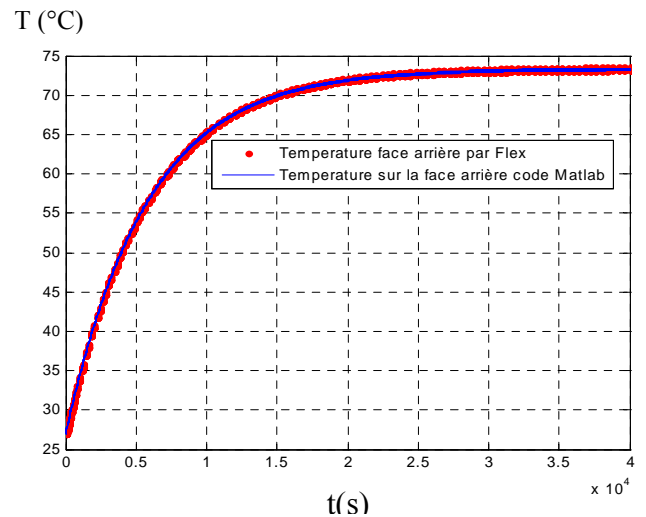


Figure 3 : Comparaison des thermogrammes Eléments-finis-analytique

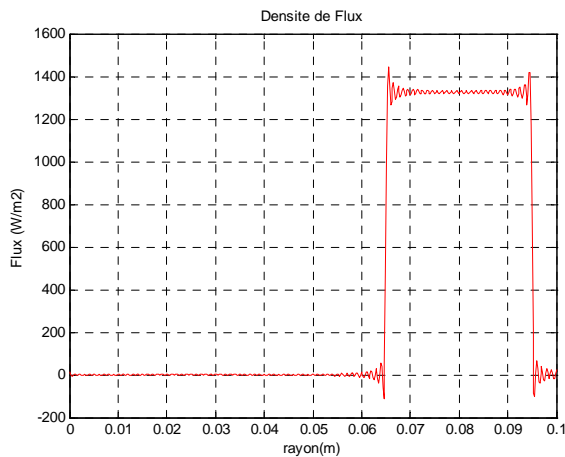


Figure 5 : Evolution du flux estimé

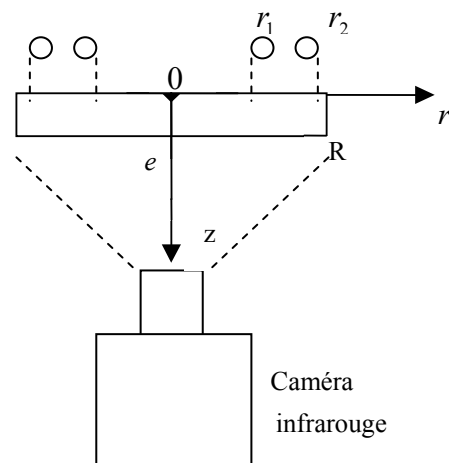


Figure 4 : Chauffage annulaire