

Chapitre 3

MÉTHODE GÉNÉRALE DE CALCUL POUR LES ÉCHANGEURS

*Si tous ceux qui croient avoir raison
n'avaient pas tort, la vérité ne serait pas loin.*

Pierre DAC

Le calcul des échangeurs de configurations diverses a longtemps été calqué sur celui des échangeurs à courants parallèles, à grand renfort de termes correctifs d'origine expérimentale. Il existe pourtant une méthode plus structurée et beaucoup plus riche dans ses applications, la méthode NUT. C'est elle que nous utiliserons exclusivement dans la suite.

3.1. – FLUX THERMIQUE MAXIMUM DANS UN ÉCHANGEUR

♣ Supposons qu'il ne se produise aucune perte de chaleur externe : la puissance thermique échangée Φ peut être calculée indifféremment en faisant un bilan enthalpique global sur l'un ou l'autre des fluides :

$$\boxed{\Phi = q_{tc} (T_{ce} - T_{cs}) = q_{tf} (T_{fs} - T_{fe})} \quad (3.1)$$

où $q_t = q_m C_p$: débit thermique unitaire (avec indice c pour le fluide chaud et f pour le fluide froid).

△ Nous avons déjà observé (§ 2.2.♣) que le fluide qui a le plus petit débit thermique unitaire accuse le changement de température le plus important. La plage de variation des températures dans l'échangeur étant généralement limitée par des contraintes pratiques, c'est donc de lui que dépend la quantité de chaleur maximale qui pourra être échangée, et l'on dit d'une manière imagée qu'il « *commande le transfert* ». L'expression a cependant l'inconvénient d'introduire une apparence de dissymétrie entre les rôles des deux fluides, et il faut se garder de la prendre au pied de la lettre.

◆ Jusqu'à quelle valeur ΔT_{max} peut aller cet écart de température ? L'examen des courbes $T = f(S)$ étudiées pour les échangeurs à courants parallèles va servir de support pour répondre à cette question.

Avec l'échangeur *co-courant* (fig. 2.2, § 2.2), l'écart maximum des températures dans l'appareil est :

$$\Delta T_{max} = T_{ce} - T_{fe}$$

On voit sur la figure que cette variation ne peut être subie par aucun des deux fluides.

Dans le cas de l'échangeur à *contre-courant* avec $q_{tc} < q_{tf}$, la figure 2.4 (§ 2.3.2) montre que :

$$\Delta T_{max} = T_{ce} - T_{\infty}$$

et que ce ΔT_{max} peut être atteint par le fluide chaud si la surface est infiniment grande.

Comme $T_{\infty} \rightarrow T_{fe}$ si $\Sigma \rightarrow \infty$, on a donc :

$$\Delta T_{max} = T_{ce} - T_{fe} \quad (3.2a)$$

Enfin, avec un échangeur à *contre-courant* où $q_{tf} < q_{tc}$, on constate sur la figure 2.5 (§ 2.3.3) que l'écart maximum a pour valeur :

$$\Delta T_{max} = T_{\infty} - T_{fe}$$

et qu'il peut cette fois être atteint par le fluide froid si la surface d'échange tend vers l'infini.

Là encore, puisque $T_{\infty} \rightarrow T_{ce}$ quand $\Sigma \rightarrow \infty$, on a :

$$\Delta T_{max} = T_{ce} - T_{fe} \quad (3.2b)$$

Dans les deux derniers exemples, le ΔT_{max} est donc accessible au fluide qui possède le plus petit débit thermique unitaire, soit $q_{t \min}$, pourvu que la surface d'échange soit très grande. Le flux maximum transférable est donc :

$$\Phi_{max} = q_{t \min} \Delta T_{max} \quad (3.3)$$

$$\boxed{\Phi_{max} = q_{t \min} (T_{ce} - T_{fe})} \quad (3.4)$$

♥ Dans tous les autres cas, quelque soit le modèle d'échangeur, on voit aisément qu'aucun des fluides ne peut subir une variation de température supérieure à $T_{ce} - T_{fe}$, car alors il faudrait que le fluide froid sorte à une température supérieure à T_{ce} , ou que le fluide chaud sorte à une température inférieure à T_{fe} . Ceci est physiquement impossible, car ce serait une violation du second principe de la thermodynamique. **La relation (3.4) a donc une valeur générale.**

3.2. – EFFICACITÉ THERMIQUE D'UN ÉCHANGEUR

♣ Pour caractériser les performances thermiques d'un échangeur, la démarche la plus naturelle paraît être de comparer sa puissance thermique Φ avec le flux maximum Φ_{max}

précédemment défini. On appelle « *efficacité thermique* » E de l'échangeur le rapport Φ / Φ_{max} , qui est évidemment sans dimension :

$$\boxed{E = \frac{\Phi}{\Phi_{max}}} \quad 0 \leq E \leq 1 \quad (3.5)$$

d'où, d'après (3.1) :

$$E = \frac{q_{tc} (T_{ce} - T_{cs})}{q_{t \min} (T_{ce} - T_{fe})} = \frac{q_{tf} (T_{fs} - T_{fe})}{q_{t \min} (T_{ce} - T_{fe})} \quad (3.6)$$

⚠ Il est à noter que sous l'une ou l'autre forme, la définition de E ne prend en compte que trois des quatre températures concernées. En d'autres termes, trois quelconques des températures d'entrée-sortie suffisent à caractériser E . Par ailleurs, d'après le paragraphe précédent, l'efficacité maximale $E_{max} = 1$ est atteinte si l'échangeur est à contre-courant, infiniment long et sans pertes.

◆ Introduisons deux nouvelles grandeurs sans dimension :

$$E_c = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}} = \text{efficacité relative côté fluide chaud} \quad (3.7)$$

$$E_f = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} = \text{efficacité relative côté fluide froid} \quad (3.8)$$

Il existe une relation simple entre E_c et E_f . Soit R le rapport des débits thermiques unitaires, que l'on appelle encore « *facteur de déséquilibre* » :

$$\boxed{R = \frac{q_{t \min}}{q_{t \max}}} \quad (3.9)$$

L'ensemble des cas possibles se subdivise en deux :

- Ou bien $q_{t \min} = q_{tc}$

Alors, d'après les relations (3.6) à (3.8), on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} E = E_c = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{1}{R} E_f \\ R = \frac{E_f}{E_c} = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{cs}} \end{array}} \quad (3.10)$$

- Ou bien $q_{t \min} = q_{tf}$

et l'efficacité vaut :

$$\begin{aligned}
 E = E_f &= \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{1}{R} E_c \\
 R &= \frac{E_c}{E_f} = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{fs} - T_{fe}}
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

♥ Cette efficacité thermique E va servir en particulier à exprimer le flux thermique Φ dans l'échangeur, en se reportant à la définition (3.5) :

$$\Phi = E \Phi_{max}$$

d'où si l'on tient compte de (3.4) :

$$\Phi = E q_{t\ min} (T_{ce} - T_{fe}) \tag{3.12}$$

formule qui présente l'avantage de ne faire intervenir que les températures d'entrée des fluides.

3.3. – NOMBRE D'UNITÉS DE TRANSFERT : NUT

Au chapitre 2, en calculant les écarts de températures d'entrée-sortie dans les échangeurs à courants parallèles, nous avons vu apparaître les rapports $k \Sigma / q_{tc}$ et $k \Sigma / q_{tf}$, dont on vérifie aisément qu'ils sont *sans dimension*.

Ces nombres, représentatifs du pouvoir d'échange de l'appareil, sont appelés « *nombres d'unités de transfert* » et notés NUT_c côté fluide chaud ou NUT_f côté fluide froid :

$$NUT_c = \frac{k \Sigma}{q_{tc}} ; \quad NUT_f = \frac{k \Sigma}{q_{tf}} \tag{3.13}$$

Le nombre d'unités de transfert relatif au fluide qui possède le plus petit débit thermique unitaire $q_{t\ min}$ est habituellement désigné par NUT (sans indice) :

$$NUT = \frac{k \Sigma}{q_{t\ min}} \tag{3.14a}$$

Nous allons montrer qu'il joue un rôle essentiel dans la modélisation des échangeurs, car l'efficacité E va pouvoir être exprimée en fonction de R et de NUT .

⚠ Mais auparavant, attardons-nous un instant sur le numérateur du NUT . Ce produit $k \Sigma$ s'exprime comme le débit thermique unitaire q_t en $W/^\circ C$ et représente donc la « puissance thermique unitaire » de l'échangeur, c'est-à-dire la puissance rapportée à un écart de température moyen fluide chaud – fluide froid de un degré. À l'usage, ce n'est pas cette expression qui a prévalu, mais celle de « *conductance globale de l'échangeur* », notée K . En effet, une conductance, qui est l'inverse d'une résistance thermique, s'exprime en $W / m^2 . ^\circ C$, d'où la conductance globale en $W/^\circ C$. Nous la retrouverons au chapitre 6.

En attendant, enregistrons donc que NUT se note également :

$$\boxed{NUT = K / q_{t \min} ; K = k \Sigma} \quad (3.14b)$$

3.4. – ÉTUDE DE LA FONCTION $E = E(R, NUT)$

Dans un but didactique, nous effectuons le calcul complet de l'efficacité E en fonction de NUT pour les échangeurs à courants parallèles et à une passe sur chaque fluide. Les résultats concernant d'autres catégories usuelles sont donnés sans démonstration dans le tableau 3.1.

3.4.1. – Échangeur co-courant

Partons de l'expression générale (2.32) de la puissance dans un échangeur à courants parallèles :

$$\Phi = \Delta T_a \frac{1 - \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} \right) k \Sigma \right\}}{\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}}}$$

avec pour l'efficacité E , d'après (3.12) :

$$E = \frac{\Phi}{q_{t \min} (T_{ce} - T_{fe})}$$

Lorsque l'échangeur est co-courant, la relation donnant Φ s'écrit avec :

* $\Delta T_a = T_{ce} - T_{fe}$ (à la section d'abscisse $S = 0$)

* le signe + dans les termes contenant l'alternative \pm ,

d'où l'expression de l'efficacité :

$$E = \frac{1}{q_{t \min}} \frac{1 - \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k \Sigma \right\}}{\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}}}$$

que l'on peut encore écrire :

$$E = \frac{1 - \exp \left\{ - \left(\frac{q_{t \min}}{q_{tc}} + \frac{q_{t \min}}{q_{tf}} \right) \frac{k \Sigma}{q_{t \min}} \right\}}{\frac{q_{t \min}}{q_{tc}} + \frac{q_{t \min}}{q_{tf}}} \quad (3.15)$$

Sachant d'après (3.9) et (3.14) que :

$$R = \frac{q_{t \min}}{q_{t \max}} \quad \text{et} \quad NUT = \frac{k \Sigma}{q_{t \min}}$$

on a dans tous les cas :

$$\frac{q_{t \min}}{q_{tc}} + \frac{q_{t \min}}{q_{tf}} = I + R \quad (\text{ou } R + I) \quad (3.16)$$

et par conséquent :

$$E = \frac{1 - \exp[-(I + R) NUT]}{I + R} \quad (3.17)$$

Il est évident que, au lieu d'amorcer ce calcul avec la puissance Φ , nous avons la liberté de le faire avec les expressions (2.12) et (2.13) des températures, associées aux formulations (3.7) à (3.11) de l'efficacité ; la présentation retenue a l'avantage d'être un peu plus synthétique. La même remarque vaut pour les échangeurs à contre-courant, traités dans le paragraphe qui suit.

3.4.2. – Échangeur à contre-courant

♣ Le point de départ est le même que dans le cas précédent ; c'est la relation (2.32), mais avec :

$$* \quad \Delta T_a = T_{ce} - T_{fs} \quad (\text{dans la section d'abscisse } S = 0)$$

$$* \quad \text{le signe } - \text{ dans les termes contenant } \pm,$$

d'où, compte tenu de (3.12) :

$$E = \frac{T_{ce} - T_{fs}}{q_{t \min} (T_{ce} - T_{fe})} \frac{1 - \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right) k \Sigma \right\}}{\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}}} \quad (3.18)$$

Calculons d'abord $(T_{ce} - T_{fs}) / (T_{ce} - T_{fe})$, ou plus commodément son inverse. De (2.16) on tire en faisant $S = 0$ (soit $T_c = T_{ce}$, $T_f = T_{fs}$) :

$$\frac{T_{ce}}{T_{ce} - T_{fs}} = \frac{T_{fs}}{T_{ce} - T_{fs}} + I \quad (3.19)$$

et de (2.18) on tire de même, en faisant $S = \Sigma$:

$$\frac{T_{fe}}{T_{ce} - T_{fs}} = \frac{T_{fs}}{T_{ce} - T_{fs}} + \frac{q_{tc}}{q_{tf} - q_{tc}} \left\{ \exp \left(- \left[\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right] k \Sigma \right) - I \right\}$$

(3.20)

d'où en groupant (3.19) et (3.20) :

$$\begin{aligned} \frac{T_{ce} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fs}} &= 1 - \frac{q_{tc}}{q_{tf} - q_{tc}} \left\{ \exp \left(- \left[\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right] k \Sigma \right) - I \right\} \\ &= \frac{1}{q_{tf} - q_{tc}} \left\{ q_{tf} - q_{tc} \exp \left(- \left[\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right] k \Sigma \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Reportons alors dans l'expression (3.18) de E et simplifions par $q_{tf} - q_{tc}$; il vient :

$$E = \frac{q_{tc} q_{tf}}{q_{t \min}} \frac{1 - \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right) k \Sigma \right\}}{q_{tf} - q_{tc} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right) k \Sigma \right\}} \quad (3.22)$$

Il y a maintenant une alternative (c'est-à-dire deux éventualités !!), suivant que l'on a $q_{tf} < q_{tc}$ ou $q_{tf} > q_{tc}$.

◆ Plaçons-nous pour commencer dans le cas où *le fluide chaud commande le transfert* :

$$q_{t \min} = q_{tc} \quad \text{soit} \quad q_{tc} < q_{tf}$$

Alors (3.22) s'écrit :

$$E = \frac{1 - \exp \left\{ - \left(1 - \frac{q_{tc}}{q_{tf}} \right) \frac{k \Sigma}{q_{tc}} \right\}}{1 - \frac{q_{tc}}{q_{tf}} \exp \left\{ - \left(1 - \frac{q_{tc}}{q_{tf}} \right) \frac{k \Sigma}{q_{tc}} \right\}} \quad (3.23)$$

et, puisque :

$$R = \frac{q_{t \min}}{q_{t \max}} = \text{ici} \frac{q_{tc}}{q_{tf}}$$

$$NUT = \frac{k \Sigma}{q_{t \min}} = \text{ici} \frac{k \Sigma}{q_{tc}}$$

(3.23) devient :

$$E = \frac{1 - \exp \{ - (1 - R) NUT \}}{1 - R \exp \{ - (1 - R) NUT \}} \quad (3.24)$$

♥ Dans l'autre cas de figure, où :

$$q_{t \min} = q_{tf} \quad \text{soit} \quad q_{tf} < q_{tc}$$

on écrit (3.22) sous la forme :

$$E = \frac{1 - \exp \left\{ - \left(\frac{q_{tf}}{q_{tc}} - 1 \right) \frac{k \Sigma}{q_{tf}} \right\}}{\frac{q_{tf}}{q_{tc}} - \exp \left\{ - \left(\frac{q_{tf}}{q_{tc}} - 1 \right) \frac{k \Sigma}{q_{tf}} \right\}}$$

On a maintenant :

$$R = \frac{q_{tf}}{q_{tc}} \quad \text{et} \quad NUT = \frac{k \Sigma}{q_{tf}}$$

c'est-à-dire :

$$E = \frac{1 - \exp \{ - (R - 1) NUT \}}{R - \exp \{ - (R - 1) NUT \}}$$

et puisque $\exp [-(R-1)NUT] = 1/\exp [-(1-R)NUT]$, on retrouve l'expression (3.24).

Quel que soit le fluide qui commande le transfert, l'efficacité d'un échangeur à contre-courant est donc donnée par (3.24) :

$$E = \frac{1 - \exp\{-(1-R)NUT\}}{1 - R \exp\{-(1-R)NUT\}} \quad (3.24)$$

3.4.3 - Échangeurs de configuration quelconque

♣ Des calculs analogues aux précédents mais plus complexes peuvent être conduits pour des échangeurs à courants croisés, ou du type 1-N, dont il a été question au § 1.3.2. Les principaux résultats sont regroupés sur le tableau 3.1, où les échangeurs sont classés dans l'ordre des performances décroissantes. Dans la première colonne se trouve l'efficacité en fonction de NUT et de R ; la seconde donne la fonction réciproque $NUT(E, R)$. Le contenu des deux dernières colonnes sera examiné un peu plus loin.

TABLEAU 3.1

Type de circulation	$E(NUT, R)$	$NUT(E, R)$	Cas particulier	E_{lim} pour $NUT = +\infty$
Contre-courant	$E = \frac{1 - \exp. \{-(1-R)NUT\}}{1 - R \exp. \{-(1-R)NUT\}}$	$NUT = \frac{1}{1-R} \mathcal{L}_n \left(\frac{1-ER}{1-E} \right)$	$R=0 \quad E = 1 - \exp. (-NUT)$ $NUT = \mathcal{L}_n[1/(1-E)]$ $R=1 \quad E = NUT/(1+NUT)$ $NUT = E/(1-E)$	$E_{lim} = 1$ qq soit R
Courants croisés fluide non brassé	$E = \frac{1}{R NUT} \sum_{n=0}^{n=\infty} F_n(NUT) F_n(R NUT)$ $F_n(x) = 1 - \exp. \left(-x^n \sum_{p=0}^{p=n} \frac{x^p}{p!} \right)$		$R=0 \quad E = 1 - \exp. (-NUT)$	$E_{lim} = 1$ qq soit R
Courants croisés 1 fluide brassé à q_{lmin}	$E = 1 - \exp. [-\Gamma/R]$ avec $\Gamma = 1 - \exp. [-R.NUT]$	$NUT = -\frac{1}{R} \mathcal{L}_n [1 + R \mathcal{L}_n(1-E)]$	$R=0 \quad E = 1 - \exp. (-NUT)$	$E_{lim} = 1 - \exp(-1/R)$
Courants croisés 1 fluide brassé à q_{lmax}	$E = \frac{1}{R} (1 - \exp. [-R.\Gamma])$ avec $\Gamma = 1 - \exp. [-NUT]$	$NUT = -\mathcal{L}_n \left[1 + \frac{1}{R} \mathcal{L}_n(1-ER) \right]$	$R=0 \quad E = 1 - \exp. (-NUT)$	$E_{lim} = \frac{1}{R} (1 - \exp.(-R))$
(1-N)	$E = \frac{2}{(1+R) + \sqrt{1+R^2}} \frac{1 + \exp. \{ -NUT \sqrt{1+R^2} \}}{1 - \exp. \{ -NUT \sqrt{1+R^2} \}}$	$NUT = \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} \mathcal{L}_n \frac{2-E(1+R-\sqrt{1+R^2})}{2-E(1+R+\sqrt{1+R^2})}$	$R=0 \quad E = 1 - \exp. (-NUT)$	$E_{lim} = \frac{2}{1+R+\sqrt{1+R^2}}$
Co-courant	$E = \frac{1}{1+R} [1 - \exp. \{-(1+R)NUT\}]$	$NUT = -\frac{1}{1+R} \mathcal{L}_n [1 + E(1+R)]$	$R=0 \quad E = 1 - \exp. (-NUT)$	$E_{lim} = \frac{1}{1+R}$

◆ L'allure générale des courbes $E = f(NUT)$ est donnée sur la figure 3.1, dans le cas où $R = 0,75$. On observe en particulier la hiérarchie très nette qui s'établit entre les différents modèles d'échangeurs dès que l'on atteint des NUT de l'ordre de 1,5. Pour $NUT = 4$ par exemple, l'efficacité s'étale de 0,55 (co-courant, le moins performant) à 0,8 (contre-courant, le meilleur).

Avec des NUT faibles (et donc des efficacités faibles également) le sens de circulation des fluides n'a plus beaucoup d'importance. D'après les formules du tableau 3.1, on a d'ailleurs :

$$\left(\frac{dE}{dNUT} \right)_{NUT=0} = 1 \quad \forall R \quad (3.25)$$

Les courbes $E = f(NUT)$ ont donc toutes la même pente à l'origine.

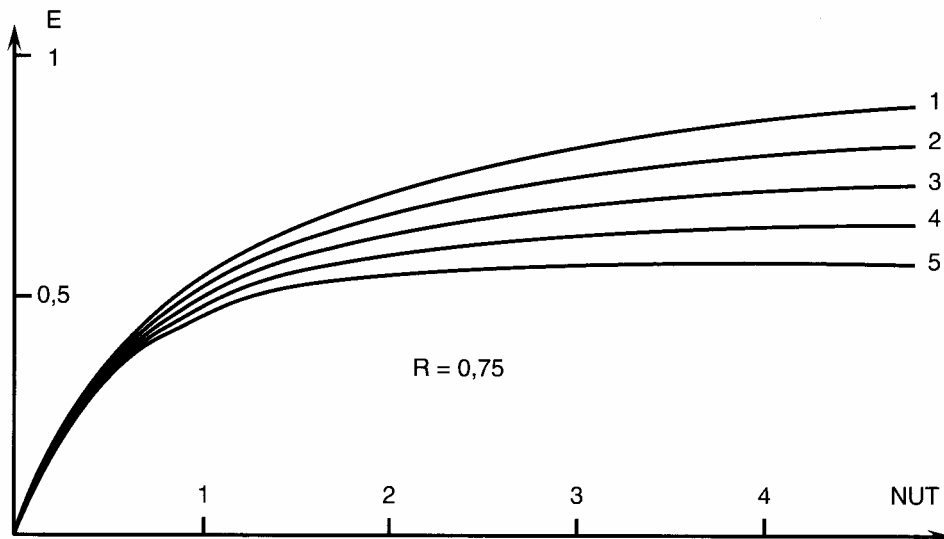


FIG. 3.1 – Courbes $E = f(NUT)$ - 1 : contre-courant
 2 : courants croisés, fluides non brassés
 3 : courants croisés avec fluide à $q_{t\min}$ brassé ; 4 : échangeur 1-N ; 5 : co-courant.

♥ Retournons maintenant au tableau 3.1 pour quelques commentaires cas par cas.

* Les échangeurs à courants croisés avec fluides non brassés sont généralement des échangeurs à plaques. La formule de E n'est pas particulièrement simple, et on aura plus vite fait de travailler avec un abaque, gracieusement fourni fig. 3.2.

* Les échangeurs à courants croisés avec un fluide brassé (§ 1.2) cités dans le tableau **sont des appareils à une seule passe sur chaque fluide**.

* Les échangeurs 1-N ont une efficacité indépendante de N . Dans certaines publications, l'expression de E est écrite en remplaçant la fraction présente au dénominateur par une cotangente hyperbolique :

$$- \coth \left[- NUT (1 + R^2)^{0,5} / 2 \right] \text{ ou } \coth \left[NUT (1 + R^2)^{0,5} / 2 \right] \quad (3.26a)$$

car on a en effet :

$$\coth x = \frac{1}{\text{th } x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = - \coth(-x) \quad (3.26b)$$

NUT étant déduit de la fonction réciproque :

$$y = \coth x \Rightarrow x = \arg \coth y = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{x+1}{x-1} \quad (3.26c)$$

Pour cette catégorie d'appareils, la plage utile dans l'abaque $E(NUT, R)$ est limitée par les risques de croisements de températures (§ 3.7.3, fig. 3.6).

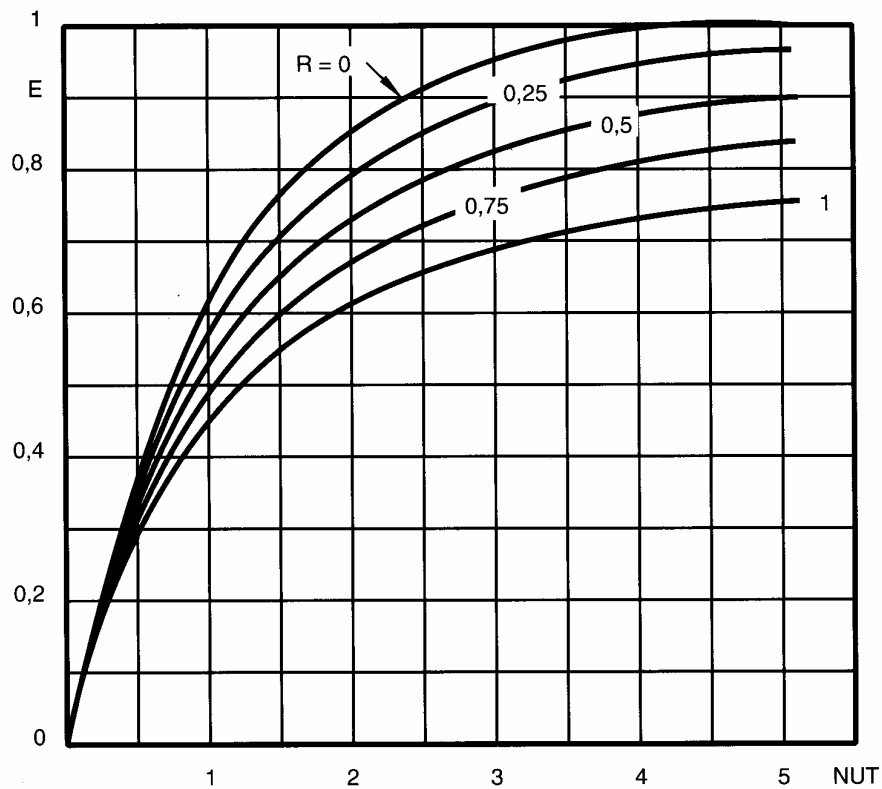


FIG. 3.2 - Échangeurs à courants croisés, fluides non brassés : efficacité en fonction de NUT pour différentes valeurs de R .

* Quant aux échangeurs $P-N$, ils peuvent être considérés comme des échangeurs $I-N$ placés en série et seront traités à ce titre dans le chapitre 7 (§ 7.2.4).

Bien entendu, les formules qui donnent $E(NUT, R)$ s'appuient sur des hypothèses simplificatrices pour le calcul des températures, et leurs résultats peuvent dans certains cas diverger un peu par rapport aux observations expérimentales.

♠ Avec des configurations plus complexes, il est impossible d'effectuer un calcul analytique de E . Chaque exemple devra faire l'objet d'une modélisation spécifique.

3.5. - CAS PARTICULIERS ET VALEURS LIMITES

Les expressions de E en fonction de NUT qui ont été compilées dans le tableau 3.1 appellent quelques commentaires relatifs aux valeurs limites de R , q_t , E et à l'allure des courbes $E(NUT)$.

3.5.1. - Cas limite $R = 1$ dans un échangeur à contre-courant

Lorsque $R = 1$, $q_{t \min} = q_{t \max}$: les deux fluides ont le même débit thermique unitaire. Cet exemple ne constitue un cas particulier que si l'échangeur est à contre-courant. Il a été examiné au § 2.3.4.

L'efficacité se calcule aisément à partir de l'expression (3.24) ; R étant voisin de 1, posons :

$$R = 1 - \varepsilon$$

où ε est un infiniment petit du premier ordre. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $\exp \varepsilon \approx 1 + \varepsilon$, et (3.24) s'écrit :

$$E = \frac{\varepsilon NUT}{1 - (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon NUT)}$$

soit :

$$\boxed{E = \frac{NUT}{1 + NUT}} \quad (3.27)$$

3.5.2. - Cas limite $R = 0$

Cette valeur de R peut être approchée de deux manières :

Ou bien $q_{t \max} \rightarrow \infty$

Cela revient à dire que la température du fluide correspondant est uniforme : en effet, le flux échangé localement étant $d\Phi = q_t dT$ (cf. relations (2.2) et (2.3)) il ne peut être fini que si $dT \rightarrow 0$. Les échangeurs concernés sont donc *les échangeurs à fluide isotherme*, évaporateurs ou condenseurs (§ 2.4).

Ou bien $q_{t \min} \rightarrow 0$

Alors q_m (ou C_p) est très petit.

On observe dans le tableau 3.1 que E a la même valeur pour tous les échangeurs lorsque $R = 0$, à savoir :

$$\boxed{E = 1 - \exp(-NUT)} \quad (3.28)$$

de sorte que les différents appareils sont théoriquement équivalents en ce qui concerne leur conception. Ils ne se distinguent que par leur coefficient global k , qui intervient dans le NUT .

Dans le premier cas cité, E représente l'efficacité du côté du fluide qui ne subit pas de changement de phase, puisque c'est celui qui possède le plus petit débit thermique unitaire.

L'échangeur à facteur de déséquilibre nul sera aussi utilisé comme élément de référence dans le calcul des réseaux montés en série-parallèle (§ 7.3).

3.5.3. - Cas limite $NUT \rightarrow \infty$

Enfin, lorsque $q_{t \min}$ est donné, il est possible que k ou Σ soit très grand. Dans ce cas :

$$NUT = \frac{k \Sigma}{q_{t \min}} \rightarrow \infty$$

et E tend pour chaque configuration vers une valeur limite E_{lim} précisée dans le tableau 3.1.

Quelques données supplémentaires concernant E_{lim} ont été portées sur le tableau 3.2 : elles concernent des échangeurs à courants croisés avec un fluide brassé à deux passes (§ 1.2), et sont classées dans l'ordre décroissant, les deux premières dispositions donnant des résultats très voisins (la définition de la tangente hyperbolique $th x$ a été rappelée dans la formule 3.26b).

Fluide brassé à $q_{t \min}$, entrées du même côté	$E_{lim} = \frac{1 - \exp(-2/R)}{2}$
Fluide brassé à $q_{t \min}$, entrées côtés opposés	$E_{lim} = th \frac{1}{R}$
Fluide brassé à $q_{t \max}$, entrées du même côté	$E_{lim} = \frac{1 - \exp(-2R)}{2R}$
Fluide brassé à $q_{t \max}$, entrées côtés opposés	$E_{lim} = \frac{th R}{R}$

Tableau 3.2

On observe encore sur les tableaux 3.1 et 3.2 que la plupart des configurations ont une efficacité E_{lim} strictement inférieure à 1. Le fait d'augmenter indéfiniment la surface d'échange Σ ne garantit donc nullement une efficacité idéale.

Notons pour terminer que si $q_{t \min}$ est très petit, on peut avoir à la fois $NUT \rightarrow \infty$ et $R = 0$. On se trouve alors dans la situation idéale $E_{lim} = 1$.

3.6. - NUT : DISCOURS DE LA MÉTHODE

La méthode *NUT* permet d'apporter une réponse élégante et rapide à la plupart des problèmes qui se posent dans les études d'ingénierie relatives aux échangeurs. Ceux-ci se répartissent en deux grandes classes :

- *des problèmes de conception* dans lesquels les températures d'entrée et une température de sortie sont imposées, les débits étant connus.

La question est : sélectionner le modèle d'échangeur le plus approprié, et chercher sa taille, c'est-à-dire la surface Σ nécessaire pour obtenir la température de sortie désirée.

La méthode à employer consiste à calculer R et E , puis $NUT(E)$, d'où l'on tire Σ .

C'est dans ce cadre que s'insèrent le plus souvent les recherches d'optimisation, dont un aspect essentiel sera examiné au parag. 3.7.

- *des problèmes de performances* où les données sont le modèle et la taille de l'échangeur, les débits et les températures d'entrée.

Il s'agit alors de déterminer la puissance Φ et les températures de sortie.

La méthode *NUT* permet ici de calculer R et NUT d'après les données, d'où l'on déduit $E(NUT)$; les deux températures de sortie inconnues sont fournies par (3.10) ou (3.11) et Φ s'obtient par le bilan enthalpique global (3.1).

⚠ A ce propos, observons que d'une façon générale, si R et E sont connus, la donnée de deux températures d'entrée-sortie suffit à déterminer les deux autres.

Nous aurons l'occasion de montrer au chapitre 7 les ressources que recèle la méthode *NUT* dans l'étude des *réseaux d'échangeurs* et dans la détermination approchée des profils de températures internes pour certains types d'appareils.

Il restera évidemment à estimer le NUT , c'est-à-dire en fait le coefficient d'échange global k . Ce sera l'objet des chapitres 4 à 6.

3.7. - UNE ILLUSTRATION DE LA MÉTHODE *NUT* : COMMENT SÉLECTIONNER LES DISTRIBUTIONS DE TEMPÉRATURE LES PLUS FAVORABLES DANS UN ÉCHANGEUR

3.7.1. - Notion de « pincement »

Nous avons signalé à l'instant que la méthode *NUT* s'adapte également très bien aux études d'optimisation. En voici un exemple significatif, qui se réfère aux écarts extrêmes de température dans l'échangeur.

♣ Nous avons déjà réfléchi à l'écart maximal de température accessible dans un échangeur (§ 3.1) qui a pour valeur :

$$\Delta T_{max} = T_{ce} - T_{fe}$$

Intéressons-nous maintenant aux deux différences de températures entrée-sortie : $T_{ce} - T_{fs}$ et $T_{cs} - T_{fe}$.

Si l'on se rappelle les équations de bilan enthalpique global (3.1) de l'échangeur :

$$\Phi = q_{tc} (T_{ce} - T_{cs}) = q_{tf} (T_{fs} - T_{fe})$$

on voit que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} T_{ce} - T_{fs} &= T_{ce} - T_{fe} + T_{fe} - T_{fs} \\ &= T_{ce} - T_{fe} - \frac{\Phi}{q_{tf}} \end{aligned} \quad (3.29a)$$

et de même :

$$T_{cs} - T_{fe} = T_{ce} - T_{fe} - \frac{\Phi}{q_{tc}} \quad (3.29b)$$

Ces deux relations conduisent à des observations intéressantes qui permettent d'introduire la notion d'optimisation. Pour y arriver, il est préférable de dissocier les deux cas $q_{t \min} = q_{tc}$ et $q_{t \min} = q_{tf}$.

◆ Si $q_{t \min} = q_{tc}$

On a d'après (3.1) : $T_{ce} - T_{cs} > T_{fs} - T_{fe}$, soit encore :

$$T_{ce} - T_{fs} > T_{cs} - T_{fe} \quad (3.30)$$

Alors, si l'échangeur est à contre-courant, $T_{cs} - T_{fe}$ est la borne inférieure de l'écart $(T_c - T_f)$ dans l'échangeur, tandis que $T_{ce} - T_{fs}$ est sa borne supérieure :

$$\left. \begin{aligned} T_{cs} - T_{fe} &= \Delta T_{inf} = \inf(T_c - T_f) \\ T_{ce} - T_{fs} &= \Delta T_{sup} = \sup(T_c - T_f) \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

La figure 2.4 illustre bien cette propriété, qui s'étend également aux échangeurs à courants croisés à une seule passe.

Il est légitime de s'interroger sur le rapport $\Delta T_{inf} / \Delta T_{sup}$ et sur ses éventuelles relations avec E et R . Pour l'évaluer, il est commode de calculer d'abord les deux grandeurs suivantes :

$$\bullet \quad \frac{\Delta T_{inf}}{T_{ce} - T_{fe}} = 1 - \frac{\Phi}{q_{tc}(T_{ce} - T_{fe})} = 1 - \frac{\Phi}{\Phi_{max}} = 1 - E \quad (3.32)$$

ceci d'après (3.29b), (3.31) et (3.4).

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\Delta T_{sup}}{T_{ce} - T_{fe}} &= 1 - \frac{\Phi}{q_{tf}(T_{ce} - T_{fe})} = 1 - \frac{q_{t \min}}{q_{tf}} \frac{\Phi}{q_{t \min}(T_{ce} - T_{fe})} \\ &= 1 - R \frac{\Phi}{\Phi_{max}} = 1 - RE \end{aligned} \quad (3.33)$$

De ce fait, on voit que :

$$\frac{\Delta T_{inf}}{\Delta T_{sup}} = \frac{1 - E}{1 - RE} \quad (3.34)$$

En dérivant par rapport à E , R étant donné, on obtient :

$$\frac{d}{dE} \left(\frac{\Delta T_{inf}}{\Delta T_{sup}} \right) = - \frac{1 - R}{(1 - RE)^2} < 0 \quad (3.35)$$

de sorte que $\Delta T_{inf} / \Delta T_{sup}$ diminue quand E augmente. La meilleure efficacité est donc obtenue en minimisant le rapport $\Delta T_{inf} / \Delta T_{sup}$. C'est ce qu'on appelle « la méthode du pincement ».

Il faut remarquer que cette optimisation conduit généralement à une augmentation de la surface d'échange Σ , puisque les écarts $T_c - T_f$ sont diminués. Elle doit donc à un moment donné entrer en compétition avec des critères *économiques* qui tendront à limiter Σ pour ne pas accroître le coût de fabrication.

♥ Si $q_{t \min} = q_{tf}$

Alors, cette fois :

$$T_{cs} - T_{fe} > T_{ce} - T_{fs}$$

et par conséquent :

$$\left. \begin{aligned} T_{ce} - T_{fs} &= \Delta T_{inf} \\ T_{cs} - T_{fe} &= \Delta T_{sup} \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Cette propriété est visualisée sur la figure 2.5 ; le résultat est le même que dans ♦ en ce qui concerne $\Delta T_{inf} / \Delta T_{sup}$.

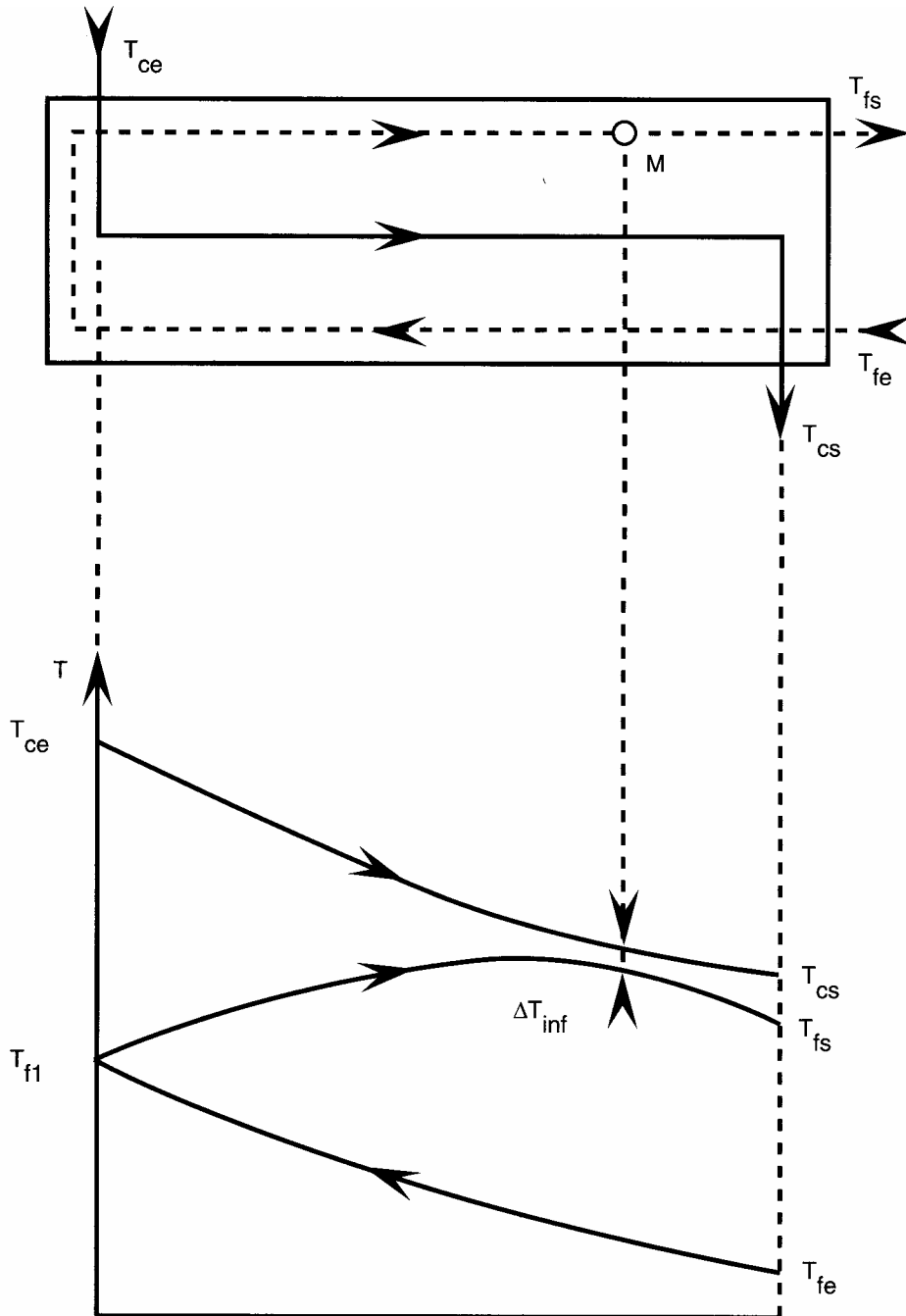


FIG. 3.3 - Exemple de pincement (ΔT_{inf}) dans un échangeur à deux passes sur le fluide froid, le fluide chaud circulant en calandre.

$$\Delta T_{sup} = T_{ce} - T_{f1} \text{ ou } T_{cs} - T_{fe} \text{ selon les cas}$$

♠ Avec les échangeurs à plusieurs passes, l'écart minimal ΔT_{inf} se rencontre assez souvent à l'intérieur de l'appareil : ainsi, dans l'exemple de la **figure 3.3**, le fluide froid subit sur le retour l'influence de sa propre zone d'entrée, si bien que sa température fléchit légèrement ; de la sorte, le pincement se produit en *M*, dans la deuxième passe. Cependant, on montre que là aussi, procéder au pincement en minimisant $\Delta T_{inf} / \Delta T_{sup}$ conduit encore à augmenter *E*.

3.7.2. - Le risque des croisements de températures

♣ La pire turpitude que l'on puisse infliger à un échangeur, c'est de le mettre dans une situation où le fluide « froid » en viendrait à réchauffer le fluide « chaud », c'est-à-dire où l'on aurait $T_f > T_c$.

A première vue, cette éventualité peut paraître fantaisiste. De fait, il n'existe aucun risque de la voir se concrétiser dans les échangeurs à une seule passe sur chaque fluide, qu'ils soient à courants parallèles ou à courants croisés, puisque cela contreviendrait au second principe de la thermodynamique. Mais il en va différemment avec les échangeurs *P-N*, où il peut arriver si l'on n'y prend garde qu'une partie de la surface d'échange travaille sous la condition $T_f > T_c$. C'est ce que l'on appelle un « *croisement de températures* » (ou une *inversion*). Quelques exemples aideront à se faire une idée du problème.

◆ La figure 3.4a schématise les températures dans un échangeur tubulaire 1-2 où le fluide chaud circule en calandre. Les deux entrées sont du même côté : après une passe effectuée en co-courant, le fluide froid revient vers l'entrée du fluide chaud et l'on aura toujours $T_f < T_c$. Tout va bien.

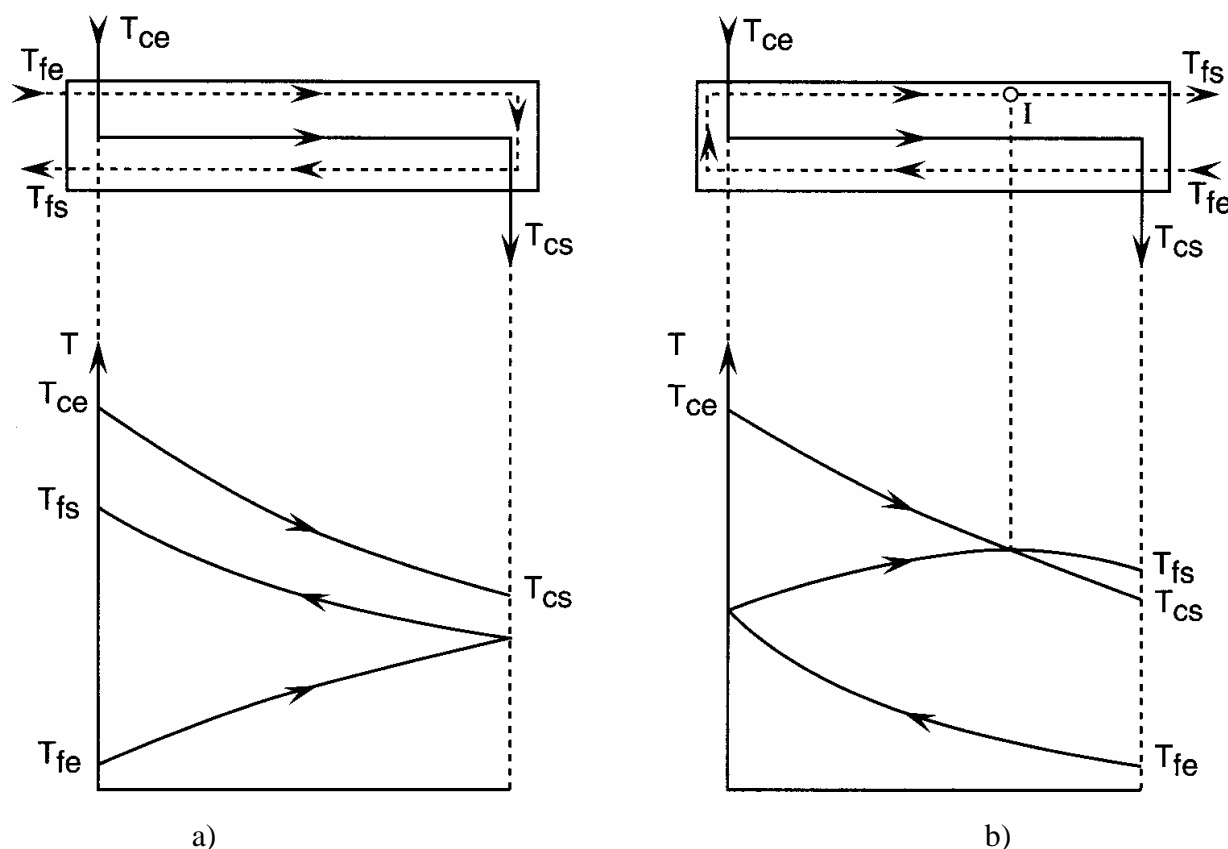


FIG. 3.4. – Échangeur tubulaire 1-2 avec fluide chaud en calandre
 a) Pas de croisement
 b) Croisement des températures entre I et la sortie du fluide froid

Sur la figure 3.4b on a renversé le sens des écoulements : l'entrée du fluide froid est maintenant du même côté que la sortie du fluide chaud. La première passe est à contre-courant, mais dans la seconde il peut arriver que l'influence de la zone d'entrée du fluide froid commence à se faire sentir, freinant ainsi le réchauffement du fluide froid, et qu'un croisement se produise au point noté I . A partir de là, T_f va évidemment diminuer, mais en restant supérieure à T_c . Rien ne va plus.

♥ Une autre possibilité est représentée sur la figure 3.5a. Il s'agit toujours d'un échangeur 1-2, mais le fluide froid circule en calandre, sa sortie étant du même côté que l'entrée du fluide chaud. La situation est un peu symétrique de la précédente : cette fois-ci, c'est vers la sortie du fluide chaud qu'un croisement de températures peut survenir, la région au-delà de I étant sous l'influence de l'entrée chaude.

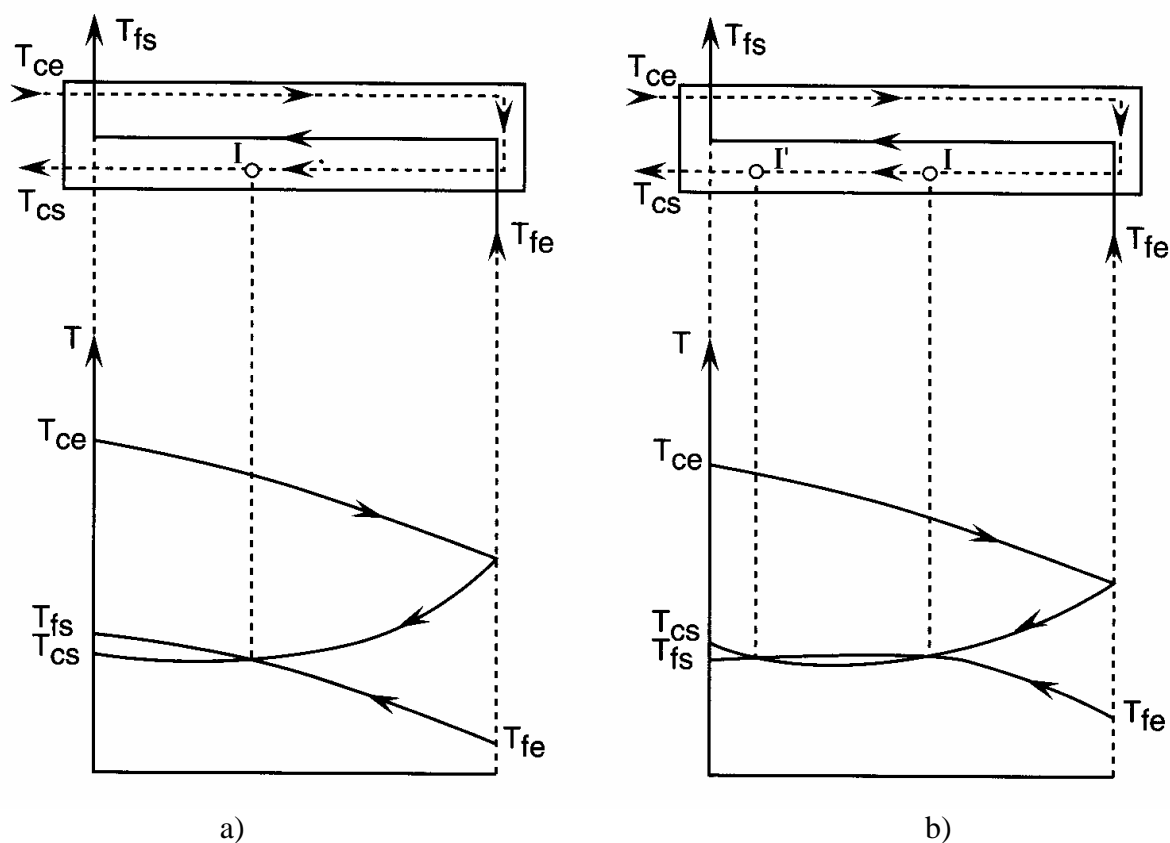


FIG. 3.5 – Échangeur tubulaire 1-2 avec fluide froid en calandre.
 a) Croisement des températures entre I et la sortie du fluide chaud.
 b) Croisement à l'intérieur entre I et I'

♠ On doit bien noter que dans les configurations choisies ci-dessus comme exemples, ce genre d'événement n'a rien de systématique : son occurrence dépendra de l'architecture intérieure de l'échangeur (en particulier de la présence ou non de chicanes) et des q_t .

Les inversions de température sont évidemment à proscrire puisque la surface d'échange concernée est au mieux inutile sinon nocive (ainsi en 3.4b il vaudrait mieux faire sortir le fluide froid en I). Le problème est qu'elles peuvent passer inaperçues en l'absence d'un contrôle rigoureux. En particulier, la présence de chicanes peut rendre le phénomène singulièrement pernicieux si la zone d'inversion est à l'intérieur comme dans la **figure 3.5b**, car il devient indétectable par des moyens expérimentaux simples, la seule vérification des températures de sortie ne suffisant pas toujours à le mettre en évidence. Il faudra donc soigner la conception et les essais préliminaires de l'appareil, et bien préciser les paramètres qui autorisent un fonctionnement correct (en particulier les débits). A ce sujet, une méthode de calcul approchée mais rapide sera proposée au § 7.4.2.

3.7.3. – La règle d'or : pincer sans croiser

Les deux paragraphes précédents nous ont appris quelque chose d'essentiel : 1) le pincement améliore l'efficacité ; 2) la surface d'échange peut travailler à l'envers dans certains cas. Il nous faut maintenant constater que les deux questions sont parfois imbriquées, et l'on imagine aisément qu'un pincement trop serré et mal maîtrisé puisse dégénérer en croisement des températures si la disposition des écoulements s'y prête : les figures 3.5 et 3.4b illustrent un glissement de ce type.

La conclusion s'impose d'elle-même et se résume dans une recommandation lapidaire : *il faut pincer sans croiser*.

Pour appliquer cette règle sans trop tâtonner, on a besoin d'un critère qui quantifie les risques d'inversion, au moins d'une manière approchée. Basons-nous pour cela sur l'échangeur $I-N$.

Supposons $q_{t\ min} = q_{tc}$. D'après (3.10), le facteur de déséquilibre et l'efficacité s'écrivent respectivement :

$$R = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{cs}} \quad ; \quad E = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}}$$

Les exemples illustrés sur les figures 3.4 et 3.5 montrent que les risques de croisements se manifestent à proximité des sorties, ce qui nous incite à *choisir comme référence le cas particulier où $T_{cs} = T_{fs}$* . Alors, R et E deviennent :

$$R_0 = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fs}} \quad ; \quad E_0 = \frac{T_{ce} - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fe}} \quad (3.37)$$

On voit que :

$$\frac{1}{E_0} = 1 + \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fs}} = 1 + R_0$$

soit :

$$E_0 = \frac{1}{1 + R_0} \quad (3.38)$$

La grandeur E_0 représente une efficacité critique vis-à-vis des croisements en sortie d'échangeur ; en comparant (3.10) et (3.37) il apparaît en effet que l'on a :

$$E > E_0 \Leftrightarrow T_{cs} < T_{fs} \quad (3.39)$$

et il en va de même avec $q_{t\ min} = q_{tf}$.

La situation est photographiée, si l'on peut dire, sur la figure 3.6. Choisissons une valeur R_0 du facteur de déséquilibre R . Connaissant la fonction $E = f(R_0, NUT)$, la condition $E = 1/(1 + R_0)$ définit en éliminant R_0 entre ces deux relations une courbe $E'(NUT)$. L'intersection des courbes $E(R_0, NUT)$ et $E'(NUT)$ donne alors E_0 selon (3.38).

On remarquera que la valeur minimale de E_0 est 0,5 (pour $R_0 = 1$), le NUT correspondant ayant pour valeur 1,246. Avec $R = R_0$ donné, en suivant la ligne $E(R_0, NUT)$, on a $E < E_0$ à gauche de la courbe $E'(NUT)$ et $E > E_0$ à droite. Cette seconde zone (hachurée sur la figure 3.6) est donc à éviter puisque c'est là que se produit le croisement des températures de sortie.

Cela ne signifie pas que la totalité de la zone non hachurée soit favorable, car nous avons vu que des inversions peuvent parfois se produire à l'intérieur de l'appareil. Or la condition (3.38) ne caractérise que les risques de croisement à la sortie. C'est bien évidemment fâcheux, mais il n'empêche que la courbe $E'(NUT)$ permet tout de même de cerner les risques.

Avec des échangeurs $P-N$, c'est de surcroît le nombre P de passes en calandre qu'il conviendra de limiter pour s'assurer que E reste inférieure à E_0 .

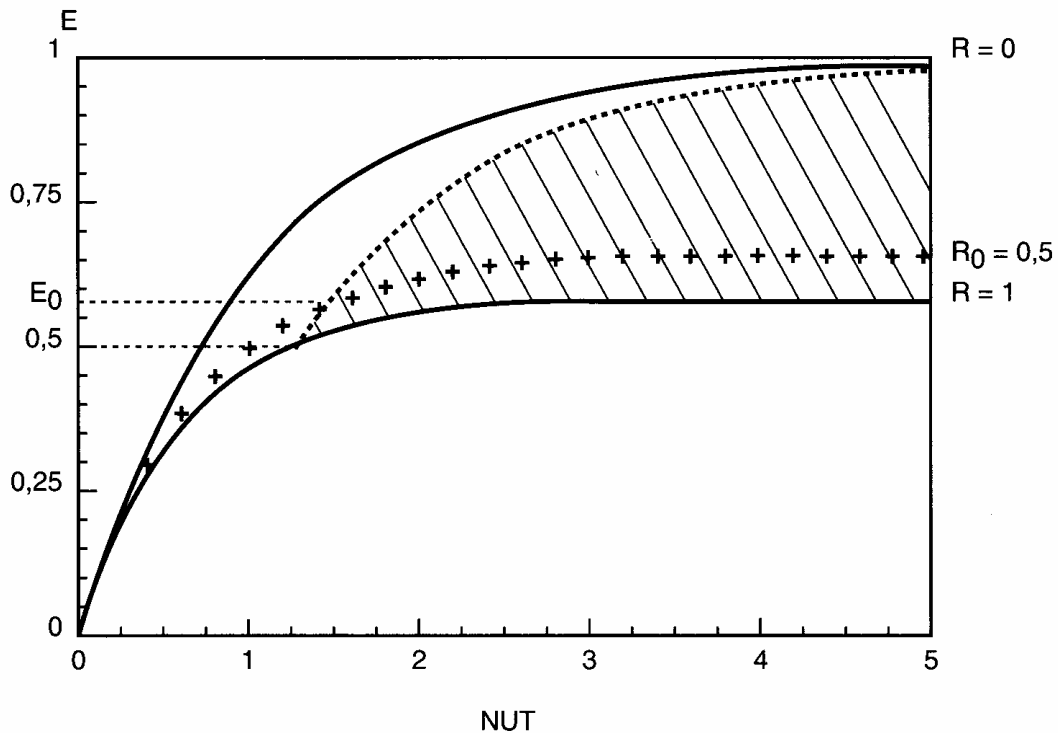


FIG. 3.6. – Échangeurs 1-N. Courbe en tirets : $E'(NUT)$.
 Zone hachurée : croisement des températures de sortie.
 La courbe $E(R_0, NUT)$ correspond à $R_0 = 0,5$ ($E_0 = 0,66$).