

démarches en particulier lorsque l'interface est considérée parfaite (Maxwell [1]). Hasselman et Johnson [2] ont étendu ces solutions aux cas d'interface imparfaite pour les géométries sphériques et cylindriques. Les approches par transition d'échelles constituent une alternative permettant de rendre compte de la loi de Fourier local, de la forme et distribution des différentes phases du composite. Elles ont comme base commune le concept de l'inclusion d'Eshelby [3] utilisé en élasticité. Benveniste et Miloh [4] ont proposé un modèle permettant d'accéder aux champs de température locaux en présence d'interface imparfaite dans des composites. La conductivité thermique effective est alors estimée selon différents schémas d'homogénéisation : dilué, Mori-Tanaka et auto-cohérent (Benveniste [4]). Ces modèles considèrent cependant des conductivités thermiques isotropes par phase.

Nous proposons dans ce travail d'étendre les modèles dédiés à l'étude de la conductivité thermique effective des composites dans le cas général de phases anisotropes. Nous considérons donc le modèle d'assemblage de sphère-composite de Hashin [5] que nous étendons dans le cas de morphologie ellipsoïdale. Ce modèle d'assemblage d'ellipsoïde-composite est étendu pour des interfaces imparfaites suivant le modèle de la résistance thermique interfaciale [6]. La méthode basée sur la technique des fonctions de Green donne une équation intégrale générale et une géométrie ellipsoïdale qui comprend un terme supplémentaire tenant compte de l'effet de l'interface imparfaite. La solution de ce problème fournit l'équation de localisation et les conductivités thermiques effectives du composite.

2. Modèle micromécanique

Nous considérons un matériau composite constitué d'inclusions de forme ellipsoïdale plongées dans une matrice. Les conductivités thermiques de la matrice K^0 et des inclusions K^1 sont supposées homogènes et anisotropes. L'interface entre la matrice et chaque inclusion est imparfaite. Le composite est soumis à des champs intensités e^0 homogènes à la frontière extérieure. Nous proposons une modélisation micromécanique de la conductivité thermique effective du composite contenant des interfaces imparfaites.

2.1. Equations de base

Dans cette étude, on considère une inclusion de volume V_1 , de surface S_1 et de demi-axe a_1, a_2, a_3 enrobée d'une phase de matrice de volume V_m , de surface S_2 . L'inclusion composite V_2 est de demi-axe b_1, b_2, b_3 à laquelle est imposé un gradient de température homogène e^0 . Les deux ellipsoïdes sont supposées confocales ; les surfaces des deux ellipsoïdes vérifient l'équation :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{b_i^2 - \lambda} = 1 \quad (1)$$

où $\lambda = 0$ correspond à la surface S_2 et $\lambda = \lambda_c$ correspond à l'interface S_1 . Les demi-axes des deux ellipsoïdes sont liés par la relation de confocalité : $b_i^2 - a_i^2 = \lambda_c$.

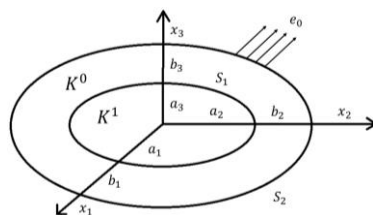


Figure 1 : Topologie du modèle d'assemblage d'ellipsoïde composite

Le comportement thermique du matériau est décrit par la conductivité thermique locale $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ en chaque point $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Les équations du problème décrivant le transfert thermique dans le milieu hétérogène sont :

$$\text{Loi de Fourier : } q_i = K_{ij}e_j \text{ avec } e_j = -T_{,j} \quad (2)$$

$$\text{Équation de conservation de l'énergie : } q_{i,i} = 0 \quad (3)$$

$$\text{Conditions aux limites : } T(\mathbf{r}) = -e^0 \cdot \mathbf{r} \text{ sur } S_2 \quad (4)$$

L'interface entre l'inclusion et la matrice est imparfaite en raison d'adhésion mécanique et chimique déficiente et de la rugosité relative des surfaces. Ces effets constituent une barrière thermique décrite par une résistance thermique interfaciale moyenne α . Le saut en température $[T]$ à travers la surface S_1 de l'interface est proportionnel à la composante normale du flux de chaleur selon la loi classique :

$$[q_i]n_i = (q_i^+ - q_i^-)n_i = 0 \text{ et } [T] = T^+ - T^- = -\alpha q_i n_i. \quad (5)$$

où les températures T^+ et T^- et les densités de flux de chaleur q_i^+ et q_i^- sont définis respectivement à l'extérieur et à l'intérieur de l'inclusion. La résistance thermique interfaciale α peut être assimilée au rapport de l'épaisseur h et de la conductivité thermique isotrope K^c d'une interphase faiblement conductrice entourant une inclusion sphérique. Cette équivalence constitue la limite du modèle d'interphase faiblement conductrice quand K^c et h tendent vers 0. Le paramètre α permet de rendre compte de façon qualitative des effets de rugosité et par conséquent l'imperfection de l'interface.

2.2. Equation intégrale

Afin de permettre une résolution plus aisée du problème, des termes de variable spatiale ont été introduits: en température $T^d(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r}) - T^0$ et en densité de flux de chaleur : $\mathbf{q}^d(\mathbf{r}) = \mathbf{q}(\mathbf{r}) - \mathbf{q}^0$. Le tenseur de conductivité thermique local $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ est décomposé en une partie uniforme \mathbf{K}^0 et une partie de fluctuations $\delta\mathbf{K}(\mathbf{r})$:

$$K_{ij}(\mathbf{r}) = K_{ij}^0 + \delta K_{ij}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

En introduisant les fonctions de Green définies par : $K_{ij}^0 G_{,ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \delta_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$ et $G = 0$ à l'infini, les équations (2), (3) et (6) en tenant compte de (4) et (5) se transforment en une équation intégrale décrivant le champ intensité thermique en un point du milieu :

$$e_p(\mathbf{r}) = e_p^0 + \int_{V_1'} G_{,pi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta K_{ij}(\mathbf{r}') e_j(\mathbf{r}') dV_1' + \int_{S_1'} G_{,pi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') K_{ij}^0 [T] n_j dS_1' - \int_{S_2'} G_{,p}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') q_j^d(\mathbf{r}') n_j dS_2' \quad (7)$$

2.3. Modèle d'assemblage d'ellipsoïdes

Le modèle d'assemblage d'ellipsoïdes est décrit par une inclusion ellipsoïdale de volume V_1 de frontière S_1 plongée dans une inclusion ellipsoïdale de volume V_2 de frontière S_2 . L'interface imparfaite S_I satisfait la loi de comportement Eq. (5). Les champs intensités moyens e^1 et densité de flux q^1 sur le volume V_1 sont définis par :

$$e_m^1 = \frac{1}{V_1} \int_{V_1} e_m(\mathbf{r}) dV_1 \text{ et } q_m^1 = \frac{1}{V_1} \int_{V_1} q_m(\mathbf{r}) dV_1 \quad (8)$$

L'intensité dans l'inclusion s'écrit en effectuant la moyenne de l'Eq.(7) :

$$\begin{aligned} e_p^1(\mathbf{r}) = & e_p^0 + \frac{1}{V_1} \int_{V_1} \int_{V_1'} G_{,pi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta K_{ij}(\mathbf{r}') e_j(\mathbf{r}') dV_1' dV_1 \\ & + \frac{1}{V_1} \int_{V_1} \int_{S_1'} G_{,pi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') K_{pj}^0 [T] n_j dS_1' dV_1 \\ & - \frac{1}{V_1} \int_{V_1} \int_{S_2'} G_{,pi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') q_j^d(\mathbf{r}') n_j dS_2' dV_1 \end{aligned} \quad (9)$$

Pour le premier terme de l'Eq. (9), on peut permuter les intégrales de volume sur \mathbf{r} et \mathbf{r}' et le tenseur de polarisation L^1 uniforme dans l'inclusion ellipsoïdale V_1 [3] s'écrit comme :

$$L_{pi}^1 = - \int_{V_1} G_{,pi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV_1 \text{ avec } \mathbf{r}' \in V_1' \quad (10)$$

Pour le deuxième terme de l'Eq. (9), la fonction $G_{,pi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ représente une singularité sur la surface intérieure de l'inclusion $\mathbf{r} = \mathbf{r}'^-$. Par conséquent, on ne peut pas permuter les intégrales de volume et de surface. Pour contourner cette difficulté, on remplace \mathbf{r}' par \mathbf{r}'^+ à la surface extérieure S_1^+ de l'inclusion. Dans cette situation, le tenseur $G_{,pi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'^+)$ ne présente aucune singularité et on peut permuter les intégrales de volume et de surface :

$$- \int_{V_1} G_{,pi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'^+) dV_1 = L_{pi}^1 - P_{pi}^0 \quad \text{avec } P_{pi}^0 = (K_{rs}^0 n_r n_s)^{-1} n_p n_i \quad (11)$$

En tirant profit des propriétés de l'opérateur interfacial P^0 , l'intégrale de surface dans Eq. (9) se simplifie sous la forme :

$$\frac{1}{V_1} \int_{S_1'} G_{,pi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'^+) K_{ij}^0 [T] n_j dS_1' = \alpha (L_{pi}^1 K_{ij}^0 - \delta_{pj}) R_{jm} q_m^1 \quad \text{où } R_{jm} = \frac{1}{V_1} \int_{S_1'} n_j n_m dS_1 \quad (12)$$

Pour le troisième terme de l'Eq.(9), la relation de confocalité (1) permet d'explicitier l'intégrale suivante définie à l'extérieur de V_1 en fonction des intégrales elliptiques $I_n^1(\lambda_c)$ issues de [7] :

$$- \int_{V_1} G_{,pi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV_1 = - \frac{1}{4\pi K^0} \varphi_{,p}(\lambda) \quad \text{avec } \varphi_{,p}(\lambda) = -x_n \delta_{np} I_n^1(\lambda) \quad (13)$$

$$\text{où } I_n^1(\lambda) = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{ds}{(a_n^2 + s)\sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)}}$$

Avec $I_n^1(\lambda_c) = f I_n^2(0)$, l'expression (13) se simplifie sous la forme :
 $-\int_{V_1} G_{,p}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV_1 = f x_i L_{pi}^2$ où $L_{pi}^2 = -\int_{V_2} G_{,pi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV_2$ avec $\mathbf{r}' \in V_2$ est le tenseur de polarisation associé à V_2 . Ainsi, après quelques simplifications, on obtient l'équation de localisation sous la forme:

$$e_p^1 = e_p^0 - L_{pi}^1 \Delta K_{ij}^{1/0} e_j^1 + L_{pi}^2 q_i^{d2} + \alpha (L_{pi}^1 K_{ij}^0 - \delta_{pi}) R_{jm} q_m^1 \quad (14)$$

Le tenseur de localisation dans l'inclusion s'écrit donc sous la forme :

$$e_p^1 = A_{pn}^1 e_n^0 \quad (15)$$

$$A_{pn}^1 = (\delta_{pn} + (L_{pi}^1 - f L_{pi}^2 + \alpha R_{pi}) K_{in}^1 - (L_{pi}^1 - f L_{pi}^2) (\delta_{im} + \alpha K_{ij}^1 R_{jm}) K_{mn}^0)^{-1}$$

2.1. Conductivité thermique effective du composite

Les champs intensité et densité de flux de chaleur macroscopiques sont donnés par :

$$E_m = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} e_m(\mathbf{r}) dV_2 + \frac{1}{V_2} \int_{S_1} \alpha q_p^1 n_p(\mathbf{r}) n_m(\mathbf{r}) dS_1 = f e_m^1 + (1-f) e_m^m + \alpha f R_{mp} K_{pn}^1 e_n^1 \quad (16)$$

$$Q_m = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} q_m(\mathbf{r}) dV_2 = f q_m^1 + (1-f) q_m^m = f K_{mn}^1 e_n^1 + (1-f) K_{mn}^m e_n^m \quad (17)$$

La conductivité effective s'exprime en liant les champs \mathbf{E} et \mathbf{Q} par une loi similaire à (2) :

$$Q_i = K_{ij}^{eff} E_j \quad (18)$$

$$K_{ij}^{eff} = K_{ij}^0 + f (K_{il}^1 - K_{il}^0 - \alpha R_{im} K_{mn}^1 K_{nl}^0) A_{ij}^1$$

Le présent modèle fournit la conductivité thermique effective d'un composite dans le cas général d'inclusions ellipsoïdales présentant des interfaces imparfaites et pour des comportements thermiques anisotropes par phase.

3. Applications

3.1. Comparaison du tenseur de localisation Eq. (15) avec d'autres modèles dans le cas d'une conductivité thermique isotrope par phase

- Dans le cas d'une inclusion sphérique, les tenseurs de polarisation L^1 et L^2 se réduisent à une composante scalaire $L^1 = L^2 = 1/(3K^0)$ [7]. Le tenseur de localisation a une seule composante :

$$A^1 = \frac{3\alpha K^0}{\alpha(K^1 - f K^1 + K^0(f - 1 + 3K^1)) + \alpha(2 + f)K^1 K^0} \quad (19)$$

Dans ce cas, la conductivité thermique effective est identique à celle obtenue par Benveniste [4] par résolution exacte du problème pour un comportement isotrope par phase.

$$K^{eff} = K^0 + f(K^1 - K^0 - \frac{\alpha}{a} K^1 K^0) A^1 \quad (20)$$

- L'effet de la taille des particules intervient à travers le rapport α/a . Le modèle empirique de Nan [8] met également en évidence cette dépendance $K^{eff} = K^1 / (1 + \alpha K^1 / a)$ sans prendre en compte l'effet lié à la fraction volumique.

- Dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale, nous retrouvons la solution exacte obtenue par Milton [9] dans le cas d'un comportement isotrope par phase.

- Les résultats issus du présent modèle sont comparés au modèle auto-cohérent développé par Bonfoh et al. [10] pour des interfaces imparfaites. Dans la figure 2, les deux approches se différencient lorsque la résistance interfaciale décroît. Ce résultat montre que les méthodes d'homogénéisation issues du modèle d'inclusion d'Eshelby donnent une estimation des propriétés effectives différentes à celles obtenues par le présent modèle. L'avantage de ce modèle réside dans sa simplicité de mise en œuvre dans le cas d'un comportement anisotrope et de renforts de forme arbitraire ellipsoïdale. On note que la conductivité thermique effective et sa chute drastique dépendent du contraste des phases, de la fraction volumique et du facteur de forme des inclusions.

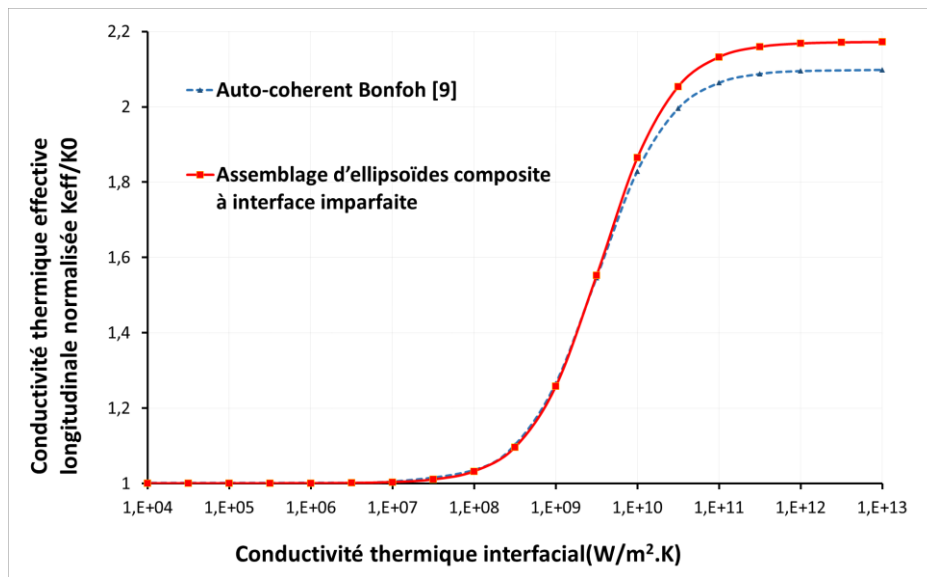


Figure 2 : Comparaison du modèle d'assemblage d'ellipsoïdes-composites à interface imparfaite avec le modèle auto-cohérent de Bonfoh [10], cas prolata dans la direction 1 pour $f = 0.15$,

$$K^1 = 3000W.m^{-1}.K^{-1} \text{ et } K^0 = 385W.m^{-1}.K^{-1}, a_1 = 5a_2 = 5a_3 = 25.10^{-8}m$$

3.2. Influence du facteur de forme

Une géométrie ellipsoïdale induit une anisotropie de la conductivité thermique effectif du composite. Les figures 3 et 4 représentent la conductivité thermique effective dans la direction 1 et dans la direction 3 en fonction de la conductance thermique interfaciale normalisée $\bar{\beta} = a_3 / (\alpha K^0)$, pour différentes valeurs du facteur de forme de l'inclusion a_1/a_3 . On montre que la conductivité thermique effective augmente avec le facteur de forme dans la direction où le demi-axe prend la plus grande valeur (longitudinal pour l'oblate et transversal pour le prolata). La géométrie sphérique minimise la conductivité thermique effective.

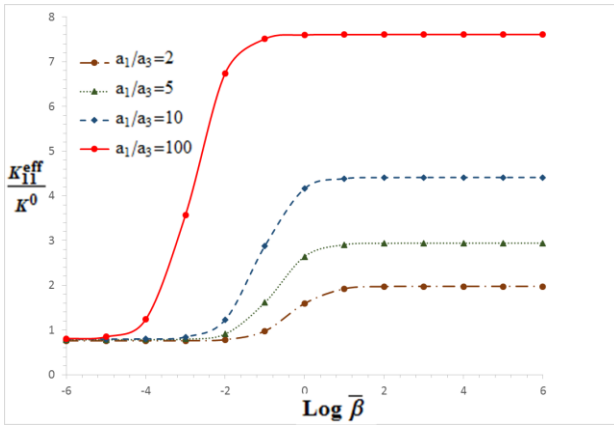


Figure 3 : Influence du facteur de forme sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, cas oblate dans la direction 1 pour $f = 0.2$, $K^1 = 600W.m^{-1}.K^{-1}$ et $K^0 = 17.4W.m^{-1}.K^{-1}$

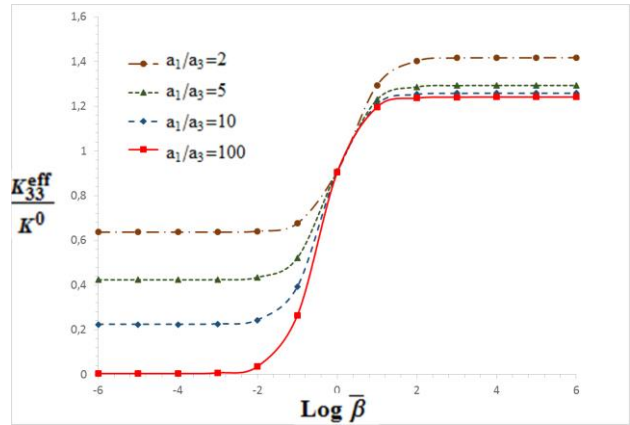


Figure 4 : Influence du facteur de forme sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, cas oblate dans la direction 3 pour $f = 0.2$, $K^1 = 600W.m^{-1}.K^{-1}$ et $K^0 = 17.4W.m^{-1}.K^{-1}$

3.3. Influence de la fraction volumique

Les figures 5 et 6 montrent la conductivité thermique effective dans la direction 1 et dans la direction 3 en fonction de la conductance thermique interfaciale normalisée pour différentes fractions volumiques. La conductivité effective est augmentée par la fraction volumique de l'inclusion pour de faibles valeurs de résistance d'interface. Lorsque cette résistance thermique de l'interface devient importante, l'efficacité de la conductivité diminue avec la fraction volumique des inclusions consécutives à l'augmentation de la surface présentant une conductivité thermique réduite.

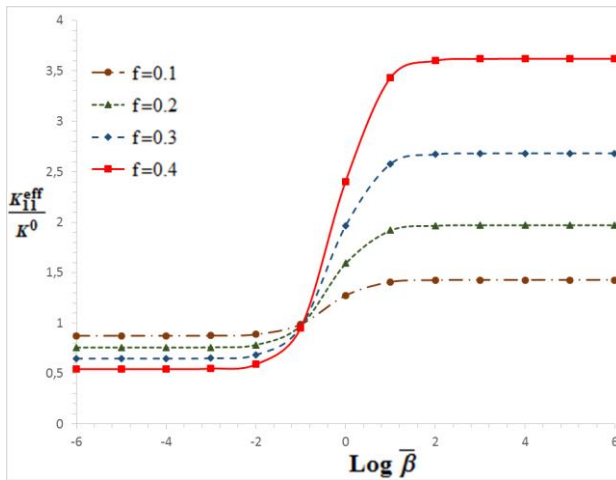


Figure 5 : Influence de la fraction volumique des inclusions sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, oblate dans la direction 1 pour $a_1/a_3 = 2$, $K^1 = 600W.m^{-1}.K^{-1}$ et $K^0 = 17.4W.m^{-1}.K^{-1}$

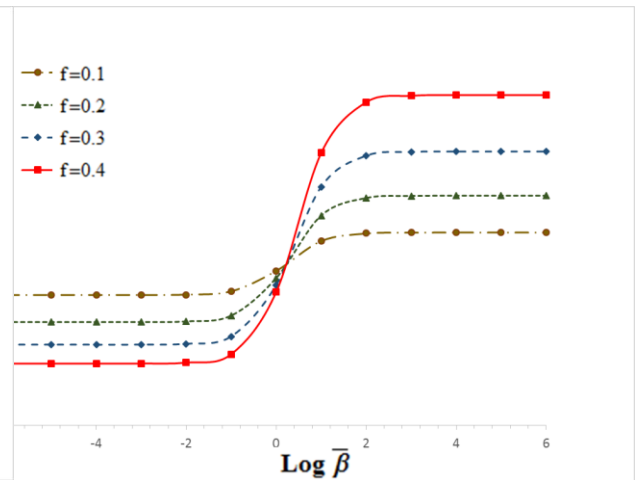


Figure 6 : Influence de la fraction volumique des inclusions sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, oblate dans la direction 3 pour $a_1/a_3 = 2$, $K^1 = 600W.m^{-1}.K^{-1}$ et $K^0 = 17.4W.m^{-1}.K^{-1}$

4. Conclusion

Le modèle micromécanique dédié à l'estimation de la conductivité thermique effective de matériaux composites contenant des interfaces imparfaites est construit sur une extension du modèle d'assemblage de sphères composites de Hashin au cas général d'inclusions ellipsoïdales et d'interfaces imparfaites. Le modèle d'assemblage d'ellipsoïdes obtenu est valable dans le cas général de phases anisotropes et permet d'accéder au comportement effectif du composite par un processus d'homogénéisation. Les résultats obtenus sont exacts et coïncident avec les résultats analytiques issus de la littérature [9] pour des comportements isotropes par phase. La conductivité thermique effective diminue si les interfaces imparfaites deviennent plus nombreuses consécutivement à l'augmentation de la fraction volumique. On retrouve l'influence combinée de l'effet de la forme des renforts et de la résistance thermique d'interface. Par la suite, ce modèle sera amélioré pour mieux rendre compte de l'effet lié au contraste de conductivité thermique entre phases.

Références

- [1] J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol.1 Clarendon Press, 1873.
- [2] D.P.H. Hasselman, L.F. Johnson, Effective Thermal Conductivity of Composites with Interfacial Thermal Barrier Resistance. *Journal of Composite Materials* 21, 508–515, 1987.
- [3] J. D. Eshelby, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proceedings of the royal society A*, vol. 241, 1957.
- [4] Y. Benveniste, On the effective thermal conductivity of multiphase composite, *J. Appl. Math. Phys.*, vol. 37, 1986.
- [5] Z. Hashin and S. Shtrikman, A Variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials, *J. Appl. Phys.*, vol. 33, no. 10, p. 3125, 1962.
- [6] P. L. Kapitza, The study of heat transfer in helium II, *J. Phys. (USSR)* 4, 181–210, 1941.
- [7] T. Mura, *Micromechanics of defects in solids*, second, revised edition, Martinus Nijhoff Publishers, 1987.
- [8] C. W. Nan, R. Birringer, D.R. Clarke and H. Gleiter, The effective thermal conductivity of particulate composites with interfacial thermal resistance, *J. Appl. Phys.* 81 [10], 6692-99, 1997
- [9] Milton, G. W. *The theory of composites*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [10] N. Bonfoh, C. Dreistadt, and H. Sabar, "Micromechanical modeling of the anisotropic thermal conductivity of ellipsoidal inclusion-reinforced composite materials with weakly conducting interfaces," *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 108, pp. 1727–1739, 2017.