

# Étude de l'interaction des deux couches limites turbulentes à l'intérieur d'une cavité parallélépipédique

Mohamed AKSOUH<sup>1</sup>, Amina MATAOUI<sup>1\*</sup>, Chérifa ABID<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique des Fluides Théorique et Appliquée, Faculté de Physique, USTHB, BP 32 Al Alia 16111 Bab-Ezzouar, Alger, Algérie

<sup>2</sup> Aix Marseille Université, IUSTI-CNRS UMR 7343, 13453 Marseille 13, France

\* (auteur correspondant : [amataoui@gmail.com](mailto:amataoui@gmail.com))

**Résumé** - La majorité des études antérieures concernant la cavité différentiellement chauffée concernent principalement des cavités à rapport de forme avoisinant l'unité ( $Ar = H/L \sim 1$ ) avec des largeurs très importantes n'induisant aucune interaction entre l'écoulement ascendant et descendant le long des parois verticales de la cavité. Dans le cadre de ce travail, une étude numérique est réalisée afin d'élargir la compréhension physique du phénomène d'interaction entre deux couches limites verticales induites par convection naturelle dans le cas d'une cavité à parois verticales très rapprochées  $L = 0.076cm$ . Les contours et les profils des différentes variables physiques de l'écoulement moyen et fluctuant montrent l'importance de l'interaction entre les deux écoulements verticaux qui entraîne un écoulement fortement turbulent et chaotique.

## Nomenclature

L,H,P	Dimensions de la cavité suivant x,y,z , respectivement, <i>m</i>	$\alpha$	Diffusivité thermique, $m^2s^{-1}$
<i>k</i>	Energie cinétique turbulente, $m^2s^{-2}$	$\beta$	Coefficient de dilatation thermique, $K^{-1}$
Pr	Nombre de Prandtl, -	$\nu$	Viscosité cinématique, $m^2s^{-1}$
Pr <sub>t</sub>	Nombre de Prandtl turbulent, -	$\nu_t$	Viscosité turbulente, $m^2s^{-1}$
<i>Ra</i>	Nombre de Rayleigh, -	$\theta$	Température adimensionnelle.
T	Température, K	$\rho$	Masse volumique, $kgm^{-3}$
$v_i$	Composantes de la vitesse moyenne, <i>m/s</i>	$\mu$	Viscosité dynamique, $kgm^{-1}s^{-1}$
x,y,z	Coordonnées suivant le repère cartésien	$\varepsilon$	Taux de dissipation, $m^2s^{-3}$
		$\delta_I$	Epaisseur de la couche limite interne, <i>m</i>
		$\delta_E$	Epaisseur de la couche limite externe, <i>m</i>

## 1. Introduction

De nombreux écoulements industriels nécessitent l'utilisation des modèles de turbulence à fort nombre de Reynolds ; ces modèles sont appropriés dans presque tout le domaine, car les sous-couches visqueuses, aussi bien dynamique que thermique sont très minces et négligeables. En pratique, il n'y a aucune difficulté à satisfaire la condition numérique sur la dimension de la première maille adjacente aux parois qui doit être assez grande afin d'éviter

d'avoir plusieurs points dans la sous-couche visqueuse, qui est caractérisée par une épaisseur adimensionnelle  $y^+ > 30$ . Cependant, en comparaison à la convection forcée, peu de travaux existent sur la couche limite turbulente dans le cas de la convection naturelle ; d'une part à cause de la complexité du montage expérimental et des techniques de mesure non intrusives, et d'autre part de la difficulté de maintenir les conditions aux limites thermiques imposées sur les différentes parois de la cavité.

D'après les travaux de [1] et [2], la couche limite turbulente le long des parois isothermes est subdivisée en deux zones :

- **Une couche limite interne**, composée d'une sous-couche visqueuse et de conduction et d'une sous-couche de flottabilité. La sous-couche visqueuse et de conduction, dominée par les forces de cisaillement, est une sous couche laminaire au voisinage de la paroi verticale où les profils de la température et de la vitesse sont linéaires. Au-delà, la sous-couche de flottabilité qui est une zone dominée par les forces de gravité et qui est caractérisée par une vitesse verticale proportionnelle à  $\propto x^{\frac{1}{3}}$  et une température à  $\propto x^{-\frac{1}{3}}$  [2].
- **Une couche limite externe** dominée par les forces d'inertie. La frontière entre les deux zones est délimitée par le maximum de la vitesse verticale moyenne [2]. (Fig.1). D'après [3], la couche interne n'excède pas 7% de l'épaisseur de la couche externe.

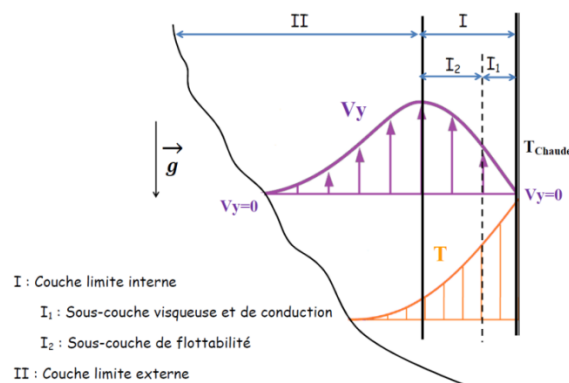


Figure 1. Configuration géométrique et conditions aux limites de la cavité parallélépipédique.

Cependant, d'après notre étude bibliographique [4,5], nous avons constaté que peu de travaux ont été consacrés aux effets de la turbulence dans le cas des cavités de rapports de forme élevés ( $Ar > 20$ ) ou des cavités de faible largeur ( $L < 20\text{cm}$ ). La majorité des études concernent des cavités de rapport de forme proche de l'unité ( $Ar \sim 1$ ) ou des largeurs de cavité sans effets sur la couche limite turbulente ( $L \gg \delta_T$ ). C'est dans ce contexte que nous proposons d'étudier les effets de la largeur de la cavité sur la structure de l'écoulement de la convection naturelle turbulente à l'intérieur d'une cavité parallélépipédique 3D de rapport de forme vertical élevé  $Ar = H/L=28.68$ . Le développement de la couche limite turbulente sera approfondi pour deux nombres de Rayleigh :  $Ra = 2.03 \times 10^{10}$  et  $Ra = 3.39 \times 10^{10}$ .

## 2. Méthodologie

### 2.1. Equations du mouvement

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et celle de l'énergie sont considérées pour la modélisation de la convection naturelle turbulente en se basant sur l'approximation de Boussinesq pour la variation de la masse volumique  $\rho$  et en négligeant la dissipation visqueuse. Le fluide considéré est supposé non-participatif, c'est à dire que l'effet de la radiation est négligé. En appliquant la décomposition de Reynolds aux équations de conservation et en effectuant la moyenne du système obtenu, on déduit la forme finale des équations instantanées moyennées du mouvement :

*Equation de la conservation de la masse:*

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

*Equation de conservation de la quantité de mouvement :*

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j u_i) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\tau_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j}] - \rho g_i \beta (T - T_{ref}) \quad (2)$$

*Equation de la conservation d'énergie*

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j T) = \frac{\kappa}{\rho C_p} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{u'_j T'} \quad (3)$$

La fermeture des équations du système est réalisée par le modèle aux tensions de Reynolds- RSM [4]. Ce dernier est un modèle du second ordre pour lesquels toutes les équations de transport des composantes du tenseur des contraintes turbulentes  $\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$  sont résolues. Les constantes du modèle RSM sont celles du modèle LRR Launder-Reece-Rodi LRR model [4, 6]. Par analogie avec le transport moléculaire, on utilise l'approximation de Boussinesq du simple gradient de diffusion (SGDH) pour modéliser le terme de la corrélation vitesse-température  $\overline{u'_j T'}$  :

$$-\rho \overline{u'_j T'} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (4)$$

avec le nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t = 0.85$ .

### 2.2. Validation

Afin de valider la méthode numérique et le modèle de turbulence dans le cas d'une cavité 3D différentiellement chauffée, on impose les mêmes conditions géométriques et thermiques que celles de l'expérience de [7]. La cavité considérée est de largeur  $L = 0.076\text{m}$ , de hauteur  $H = 2.18\text{m}$  et de profondeur  $P = 0.52\text{m}$ , suivant les directions des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ , respectivement (Fig.2). Les dimensions de cette cavité correspondent à un grand rapport d'aspect vertical  $Ar = H/L = 28.68$  et un rapport d'aspect horizontal modéré  $Az = P/L = 6.84$ .

Les propriétés physico-chimiques de l'air sont déterminées à la température de référence  $T_0$  (Tab.1).

- La surface verticale  $X = 0.0$  (Paroi froide)  $\theta = 0$ .
- La surface verticale  $X = 1.0$  (Paroi chaude)  $\theta = 1$ .
- Les surfaces horizontales  $Y = 0.0$  (plancher) et  $Y = 1.0$  (plafond) : Flux de chaleur constant  $Q = constant$ [4]
- Les surfaces latérales  $Z = -0.5$  et  $Z = 0.5$  : Parois adiabatiques.

La condition d'adhérence à la paroi  $u_i = 0$  est imposée à toutes les surfaces de la cavité.

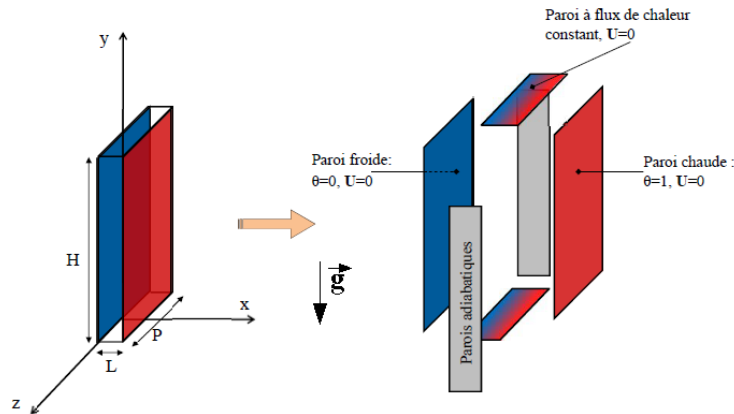


Figure 2. Configuration géométrique et conditions aux limites

Tableau 1. Grandeurs thermiques et valeurs de référence pour les deux nombres de Rayleigh.

	Symbol	$Ra_{H(1)}$	$Ra_{H(1)}$
Température froide	$T_c [K]$	288.1	288.6
Température chaude	$T_H [K]$	308.4	328.1
Température de référence	$T_0 [K] = \frac{T_c + T_H}{2}$	298.25	308.35
Conductivité thermique	$\lambda [W/mk]$	$2.603 \times 10^{-2}$	$2.68 \times 10^{-2}$
Masse volumique	$\rho [kg/m^3]$	1.184	1.145
Viscosité cinématique	$\nu [m^2/s]$	$1.54 \times 10^{-5}$	$1.63 \times 10^{-5}$
Coefficient de dilatation thermique	$\beta [1/K]$	$3.315 \times 10^{-3}$	$3.32 \times 10^{-3}$
Diffusivité thermique	$\alpha [m^2/s]$	$2.19 \times 10^{-5}$	$2.33 \times 10^{-5}$
Nombre de Rayleigh	$Ra_H = g\beta\Delta TL^3/\alpha\nu$	<b><math>2.03 \times 10^{10}</math></b>	<b><math>3.39 \times 10^{10}</math></b>
Nombre de Prandtl	$Pr = \mu C_p / \rho$	0.704	0.701
Vitesse de référence	$V_0 [m/s] = \alpha / H \sqrt{Pr Ra}$	1.2	1.64

### 2.3. Méthode numérique

La résolution numérique des équations de l'écoulement (Eq.1,2,3) couplées aux équations du modèle de turbulence RSM-LRR est obtenue par la discrétisation de ces dernières par la méthode des volumes finis [8] via le logiciel Fluent/Ansys®. Le test de maillage a été réalisé dans nos travaux antérieurs [4,5]. Le maillage considéré pour cette étude, est un maillage hexaédrique avec  $50 \times 300 \times 50$  nœuds suivant  $x \times y \times z$ .

### 3. Résultats et discussions

#### 3.1. Écoulement moyen

Pour les deux nombres de Rayleigh considérés, nous représentons le profil de la vitesse verticale adimensionnée par la vitesse de référence  $V_y/V_0$  le long de l'axe  $X$  à mi-hauteur de la cavité ( $Y = 0.5$ ) (Fig.3), en comparaison aux résultats expérimentaux [7]. Pour  $Ra_{H(1)}$ , nous constatons que le fluide adjacent à la paroi chaude a une vitesse croissante atteignant une valeur maximale de  $V_{y_{max}} = 0.149\text{m/s}$  à la section d'abscisse  $X = 0.93$  ( $x = 70.68\text{mm}$ ). Cette vitesse maximale augmente avec le nombre de Rayleigh ( $Ra_{H(2)}$ ) pour atteindre une valeur de  $V_{y_{max}} = 0.195\text{m/s}$  en s'approchant de la paroi chaude  $X = 0.942$  ( $x = 71.2\text{mm}$ ). La zone comprise entre la paroi chaude ( $V_y = 0$ ) et les points de vitesse maximale ( $V_{y_{max}}$ ), est la région de la couche limite interne. Au-delà, la vitesse diminue pour atteindre zéro à la mi-largeur de la cavité  $X = 0.5$  ( $x = 0.038\text{mm}$ ), cette zone est appelée couche limite externe d'épaisseur  $\delta_E = 32.68\text{mm}$  pour  $Ra_{H(1)}$  et  $\delta_E = 33.2\text{mm}$  pour  $Ra_{H(2)}$ .

Dans le cas d'une cavité carrée avec des parois horizontales adiabatiques à  $Ra_H = 1.58 \times 10^9$ , [3] ont obtenu expérimentalement une épaisseur  $\delta_I = 5\text{mm}$  et  $\delta_E = 75\text{mm}$  à la mi-hauteur de la cavité. Il est très important de noter, qu'à cause de la faible épaisseur de la cavité  $x = 76\text{mm}$ , les deux couches limites (chaude et froide) se croisent à la mi-largeur de la cavité engendrant un développement inachevé de la couche limite externe et une interaction importante entre l'écoulement ascendant et descendant à la mi-largeur de la cavité  $X = 0.5$ . Pour examiner la structure dynamique et thermique de l'écoulement chaotique de la convection naturelle, [9] ont utilisé l'intégration numérique directe (DMI) pour un écoulement dans une cavité à rapport de forme  $Ar = 4$ . Pour trois nombres de Rayleigh  $6.4 \times 10^8$ ,  $2 \times 10^9$  et  $10^{10}$ , les contours de la température et de la fonction de courant confirment bien la structure de l'écoulement à travers une couche limite verticale relativement mince le long des parois isothermes avec une stratification au cœur de la cavité.

Pour les deux nombres de Rayleigh, les profils de la température moyenne adimensionnelle sont représentés sur la Fig.4 à la mi-hauteur de la cavité. Au voisinage des parois actives, la température moyenne varie significativement entraînant un gradient thermique important entraînant le déplacement du fluide. Cependant, on constate qu'à la mi-hauteur de la cavité  $Y = 0.5$ , la température n'est pas constante dans la zone centrale indiquant un écoulement vertical de faible vitesse. D'ailleurs, les profils de la vitesse verticale (Fig.3) confirment que l'écoulement au cœur de la cavité s'effectue sans développer une zone de stagnation excepté à la mi-largeur  $X = 0.5$  où une valeur nulle est obtenue au point de bifurcation des deux couches limites verticales. Un résultat différent par rapport à la majorité des études qui considèrent des cavités à largeurs importantes n'entraînant ainsi aucune interaction entre les deux couches limites verticales. Concernant la prédiction numérique par le modèle de turbulence RSM-LRR pour l'écoulement moyen, on remarque que l'allure des profils de la vitesse verticale et de la température est pratiquement semblable pour les deux nombres de Rayleigh, avec une erreur relative inférieure à 5% pour le maximum de la vitesse verticale (Tab.2).

### 3.2. Ecoulement fluctuant

Les profils de  $V_{y_{rms}}$  prédits par le modèle RSM-LRR sont illustrés sur la Fig.5 pour les deux nombres de Rayleigh. Tout d'abord, on constate que le modèle RSM-LRR prédit, d'une manière satisfaisante, le développement des fluctuations de la vitesse verticale. Comme pour le cas de l'écoulement moyen, ces fluctuations augmentent avec le nombre de Rayleigh. Proche du plancher de la cavité ( $Y = 0.05$ ),  $V_{y_{rms}}$  est plus importante du côté de la paroi froide en comparaison à celle du côté de la paroi chaude. Ceci est dû principalement à l'interaction importante de la couche limite turbulente ascendante le long de la paroi froide ( $X=0$ ) avec le plancher de la cavité.

### 3.3. Développement de la couche limite turbulente

A différentes hauteurs, nous illustrons le développement de l'épaisseur de la couche limite interne le long de la paroi chaude pour les deux nombres de Rayleigh sur la Fig.6. A proximité du plancher, l'écoulement est caractérisé par une faible épaisseur de la couche limite interne. Le long de la paroi chaude, l'épaisseur augmente pour atteindre une valeur de  $\delta_l = 5.32mm$  qui demeure pratiquement constante le long de la zone centrale  $0.3 \leq Y \leq 0.7$ . Certaines études expérimentales ont montré qu'au-delà de la zone de transition, la zone turbulente de la couche limite cesse de croître pour se stabiliser. Au-delà de  $Y > 0.7$ ,  $\delta_l$  augmente brusquement au voisinage du plafond ( $Y = 0.98$ ), confirmant ainsi l'éclatement de la couche limite turbulente provoqué par l'interaction de l'écoulement ascendant vers le plafond de la cavité. On constate aussi, que l'augmentation du nombre de Rayleigh entraîne l'amincissement de la couche limite interne par les forces d'inertie qui deviennent plus dominantes que les forces de cisaillement. Cependant, dans le cadre de cette étude, le phénomène physique est tout autre et il est très délicat de délimiter les différents régimes d'écoulements le long des parois isothermes en s'appuyant sur l'épaisseur de la couche limite turbulente. En fait, comme constaté précédemment, la couche limite turbulente est tronquée par l'interaction de l'écoulement ascendant et descendant. D'ailleurs, cette interaction entraîne un écoulement turbulent-chaotique caractérisé par des structures dynamiques aléatoires à chaque instant (Fig.8.b). Cela engendre une force d'équilibre entre les deux écoulements qui va maintenir l'épaisseur de la couche limite turbulente constante le long d'une certaine hauteur. Au voisinage des parois horizontales, l'équilibre est rompu par le changement de direction du fluide dans la direction horizontale. En augmentant le nombre de Rayleigh, la force d'inertie est plus grande, ce qui entraîne la diminution de l'épaisseur de la couche limite interne. Sur la Fig.7, nous schématisons l'effet du nombre de Rayleigh sur le développement de la couche limite interne le long des parois chaude et froide.

Tab.2. Comparaison de la valeur maximale de la vitesse verticale moyenne adimensionnelle  $V_y/V_0$  à différentes hauteur  $Y$ .

Hauteurs (y/H)	$Ra_{H(1)}$			$Ra_{H(2)}$		
	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9
Rés. Exp. [7]	0.163	0.118	0.087	0.156	0.115	0.087
Présente étude	0.157(3.7%)	0.123(4.1%)	0.089(2.3%)	0.146(6.4%)	0.119(3.4%)	0.087(0%)

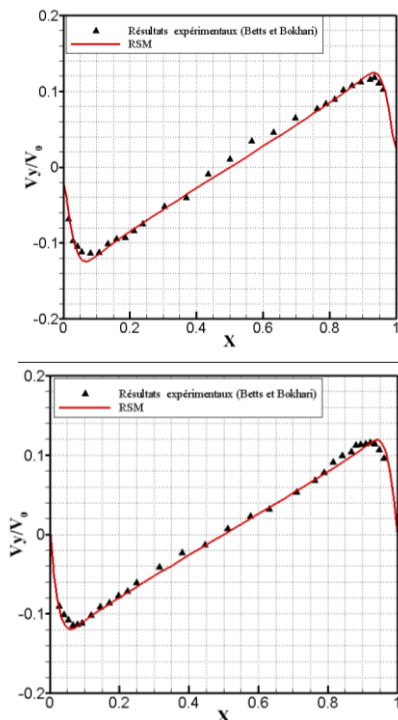


Figure 3. Profils de la vitesse verticale ( $Y=0.5, Z=0.0$ ).

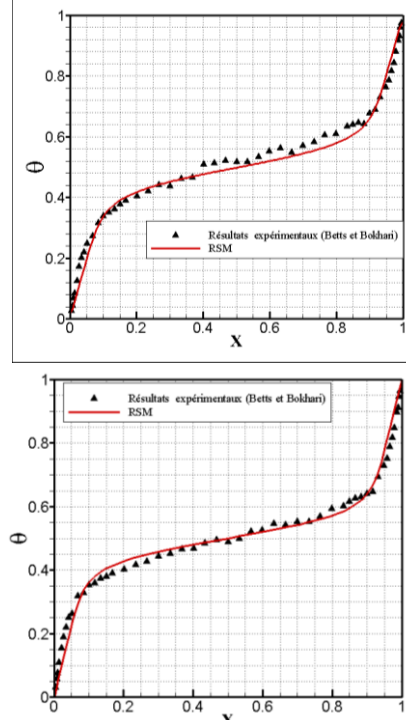


Figure 4. Profils de la température ( $Y=0.5, Z=0.0$ ).

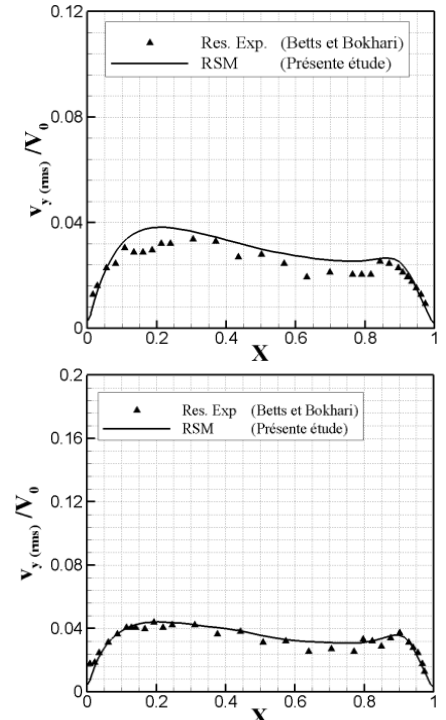


Figure 5. Profils  $V_{y_{rms}}$  ( $Y=0.5, Z=0.0$ ).

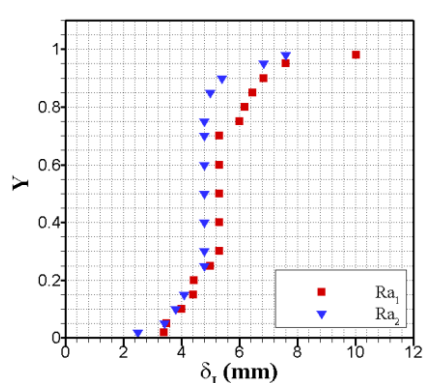


Figure 6. Développement de l'épaisseur de la couche limite interne  $\delta_1$ .

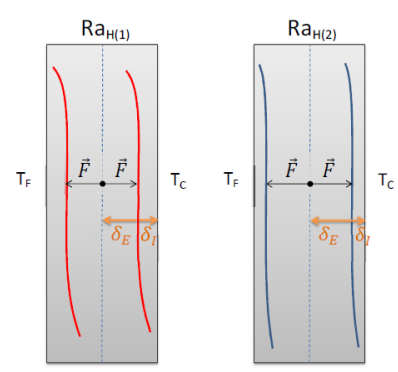
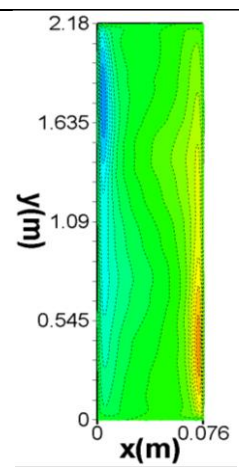
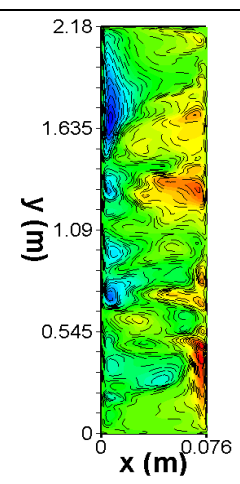


Figure 7. Schéma du développement de l'épaisseur de la couche limite interne.



(a) Vitesse verticale moyenne  $\bar{V}_y$



(b) Vitesse verticale instantanée  $V_y(t)$  ( $t=391.4 \text{ sec}$ )

Figure 8. Structure dynamique de l'écoulement turbulent pour  $Ra_{H_2} = 3.39 \times 10^{10}$  (Pour la clarté des structures, un agrandissement suivant l'abscisse  $x$  a été effectué).

## 4. Conclusion

L'intérêt scientifique de ce travail de recherche est de comprendre le mécanisme du développement de la couche limite turbulente dans le cas d'une cavité différentiellement chauffée à rapport d'aspect important  $Ar=28.68$  et à faible largeur. L'étendu de ce travail de recherche est très large dans le sens où ce type de problème physique est omniprésent dans la nature et pratiquement dans tous les processus industriels.

La modélisation de la convection naturelle turbulente est effectuée par un modèle du second RSM-LRR. Pour valider la prédiction numérique, les résultats obtenus par la méthode des volumes finis ont été comparés à la base de données expérimentales de [7] dans le cas de deux nombres de Rayleigh importants  $Ra_{H_1} = 2.03 \times 10^{10}$  et  $Ra_{H_2} = 3.39 \times 10^{10}$ .

Au-delà de la modélisation, les profils et les contours du champ dynamique montrent une accélération de l'écoulement le long des parois isothermes. L'accroissement du nombre de Rayleigh engendre des plus grands gradients thermique et dynamique au sein de l'écoulement, entraînant ainsi une énergie cinétique turbulente plus appréciable.

L'ensemble des résultats obtenus dans la présente étude ont aussi montré que l'épaisseur de la cavité est un paramètre fondamental pour renforcer le développement de la turbulence dans un milieu confiné. En fait, elle peut complètement modifier la structure et le mécanisme de l'écoulement. En comparaison à la littérature qui confirme la présence d'un fluide au repos au cœur de la cavité [3,9], pour une cavité à faible largeur d'autres phénomènes physiques sont engendrés :

- L'écoulement au centre de la cavité n'est pas au repos malgré le passage de la vitesse verticale par la valeur nulle à la mi-largeur.
- Le passage par zéro est la conséquence de l'interaction des couches limites à la mi-largeur de la cavité qui sont tronquées.
- L'écoulement reste indéfiniment perturbé sans atteindre la solution stationnaire.

## Références

- [1] E.R.G. Eckert et T.W. Jackson. Analysis of turbulent free convection boundary layer on a flat plate. Tech. rept. TR-1051.NACA, pages 255-261, 1951.
- [2] W.K. George et S.P. Capp. A theory for natural convection turbulent boundary layer next to heated vertical surfaces. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 22, pages 813-826, 1979.
- [3] F. Ampofoet T. G. Karayiannis. Experimental benchmark data for turbulent natural convection in an air filled square cavity. Int. J. Heat Mass transfer, vol. 46, pages 3551-3572, 2003
- [4] M. Aksouh, Etude des effets de la turbulence sur la convection naturelle dans une cavité parallélépipédique, Thèse de doctorat, Faculté de Physique-USTHB, Alger, 2013
- [5] M. Aksouh, A. Mataoui et N. Seghouani. Low Reynoldsnumber effect on the turbulent natural convection in an enclosed 3D tallcavity. J. Progress in Computational Fluid Dynamics, vol. 12, pages389-399, 2012.
- [6] B. E. Launder, G. J. Reece et W. Rodi. Progress in the development of a Reynolds-Stress turbulence closure. Journal of Fluid Mechanics, vol. 68, pages 53-566, 1975.
- [7] P. L. Betts et I. H. Bokhari. Experiments on natural convection in an enclosed tall cavity. Inter. J. of Heat and fluid flow, vol. 21, pages 675-683, 2000
- [8] S.V., Patankar, 'Numerical heat transfer and fluid flow', Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences, Book, Francis & Taylor, USA, 1980.
- [9]S. Xin et P. Le Quéré. Direct numerical simulationsof two-dimensional chaotic natural convection in a differentially heatedcavity of aspect ratio 4. J. Fluid Mech, vol. 304, pages 87-118, 1995.