

# Étude de l'influence d'un fort gradient de température sur un écoulement turbulent à l'aide de modèles d'équations moyennées (RANS).

Valentin BOUTROUCHE<sup>1</sup>, Erwin FRANQUET<sup>1</sup>, Sylvain SERRA<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> Univ. Pau & Pays Adour, Laboratoire de Thermodynamique, Énergétique et Procédés (LaTEP) – Institut Pluridisciplinaire de Recherche Appliquée (IPRA) – EA1932  
Bâtiment d'Alembert, 5 rue Jules Ferry, BP 7511, 64075 Pau cedex, France  
\*(auteur correspondant : sylvain.serra@univ-pau.fr)

**Résumé** - L'objectif de cette étude est de simuler les effets d'un fort gradient de température sur un écoulement turbulent entre deux plaques en utilisant des modèles de turbulence simples, type Reynolds Averaged Navier–Stokes (RANS). L'enjeu est de pouvoir ensuite les utiliser pour des calculs industriels sur des géométries plus complexes. Plusieurs simulations, correspondant à différents gradients de température et intensités turbulentes, sont présentées. Le modèle de turbulence choisi est le  $k - \varepsilon - \nu^2/k$ , modèle elliptique d'ordre 1 basé sur l'hypothèse de Boussinesq, avec fermeture thermique de type *SGDH*, basée sur l'hypothèse de diffusion du gradient simple, pour l'équation d'énergie. Les simulations sont réalisées à l'aide du logiciel Code\_Saturne. Les profils de température et de vitesse obtenus ont été comparés avec la littérature et montrent de bons résultats, particulièrement pour un tel choix de modélisation simple. À ces bonnes tendances, s'ajoute le fait que le phénomène principal que l'on souhaite retrouver, à savoir une dissymétrie des différents profils due au fort gradient de température transverse, est bien retrouvé. L'accord, aussi bien qualitatif que quantitatif, est acceptable et permet d'envisager l'utilisation de tels modèles pour des situations réelles sans obérer de la qualité des résultats.

## Nomenclature

### *Symboles latins*

$c_P$  capacité calorifique massique,  $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

$k$  énergie cinétique turbulente,  $\text{m}^2\text{s}^{-2}$

$\mathcal{L}$  échelle de longueur de la turbulence, m

$P$  pression, Pa

$Pr$  nombre de Prandtl, –

$U_i$  composante  $i$  de la vitesse,  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$R$  constante universelle des gaz parfaits,  $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

$Re$  nombre de Reynolds, –

$S_{ij}$  tenseur des taux de déformation,  $\text{s}^{-1}$

$T$  température, K

$t$  temps, s

$x_i$  composante  $i$  de la position, m

$y^+$  distance adimensionnée à la paroi, –

### *Symboles grecs*

$\Delta T$  rapport de température (chaud/froid), –

$\delta_{ij}$  symbole de Kroenecker, –

$\alpha$  coefficient de pondération elliptique, –

$\varepsilon$  dissipation turbulente,  $\text{m}^2\text{s}^{-3}$

$\varphi$  facteur d'anisotropie normal à la paroi, –

$\lambda$  conductivité thermique,  $\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$

$\mu$  viscosité dynamique,  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$

$\nu$  viscosité cinématique,  $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

$\rho$  masse volumique,  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

### *Indices et exposants*

1 froid

2 chaud

$\bar{X}$  moyenne de Reynolds de la grandeur  $X$

$X'$  écart à la moyenne de la grandeur  $X$

$b$  moyenne débitante

dyn dynamique

$t$  turbulent

$\tau$  grandeur de frottement

### *Acronymes*

DNS direct numerical simulation

EDP équation aux dérivées partielles

LES large eddy simulation

RANS Reynolds averaged Navier–Stokes

## 1. Introduction

Il n'est nul besoin de rappeler que les situations industrielles ont parfois des géométries, des dimensions et des conditions opératoires, notamment de vitesse, qui ne permettent pas d'effectuer des calculs de type DNS ou LES; de tels calculs n'étant pas envisageables, d'après les estimations de Spalart, avant les années 2080 et 2050 respectivement. En conséquence, il est nécessaire de s'appuyer sur des simulations RANS. Néanmoins, ces dernières ne résolvant absolument aucune échelle de turbulence et proposant à la place de les modéliser, il devient évident que la question de la pertinence des résultats ainsi obtenus est cruciale.

L'objet de la présente étude est donc logiquement de s'intéresser au comportement d'un modèle de relaxation d'ordre 1 de la famille des modèles de type  $k - \varepsilon$ , à savoir le modèle  $k - \varepsilon - v^2/k$  [1]. Le but principal est de savoir si le comportement de l'écoulement, d'un point de vue dynamique mais aussi thermique, est bien représenté. Soulignons d'ores et déjà qu'il ne s'agit absolument pas de mettre en compétition des simulations RANS avec des équivalents DNS ou LES, ce qui serait illusoire, mais bien de déterminer à partir de tels calculs sur des configurations simples si l'on parvient à décrire de manière acceptable l'évolution des variables physiques par une approche RANS.

Comme indiqué en résumé, le problème physique considéré est celui d'un écoulement interne turbulent anisotherme, de type Poiseuille. Un tel écoulement a en effet été étudié en DNS, initialement pour des configurations isothermes par [2] et [3]. Des travaux similaires ont suivi pour considérer des gradients thermiques transverses, via l'imposition d'un flux de chaleur [4] ou d'un différentiel de températures [5, 6, 7] sur les faces. Dans le même temps, des calculs similaires ont été effectués en LES [8, 9, 10]. Un résumé synthétique de ces diverses études est proposé dans le tableau 1 Synthèse des études d'écoulements plans avec gradient de température transversetable.1 ci-dessous.

	$\Delta T$	1	1.01	1.02	1.07	2	3	5	6, 8, 9
$Re_{\tau m}$	180	DNS [2, 4, 7]	[5, 6]			[5, 7]			
		LES [11, 12, 10]	[13, 11, 12, 9, 10]	[8]		[12, 9, 10]	[8]	[10]	[9]
	395	DNS [2, 4, 7]				[7]			
		LES [12, 10]	[14]		[12, 10]	[12, 10, 14]		[10, 14]	

Tableau 1: Synthèse des études d'écoulements plans avec gradient de température transverse

## 2. Modélisation

Nous considérons donc un écoulement interne forcé, pour un fluide newtonien non pesant dont les propriétés varient en fonction de la température. Dans ce cas, le système d'EDP régissant notre problème est celui des équations de Navier–Stokes dans la limite bas Mach pour lesquelles les propriétés physiques (notamment la masse volumique, la viscosité et la conductivité thermique) dépendent de la température.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{U}_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1a)$$

$$\rho \frac{\partial (\bar{U}_i)}{\partial t} + \rho \frac{\partial (\bar{U}_i \bar{U}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}_{\text{dyn}}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial (\rho \overline{U'_i U'_j})}{\partial x_j} \quad (1b)$$

$$\rho c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \rho c_p \frac{\partial \overline{T U_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \rho c_p \overline{U'_i T'} \right) \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} = 0 \quad (1d)$$

Pour fermer le système (1Modélisationequation.2.1), il faut désormais expliciter les termes RANS, à savoir le tenseur de Reynolds  $\overline{U'_i U'_j}$  et le flux de chaleur turbulent  $\overline{U'_i T'}$ , ainsi que l'équation d'état et les relations régissant les paramètres physiques.

Nous étudions ici est le modèle elliptique  $k - \varepsilon - v^2/k$ , qui ne fait pas appel à des fonctions pariétales mais utilise plutôt un découpage entre les zones lointaine et proche paroi. En outre, la relation pression/déformation n'est plus donnée par une relation algébrique mais devient la solution d'une équation elliptique valable dans tout le domaine [15, 16].

En pratique, étant un modèle du premier ordre, il s'appuie sur l'hypothèse de Boussinesq et exprime donc le tenseur de Reynolds comme une fonction linéaire du taux de déformation :

$$\overline{U'_i U'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2)$$

La particularité de ce modèle réside alors dans l'expression de la viscosité turbulente où l'on fait intervenir une nouvelle échelle de turbulence  $\varphi = \frac{v^2}{k}$ , basée sur un terme de vitesse  $\bar{v}^2$  (ce terme représentant le carré de la seconde composante de vitesse), et en adjoignant deux nouvelles équations, l'une pour la relaxation elliptique et l'autre pour transporter cette échelle.

$$\nu_t = C_\mu \varphi k \min \left( \sqrt{\left( \frac{k}{\varepsilon} \right)^2 + C_T^2 \frac{\nu}{\varepsilon}}, \frac{0.6}{\sqrt{6 + C_\mu \varphi \sqrt{\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{S}}}}} \right) \quad (3)$$

$$\frac{dk}{dt} = \mathcal{P} + \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] - C_{\varepsilon 3} (1 - \alpha)^3 \frac{k}{\varepsilon} 2\nu \nu_t (\partial_k \partial_j \bar{U}_i) (\partial_k \partial_j \bar{U}_i) \quad (4a)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{C_{\varepsilon 1} \mathcal{P} - C_{\varepsilon 2}^* \varepsilon}{\sqrt{\left( \frac{k}{\varepsilon} \right)^2 + C_T^2 \frac{\nu}{\varepsilon}}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] \quad (4b)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (1 - \alpha^3) f_w + \alpha^3 f_h - \mathcal{P} \frac{\varphi}{k} + \frac{2}{k} \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial k}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_\varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] \quad (5a)$$

$$\alpha - \mathcal{L}^2 \Delta \alpha = 1 \quad (5b)$$

Vues les applications industrielles visées, l'utilisation d'une loi d'état de type gaz parfait est tout à fait adaptée :

$$\bar{P} = \rho R \bar{T} \quad (6)$$

Enfin, le fluide considéré étant de l'air, ses propriétés sont régies par la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = 1.461 \cdot 10^{-6} \frac{T^{1.5}}{T + 111} \quad (7a)$$

$$\lambda(T) = \frac{\mu(T) c_p}{Pr} = \frac{1.468 \times 10^{-3}}{Pr} \frac{T^{1.5}}{T + 111} \quad (7b)$$

### 3. Résultats

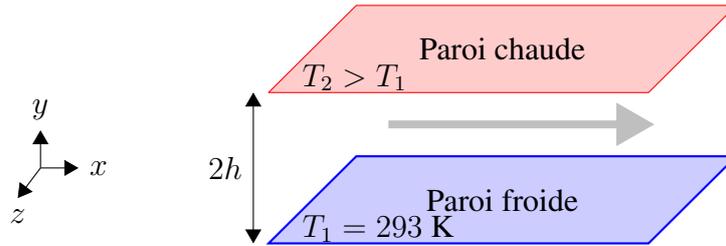


Figure 1: Schéma de la configuration étudiée

La situation envisagée est celle d'un écoulement plan entre deux plaques à des températures différentes, illustrée par la figure 1. Schéma de la configuration étudiée figure.1, avec des conditions aux limites bi-périodiques afin de limiter le domaine de calcul. Cependant, pour pallier le ralentissement progressif de l'écoulement dû aux pertes de charge, un terme source est ajouté au second membre de l'équation de quantité de mouvement [10].

Nous allons traiter six cas tests, pour deux nombres de Reynolds turbulents moyens de 180 et 395, et quatre rapports de température (1.01, 1.07, 2 et 5). Les résultats sont systématiquement comparés avec des résultats de DNS et/ou de LES. Dans les cas fortement anisothermes, on distinguera les profils côté chaud et froid en rouge et bleu respectivement.

Les calculs sont effectués en volumes finis, à l'aide du logiciel Code\_Saturne, en utilisant une méthode SIMPLEC pour le couplage vitesse/pression et un schéma upwind d'ordre 2 (SOLU) pour les flux convectifs. L'intégration temporelle est faite en Euler implicite. Pour chaque simulation, des maillages différents sont utilisés ; ils comportent en général une soixantaine de cellules, ce chiffre étant obtenu après étude de la convergence en maillage.

Comme on peut le voir sur les figures 2 Cas  $Re_{\tau_m} = 180$  et  $\Delta T = 1.01$  figure.2 à 7 Cas  $Re_{\tau_m} = 395$  et  $\Delta T = 5$  (rouge: côté chaud, bleu: côté froid) figure.7, les résultats RANS parviennent à reproduire le comportement dynamique de l'écoulement et notamment à prédire la dissymétrie de vitesse due à une relaminarisation de l'écoulement. En revanche, lorsque le gradient thermique global augmente, des écarts apparaissent sur les rapports de température et l'on note une différence notable avec les résultats de la LES. Néanmoins, il faut alors remarquer que la comparaison avec les calculs DNS à  $\Delta T = 2$  montrent aussi que la température est légèrement sur-estimée en LES ; aussi, cette différence n'apparaît pas pour l'instant comme rédhibitoire.

Enfin, si l'on s'intéresse aux profils adimensionnés, on peut voir que les profils de vitesses sont acceptables, à l'exception du côté froid où les prédictions divergent loin de la paroi. Quant aux profils de températures, le comportement est globalement acceptable. Néanmoins, pour les forts gradients de température et les forts nombres de Reynolds, il semble que le profil chaud passe au-dessus du profil froid, ce qui n'est pas prévu avec les résultats LES. Étant donné les incertitudes associées à ces résultats, ce constat liminaire n'est pas à priori rédhibitoire.

## 4. Conclusion

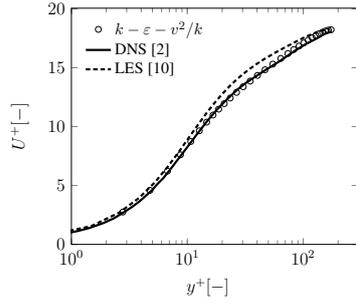
Cet article s'est intéressé à l'étude de l'influence d'un fort gradient de température transverse sur un écoulement turbulent au travers de simulations réalisées via des modèles d'équations moyennées (RANS). De manière assez surprenante, il a été montré que les résultats obtenus supportaient assez bien la comparaison avec des calculs équivalents réalisés en DNS et/ou en LES. Ainsi, on a pu constater que les solutions RANS reproduisaient sans difficulté le comportement dynamique, et notamment l'effet de relaminarisation ayant pour effet de briser la symétrie usuelle du profil de vitesse dans ce genre de situations. En outre, le comportement thermique reste globalement acceptable. Sur les cas extrêmes, des écarts comportementaux avec les résultats LES semblent apparaître à la fin de la couche logarithmique; cependant, des prédictions plus précises seraient requises pour confirmer ce constat.

## Références

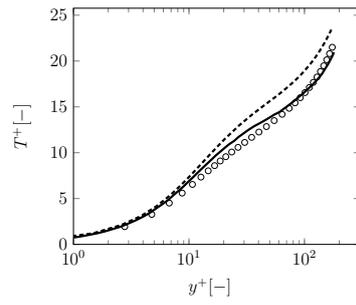
- [1] F. Billard and D. Laurence. A robust  $k-\varepsilon/k$  elliptic blending turbulence model applied to near-wall, separated and buoyant flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 33(1) :45–58, 2012.
- [2] John Kim, Parviz Moin, and Robert Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of fluid mechanics*, 177 :133–166, 1987.
- [3] Robert D Moser, John Kim, and Nagi N Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$ . *Physics of fluids*, 11(4) :943–945, 1999.
- [4] Hiroshi Kawamura, Hiroyuki Abe, and Yuichi Matsuo. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 20(3) :196–207, 1999.
- [5] Franck Nicoud and Thierry Poinsot. DNS of a channel flow with variable properties. In *TSFP DIGITAL LIBRARY ONLINE*. Begel House Inc., 1999.
- [6] B. Debusschere and C.J. Rutland. Turbulent scalar transport mechanisms in plane channel and Couette flows. *International Journal of heat and mass transfer*, 47(8) :1771–1781, 2004.
- [7] Frédéric Auléry, Adrien Toutant, Françoise Bataille, and Ye Zhou. Energy transfer process of anisothermal wall-bounded flows. *Physics Letters A*, 379(24) :1520–1526, 2015.
- [8] Wen-Ping Wang and Richard H. Pletcher. On the large eddy simulation of a turbulent channel flow with significant heat transfer. *Physics of Fluids (1994-present)*, 8(12) :3354–3366, 1996.
- [9] Bamdad Lessani and Miltiadis V. Papalexandris. Numerical study of turbulent channel flow with strong temperature gradients. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 18(3/4) :545–556, 2008.
- [10] Sylvain Serra, Adrien Toutant, and Françoise Bataille. Thermal large eddy simulation in a very simplified geometry of a solar receiver. *Heat Transfer Engineering*, 33(6) :505–524, 2012.
- [11] Guillaume Brilliant, Sabine Husson, and Françoise Bataille. Subgrid-scale diffusivity : Wall behavior and dynamic methods. *Journal of applied mechanics*, 73(3) :360–367, 2006.
- [12] Sabine Husson. *Simulations des grandes échelles pour les écoulements turbulents anisothermes*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2007.
- [13] Alexandre Chatelain. *Simulation des Grandes Échelles d'écoulements turbulents avec transferts de chaleur*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2004.
- [14] Syed Mohd Yahya, Syed Fahad Anwer, and Sanjeev Sanghi. Turbulent forced convective flow in an anisothermal channel. *International Journal of Thermal Sciences*, 88 :84–95, 2015.
- [15] Paul A. Durbin. Near-wall turbulence closure modeling without "damping functions". *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 3(1) :1–13, 1991.
- [16] Paul A. Durbin. Separated flow computations with the  $k-\varepsilon-v$ -squared model. *AIAA journal*, 33(4) :659–664, 1995.

## Remerciements

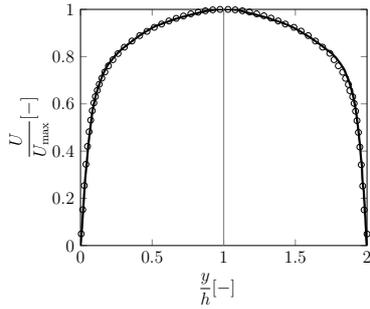
Nous remercions chaleureusement le Dr. Rémi MANCEAU pour les fructueuses discussions autour de l'interprétation physique des modèles de turbulence.



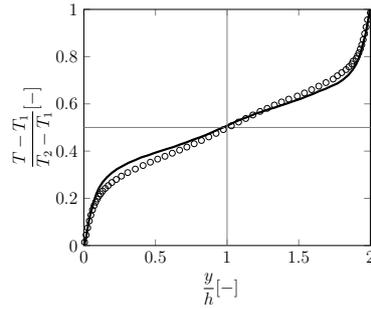
(a) Vitesse adimensionnée



(b) Température adimensionnée

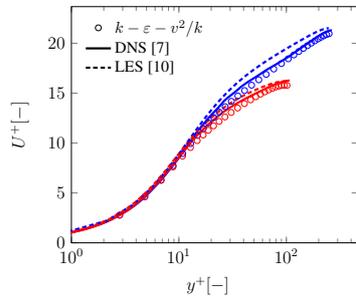


(c) Rapport de vitesse

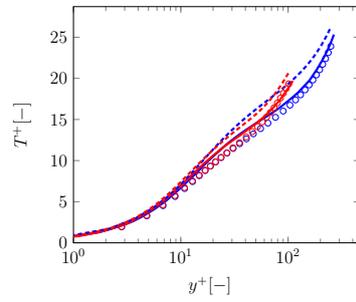


(d) Rapport de températures

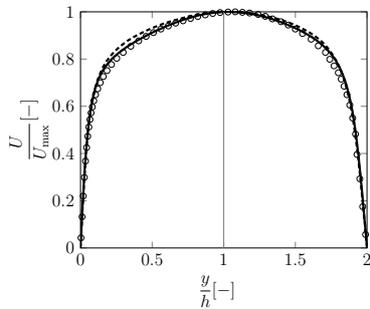
Figure 2: Cas  $Re_{\tau_m} = 180$  et  $\Delta T = 1.01$



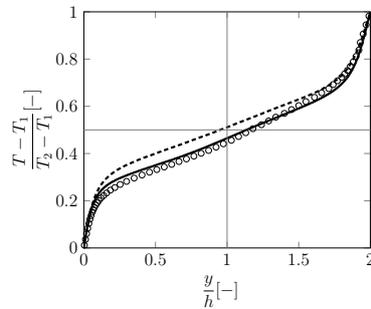
(a) Vitesse adimensionnée



(b) Température adimensionnée

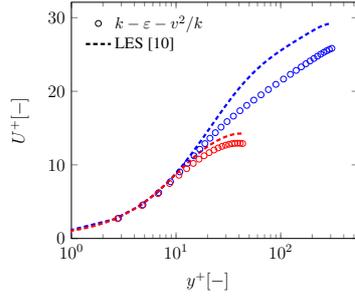


(c) Rapport de vitesse

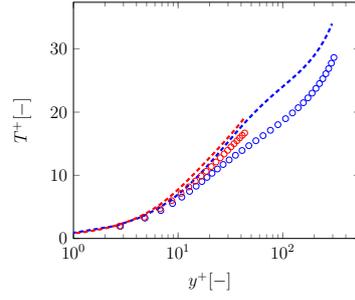


(d) Rapport de températures

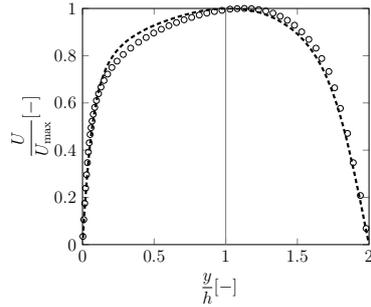
Figure 3: Cas  $Re_{\tau_m} = 180$  et  $\Delta T = 2$  (rouge : côté chaud, bleu : côté froid)



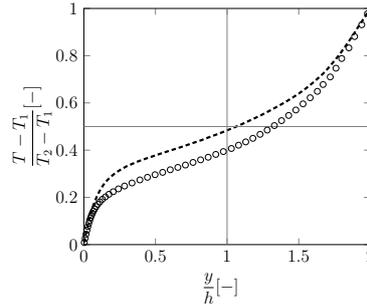
(a) Vitesse adimensionnée



(b) Température adimensionnée

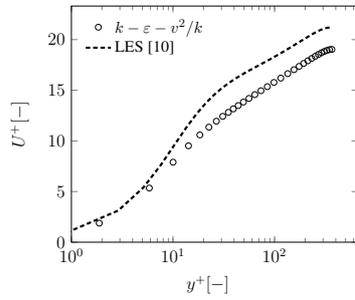


(c) Rapport de vitesse

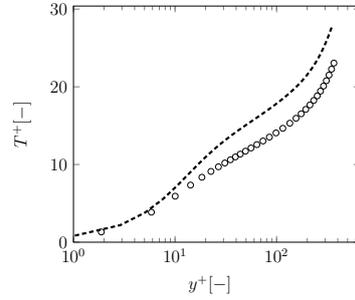


(d) Rapport de températures

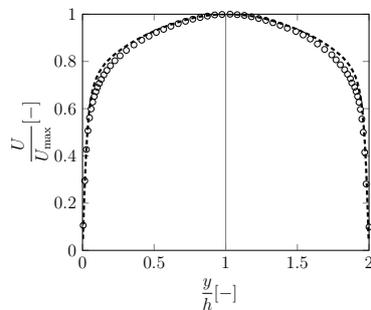
Figure 4: Cas  $Re_{\tau_m} = 180$  et  $\Delta T = 5$  (rouge : côté chaud, bleu : côté froid)



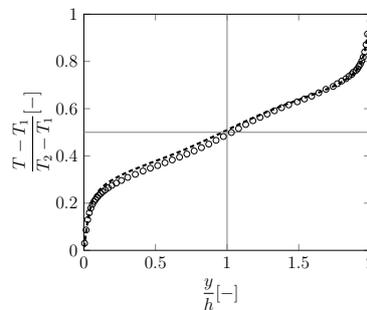
(a) Vitesse adimensionnée



(b) Température adimensionnée



(c) Rapport de vitesse



(d) Rapport de températures

Figure 5: Cas  $Re_{\tau_m} = 395$  et  $\Delta T = 1.07$

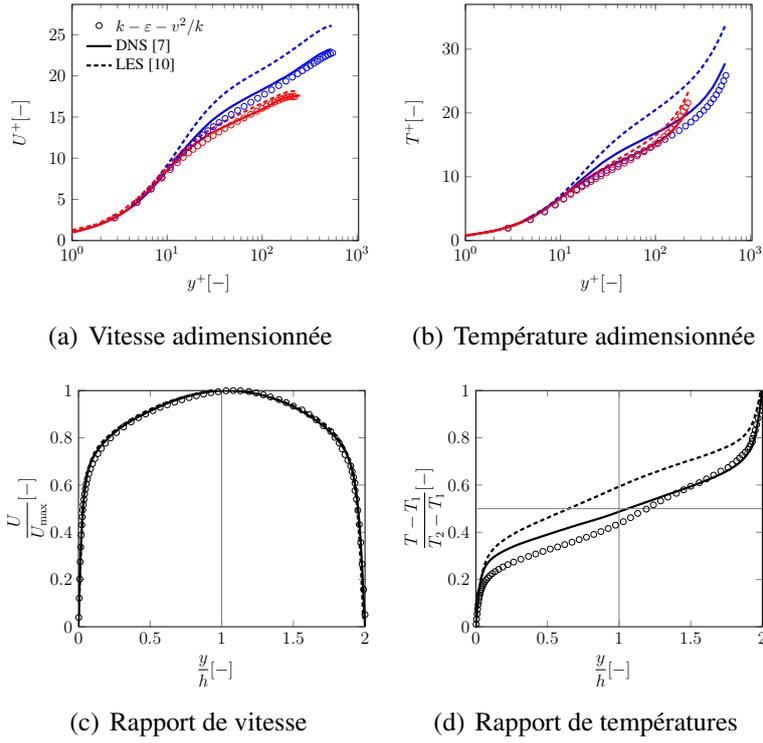


Figure 6: Cas  $Re_{\tau_m} = 395$  et  $\Delta T = 2$  (rouge : côté chaud, bleu : côté froid)

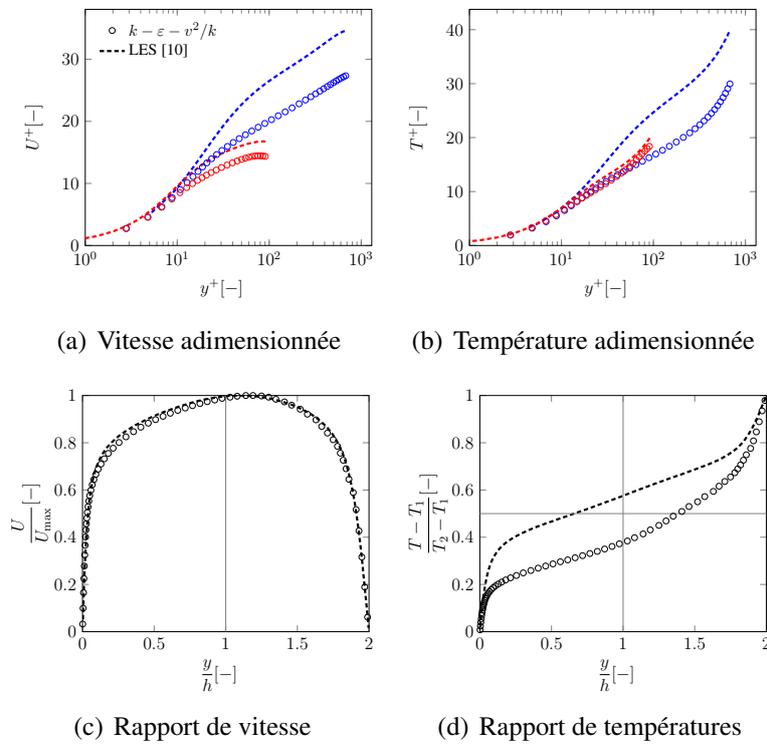


Figure 7: Cas  $Re_{\tau_m} = 395$  et  $\Delta T = 5$  (rouge : côté chaud, bleu : côté froid)