

# Étude de l'équation d'énergie pour le développement de modèles sous-maillages adaptés aux écoulements fortement anisothermes

Dorian DUPUY\*, Adrien TOUTANT, Françoise BATAILLE

Laboratoire PROMES-CNRS (UPR 8521), Tecnosud-Rambla de la thermodynamique, 66100 Perpignan - France

Université de Perpignan via Domitia

\*(auteur correspondant : dorian.dupuy@promes.cnrs.fr)

**Résumé** - Les termes sous-maillages des équations de bas nombre de Mach sont étudiés pour un écoulement quasi-compressible fortement anisotherme. On établit les équations des grandeurs filtrées de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la loi des gaz parfaits. L'analyse des termes sous-maillages est réalisée avec le filtre classique, non pondéré, et le filtre de Favre, pondéré par la masse volumique. L'étude numérique détaillée de l'amplitude des termes sous-maillages associés à l'équation de conservation de l'énergie dans un canal plan bipériodique fortement anisotherme est ensuite présentée.

## Nomenclature

$C_p$	Capacité thermique, $J kg^{-1} K^{-1}$	$z$	Direction transverse
$h$	Demi-hauteur du canal, m	<i>Symboles grecs</i>	
$P$	Pression mécanique, Pa	$\Delta_i^+$	Taille de maille adimensionnée, direction $i$
$P_0$	Pression thermodynamique, Pa	$\lambda$	Conductivité thermique, $W m^{-1} K^{-1}$
$L_i$	Taille du canal dans la direction $i$ , m	$\mu$	Viscosité dynamique, Pa s
$Ma$	Nombre de Mach	$\nu$	Viscosité cinématique, $m^2/s$
$N_i$	Nombre de points dans la direction $i$	$\rho$	Masse volumique, $kg/m^3$
$Q$	Flux de chaleur conductif, $W m^{-2}$	$\Sigma$	Tenseur des contraintes de cisaillement, Pa
$r$	Constante spécifique, $J kg^{-1} K^{-1}$	$\gamma$	Indice adiabatique
$Re_\tau$	Nombre de Reynolds turbulent	<i>Indices et exposants</i>	
$T$	Température, K	$\bar{\cdot}$	Filtre classique, non-pondéré
$t$	Temps, s	$\tilde{\cdot}$	Filtre de Favre, pondéré par $\rho$
$U$	Vitesse, m/s	$\langle \cdot \rangle^A$	Moyenne arithmétique
$x$	Direction longitudinale	$\langle \cdot \rangle^Q$	Moyenne quadratique
$y$	Direction perpendiculaire aux parois		

## 1. Introduction

Composant essentiel des centrales thermodynamiques à tour, le récepteur solaire à haute température transfère l'énergie solaire concentrée à un fluide caloporteur sous forme de chaleur. L'optimisation de la géométrie interne du récepteur vise à maximiser l'échange thermique vers le fluide tout en limitant les pertes de charge. Dans ce cadre, il est nécessaire de pouvoir réaliser des simulations numériques précises des écoulements présents dans les récepteurs solaires [1]. Or, la simulation des écoulements fortement anisothermes des récepteurs solaires est limitée d'une part par le coût numérique insurmontable de la simulation numérique directe (SND) dans les conditions réelles d'un récepteur solaire et d'autre part par le manque de modèles de turbulence prenant en compte les spécificités des écoulements turbulents quasi-compressibles et fortement anisothermes. Ces écoulements, turbulents et fortement anisothermes, sont soumis

à de fortes variations des propriétés du fluide avec la température. Ils sont le lieu d'un couplage fort entre la turbulence et la température qui influence les statistiques de la turbulence [2]. La simulation des grandes échelles (SGE) est une alternative efficace à la simulation numérique directe, dans laquelle seules les grandes échelles de la turbulence sont explicitement représentées, l'effet des petites échelles sur les grandes échelles étant modélisé. Cependant, cette méthode requiert le développement de modèles sous-mailles adaptés aux écoulements turbulents quasi-compressibles et fortement anisothermes [3, 4].

On réalise une étude a priori des termes sous-mailles à partir des données hautes résolutions d'une simulation numérique directe d'un canal plan bipériodique fortement anisotherme. Cette géométrie simplifiée reproduit les caractéristiques des écoulements présents dans les récepteurs solaires. Des études des termes sous-mailles ont été réalisées pour des écoulements diphasiques solénoïdaux [5], purement compressibles dans une couche de mélange [6] ou en turbulence isotrope [7, 8, 9] mais il n'existe à notre connaissance de travaux dans le cas d'écoulements turbulents fortement anisothermes. L'étude repose sur une forme particulière des équations de Navier-Stokes utilisant l'approximation de bas nombre de Mach. On réalise l'étude a priori des termes sous-mailles pour deux types de filtre de simulation des grandes échelles : le filtre non pondéré, et le filtre pondéré par la masse volumique [10]. Les deux approches conduisent à des termes sous-mailles différents. Dans les deux cas, l'amplitude des termes sous-mailles est estimée dans chaque formulation. L'objectif est de déterminer les termes à modéliser et les termes pouvant être négligés pour chaque formulation. On évaluera en particulier la pertinence des deux formulations pour les écoulements quasi-compressibles quant à l'équation de conservation de l'énergie. Cette étude étend les résultats d'une étude précédente [11] focalisée sur les termes sous-mailles de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Les équations de bas nombre de Mach non filtrées sont présentées dans la section 2. Les équations des grandeurs filtrées sont développées dans la section 3. La méthode numérique et la géométrie étudiée sont données dans la section 4. Les résultats sont discutés dans la section 5.

## 2. Équations de bas nombre de Mach

L'écoulement étudié est quasi-compressible et l'approximation de bas nombre de Mach de Paolucci [12] est appliquée ( $Ma < 0,3$ ). Cette approche permet de prendre en compte la compressibilité du fluide tout en négligeant les phénomènes acoustiques. Elle est fondée sur un développement de chaque variable des équations de Navier-Stokes en série du carré du nombre de Mach. Ce développement asymptotique conduit à séparer la pression en deux termes : la *pression thermodynamique*  $P_0$ , constante dans l'espace, qui représente la pression moyenne dans le domaine ; et la *pression mécanique*  $P$ , liée à la vitesse du fluide et qui varie spatialement. Le gaz étudié est l'air, que l'on considère être newtonien et respecter la loi des gaz parfaits avec comme constante spécifique  $r = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Les effets de la gravité sont négligés. Les propriétés du fluide varient avec la température. Les variations de viscosité dynamique sont prises en compte par la loi de Sutherland [13]. La conductivité thermique en est déduite du nombre de Prandtl  $Pr = 0,76$  et de la capacité thermique à pression constante  $C_p = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , tout deux supposés constants. On utilise les mêmes paramètres que pour la DNS de Aulery et al. [4].

Le système physique d'équations résultant de ces hypothèses est appelé *équations de bas nombre de Mach*. Il est présenté dans l'article [11]. Il est caractérisé par une forme particulière de l'équation de l'énergie. La conservation locale de l'énergie y est imposée par une contrainte sur la divergence de la vitesse. Nous étudions les équations du système physique des grandeurs filtrées au sens de la simulation des grandes échelles sous l'approximation de bas nombre de

Mach et en particulier l'équation de conservation de l'énergie.

### 3. Filtrage des équations de bas nombre de Mach

#### 3.1. Avec le filtre classique

Lors d'une simulation des grandes échelles, toutes les échelles de la turbulence ne sont pas capturées par le maillage. On peut représenter cet effet par l'application d'un filtre volumique sur les équations de Navier-Stokes noté  $(\bar{\cdot})$ . On appelle *filtre classique* ce filtre non pondéré. On choisit un filtre vérifiant les propriétés de conservation des constantes,  $\bar{a} = a$  si  $a$  constant, et de linéarité,  $\overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi}$  pour tout  $\phi$  et  $\psi$  [14]. En revanche, le filtre ne commute pas avec l'opération de dérivation. Dans ces conditions, les équations de bas nombre de Mach des grandeurs filtrées font intervenir deux types de termes sous-maillages. Les erreurs de commutation avec la dérivée, notées sous la forme  $C_\alpha^\beta$ , sont liées aux variations de la taille du filtre, c'est-à-dire de l'inhomogénéité du maillage SGE. Les erreurs de commutation avec le produit (non-linéarités), notées sous la forme  $F_\alpha$ , sont liées aux fortes variations des propriétés du fluide à l'exception notable du terme sous-maille lié au terme convectif.

Les équations de bas nombre de Mach avec le filtre classique sont données par :

— Équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{U}_j + F_{\rho U_j}) + C_{\rho U_j}^j = 0 \quad (1)$$

— Équations de conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{U}_i + F_{\rho U_i}) = & - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{U}_j \bar{U}_i + F_{\rho U_j U_i}) - C_{\rho U_j U_i}^j - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - C_P^i \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\Sigma}_{ij} + F_{\Sigma_{ij}}) + C_{\Sigma_{ij}}^j \end{aligned} \quad (2)$$

— Équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + C_{U_j}^j = \frac{\gamma - 1}{\gamma P_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{Q}_j + F_{Q_j}) + C_{Q_j}^j \right] - \frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial t} \quad (3)$$

— Loi des gaz parfaits

$$\bar{T} = \frac{P_0}{r} \left( \frac{1}{\bar{\rho}} + F_{1/\rho} \right) \quad (4)$$

où les équivalents dans la formulation fondée sur le filtre classique du tenseur des contraintes de cisaillement et du flux de chaleur conductif sont donnés par

$$\bar{\Sigma}_{ij} = \mu(\bar{T}) \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu(\bar{T}) \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (5)$$

$$\bar{Q}_j = \lambda(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad (6)$$

avec  $\mu$  la viscosité dynamique,  $\lambda$  la conductivité thermique et où on utilise les définitions suivantes des termes sous-maillages :

$$C_{\rho U_j}^j = \frac{\overline{\partial \rho U_j}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\rho U_j}}{\partial x_j} \quad (7)$$

$$C_{\rho U_j U_i}^j = \frac{\overline{\partial \rho U_j U_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\rho U_j U_i}}{\partial x_j} \quad (8)$$

$$C_P^i = \frac{\overline{\partial P}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} \quad (9)$$

$$C_{\Sigma_{ij}}^i = \frac{\overline{\partial \Sigma_{ij}}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\Sigma_{ij}}}{\partial x_j} \quad (10)$$

$$C_{U_j}^j = \frac{\overline{\partial U_j}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_j} \quad (11)$$

$$C_{Q_j}^j = \frac{\overline{\partial Q_j}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{Q_j}}{\partial x_j} \quad (12)$$

$$F_{\rho U_j} = \overline{\rho U_j} - \bar{\rho} \overline{U_j} \quad (13)$$

$$F_{\rho U_i} = \overline{\rho U_i} - \bar{\rho} \overline{U_i} \quad (14)$$

$$F_{\rho U_j U_i} = \overline{\rho U_j U_i} - \bar{\rho} \overline{U_j U_i} \quad (15)$$

$$F_{\Sigma_{ij}} = \overline{\Sigma_{ij}} - \bar{\Sigma}_{ij} \quad (16)$$

$$F_{Q_j} = \overline{Q_j} - \bar{Q}_j \quad (17)$$

$$F_{1/\rho} = \frac{\overline{1}}{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}} \quad (18)$$

### 3.2. Avec le filtre de Favre

La pondération de l'opération de filtrage par la masse volumique est courante pour l'étude des écoulements à propriétés variables. On appelle *filtre de Favre* ce filtre, noté  $(\widetilde{\cdot})$  et défini pour toute grandeur  $\phi$  par  $\widetilde{\phi} = \overline{\rho \phi} / \bar{\rho}$ . Avec le filtre de Favre, les erreurs de commutation avec la dérivée ne sont pas modifiées. En revanche, les non-linéarités sont modifiées. La pondération par la masse volumique permet d'éviter les non-linéarités associées au produit de la forme  $\rho \phi$ , présentes dans l'équation de conservation de la masse, l'équation de conservation de la quantité de mouvement de la loi des gaz parfaits, mais fait naître des non-linéarités supplémentaires lorsqu'une grandeur  $\phi$  apparaît sans la masse volumique, telle que la vitesse dans l'équation de conservation de l'énergie. Les termes sous-maîles liés aux non-linéarités du tenseur des contraintes de cisaillement et au flux de chaleur conductif sont également modifiés.

Les équations de bas nombre de Mach avec le filtre de Favre sont données par :

— Équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{U_j}}{\partial x_j} + C_{\rho U_j}^j = 0 \quad (19)$$

— Équations de conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{U}_i}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho} \widetilde{U}_j \widetilde{U}_i + G_{\rho U_j U_i} \right) - C_{\rho U_j U_i}^j - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - C_P^i \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \widehat{\Sigma}_{ij} + G_{\Sigma_{ij}} \right) + C_{\Sigma_{ij}}^j \end{aligned} \quad (20)$$

— Équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \widetilde{U}_j - \frac{F_{\rho U_j}}{\bar{\rho}} \right) + C_{U_j}^j = \frac{\gamma - 1}{\gamma P_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \widehat{Q}_j + G_{Q_j} \right) + C_{Q_j}^j \right] - \frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial t} \quad (21)$$

— Loi des gaz parfaits

$$\widetilde{T} = \frac{P_0}{\bar{\rho} r} \quad (22)$$

où les équivalents dans la formulation fondée sur le filtre de Favre du tenseur des contraintes de cisaillement et du flux de chaleur conductif sont données par

$$\widehat{\Sigma}_{ij} = \mu(\widetilde{T}) \left( \frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu(\widetilde{T}) \frac{\partial \widetilde{U}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (23)$$

$$\widehat{Q}_j = \lambda(\widetilde{T}) \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j} \quad (24)$$

et où on utilise les définitions suivantes des termes sous-mailles spécifiques à la formulation fondée sur le filtre de Favre :

$$G_{Q_j} = \overline{Q_j} - \widehat{Q}_j \quad (25) \quad G_{\Sigma_{ij}} = \overline{\Sigma_{ij}} - \widehat{\Sigma}_{ij} \quad (26) \quad G_{\rho U_j U_i} = \overline{\rho U_j U_i} - \overline{\rho} \widetilde{U}_j \widetilde{U}_i \quad (27)$$

La pondération par la masse volumique de l'opération de filtrage permet de réduire le nombre de termes sous-mailles des équations de conservation de la masse, de conservation de la quantité de mouvement de la loi des gaz parfaits. En revanche, un terme sous-maille supplémentaire est ajouté à l'équation de conservation de l'énergie. Cet article s'intéresse à l'importance de ce terme sous-maille supplémentaire vis-à-vis de la formulation fondée sur le filtre classique.

#### 4. Géométrie et méthode numérique

On considère l'écoulement statistiquement stationnaire d'un canal plan bipériodique fortement anisotherme. Les directions de périodicité sont la direction de l'écoulement  $x$  et la direction transverse  $z$ . Le fluide s'écoule entre deux parois planes de température constante, ici respectivement à  $T_1 = 293$  K et  $T_2 = 586$  K, générant un fort gradient de température dans la direction normale aux parois. Le nombre de Reynolds turbulent de la simulation est  $Re_\tau = 180$ . Il est défini comme la moyenne arithmétique des nombres de Reynolds turbulents aux deux parois. La taille du domaine est  $L_x = 4\pi h$ ,  $L_y = 2h$  et  $L_z = 2\pi h$ , avec  $h = 15$  mm. Le maillage utilisé comporte  $384 \times 266 \times 384$  mailles. Il a été choisi après une étude de convergence en maillage. Il est régulier dans les deux directions homogènes et suit une loi en tangente hyperbolique dans la direction normale aux parois  $y$ . Les coordonnées des points dans la direction normale aux parois sont données par

$$y_k = L_y \left( 1 + \frac{1}{a} \tanh \left[ \left( \frac{k-1}{N_y-1} - 1 \right) \tanh^{-1}(a) \right] \right) \quad (28)$$

où  $a$  est le paramètre de dilatation du maillage et  $N_y$  le nombre de points dans la direction normale aux parois. Les tailles de mailles adimensionnées sont  $\Delta_x^+ = 8,5$ ;  $\Delta_y^+ = 0,013$  à la paroi et 4,2 au centre et  $\Delta_z^+ = 4,2$ . On utilise une méthode aux différences finies. Le schéma en temps est un Runge-Kutta d'ordre 3. Un schéma centré d'ordre 4 est utilisé pour la convection de la quantité de mouvement. On utilise pour cela le code de calcul TrioCFD [15]. La séparation des échelles est réalisée numériquement à l'aide d'un filtre boîte dont la taille suit le maillage [16]. Le filtre est régulier dans les directions homogènes mais suit les variations du maillage dans la direction normale aux parois, reproduisant ainsi un maillage SGE suivant la même loi en tangente hyperbolique que le maillage SND.

#### 5. Résultats

L'importance des termes sous-mailles est estimée en fonction de la coordonnée normale à la paroi dans les formulations fondées sur le filtre classique et le filtre de Favre. L'objectif est de déterminer les termes à modéliser et les termes pouvant être négligés dans les deux formulations. La force des termes sous-mailles est estimée par comparaison de la moyenne des termes sous-mailles sur un plan parallèle aux parois à celle des termes non sous-mailles. Le calcul de cette moyenne peut être considéré suivant différentes méthodes statistiques. Nous avons choisi de présenter dans cet article les résultats obtenus avec la moyenne arithmétique  $\langle \cdot \rangle^A$ , que l'on

peut considérer comme une moyenne statistique selon l'hypothèse d'ergodicité :

$$\langle \phi \rangle^A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i \quad (29)$$

où  $N$  est le nombre total de points considéré et la moyenne quadratique  $\langle \cdot \rangle^Q$ ,

$$\langle \phi \rangle^Q = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i^2} \quad (30)$$

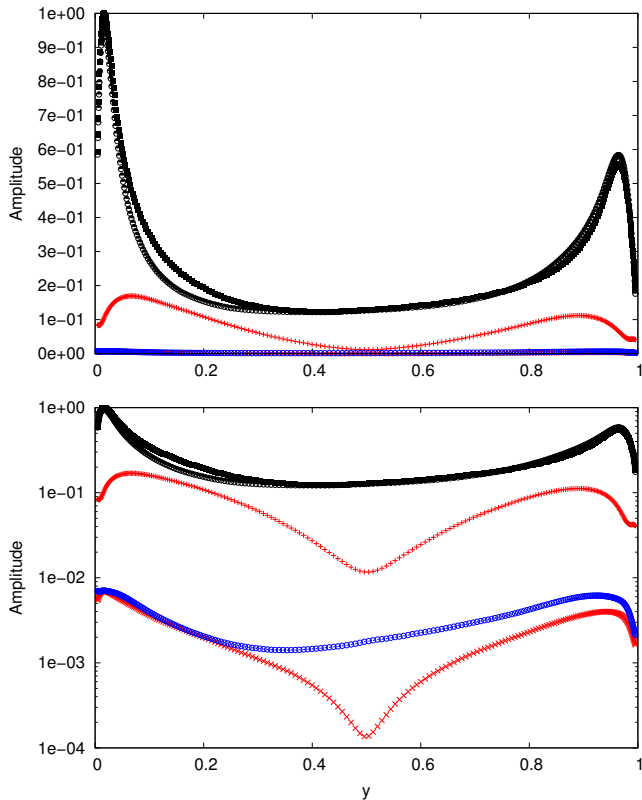
Numériquement, ces deux moyennes sont calculées par une moyenne sur les directions d'homogénéité et sur 100 pas de temps non consécutifs représentatifs de toutes les configurations thermodynamiques possibles de l'écoulement. Les résultats obtenus pour 50 pas de temps sont identiques prouvant la convergence de la moyenne calculée. On donne ici les résultats obtenus pour l'équation de conservation de l'énergie sur la figure 1 avec la moyenne quadratique et sur la figure 2 avec la moyenne arithmétique.

Si on omet la dérivée temporelle de la pression thermodynamique, peu intéressante car constante dans l'espace et de faible amplitude, l'équation de conservation de l'énergie impose l'égalité à un facteur multiplicatif près de la divergence de la vitesse et du flux de chaleur conductif. L'estimation de ces deux grandeurs à partir des champs filtrés ne permet pas une égalité parfaite en raison de la présence des termes sous-mailles. Considérons tout d'abord l'amplitude des termes avec la moyenne quadratique. Avec le filtre classique, le seul terme sous-maille significatif est l'erreur de commutation avec la dérivée associée à la divergence de la vitesse. Les deux termes sous-mailles associés au flux de chaleur conductif sont très faibles, d'un facteur d'environ 50 en deçà des termes non sous-mailles. Avec le filtre de Favre, le terme sous-maille additionnel associé au produit vitesse masse volumique apparaît avoir une amplitude très importante, de l'ordre de grandeur des termes non sous-mailles. Autrement dit, la divergence de la vitesse filtrée avec le filtre de Favre est une assez mauvaise approximation de la vraie divergence de la vitesse. Par ailleurs, la non-linéarité associée au flux de chaleur conductif a une amplitude significativement plus importante avec le filtre de Favre qu'avec le filtre classique.

Avec la moyenne arithmétique, que l'on peut considérer comme une moyenne statistique, l'amplitude de tous les termes de l'équation de conservation de l'énergie est très faible autour du centre du canal. Dans cette région en effet, la vitesse verticale moyenne et le gradient de température moyen sont presque constants [2]. La moyenne statistique n'est donc pertinente que pour évaluer l'importance des termes sous-mailles en proche paroi. Les termes sous-mailles apparaissent avoir une amplitude bien plus faible en moyenne statistique qu'en moyenne quadratique. Avec le filtre classique, aucun terme sous-maille n'apparaît significatif. Avec le filtre de Favre, le terme sous-maille associé au produit vitesse masse volumique est significatif. Son amplitude représente environ 15% de l'amplitude des termes non sous-mailles. Ces résultats suggèrent qu'une grande partie de l'amplitude instantanée des termes sous-mailles est purement fluctuante. La modélisation de ces termes n'est pas nécessaire à une description fidèle des grandeurs moyennes. Elle est en revanche importante pour les statistiques d'ordre plus élevée.

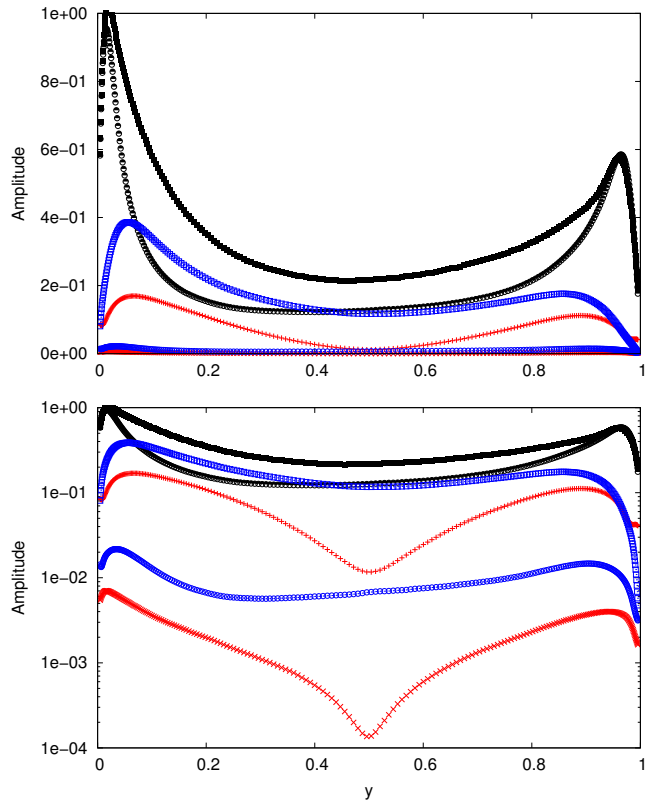
## 6. Conclusion

L'approximation de bas nombre de Mach associée à la loi des gaz parfaits conduit à une forme particulière de l'équation de conservation de l'énergie. L'importance relative des différents termes sous-mailles de cette équation est étudiée a priori à partir des données hautes



$$\begin{aligned} \partial_j \bar{U}_j &\blacksquare C_{U_j}^j + \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} \partial_j F_{Q_j} \circ \\ \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} \partial_j \bar{Q}_j &\bullet \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} C_{Q_j}^j \times \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} \partial_j F_{Q_j} \circ \end{aligned}$$

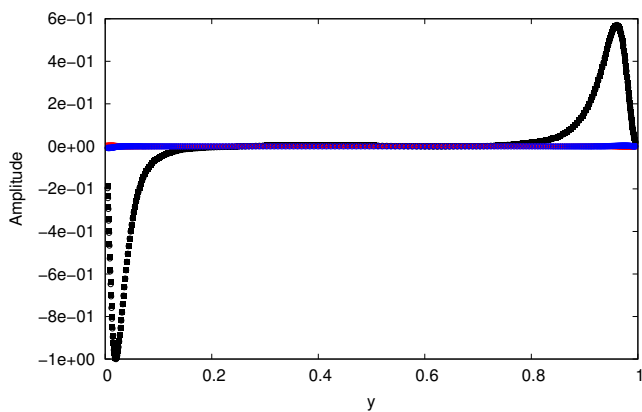
(a) Avec le filtre classique.



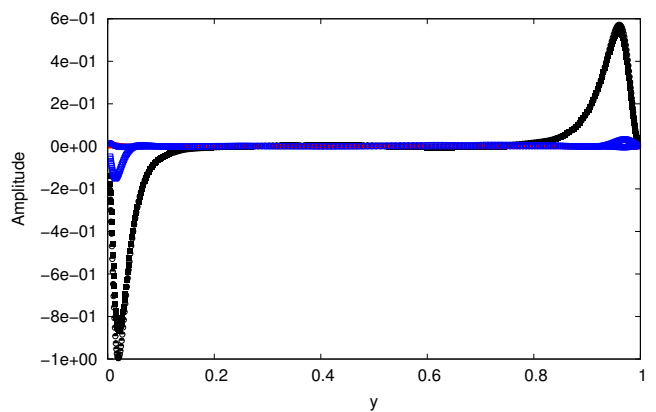
$$\begin{aligned} \partial_j \tilde{U}_j &\blacksquare C_{U_j}^j + \partial_j F_{\rho U_j} / \bar{\rho} \blacksquare \\ \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} \partial_j \tilde{Q}_j &\bullet \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} C_{Q_j}^j \times \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} \partial_j G_{Q_j} \circ \end{aligned}$$

(b) Avec le filtre de Favre.

Figure 1: Moyenne quadratique des termes de l'équation de conservation de l'énergie en fonction de la coordonnée dans la direction normale aux parois  $y$ . Les résultats sont présentés en échelle linéaire (haut) et en échelle semi-logarithmique (bas). La coordonnée normale aux parois est normalisée par la hauteur du canal et l'amplitude des termes par l'amplitude maximale sur l'ensemble des termes avec la formulation fondée sur le filtre classique.



$$\begin{aligned} \partial_j \bar{U}_j &\blacksquare C_{U_j}^j + \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} \partial_j F_{Q_j} \circ \\ \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} \partial_j \bar{Q}_j &\bullet \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} C_{Q_j}^j \times \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} \partial_j F_{Q_j} \circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \partial_j \tilde{U}_j &\blacksquare C_{U_j}^j + \partial_j F_{\rho U_j} / \bar{\rho} \blacksquare \\ \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} \partial_j \tilde{Q}_j &\bullet \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} C_{Q_j}^j \times \frac{\gamma-1}{\gamma P_0} \partial_j G_{Q_j} \circ \end{aligned}$$

Figure 2: Moyenne arithmétique (statistique) des termes de l'équation de conservation de l'énergie en fonction de la coordonnée dans la direction normale aux parois  $y$ . La coordonnée normale aux parois est normalisée par la hauteur du canal et l'amplitude des termes par l'amplitude maximale sur l'ensemble des termes avec la formulation fondée sur le filtre classique.

résolutions d'une simulation numérique directe d'un écoulement bipériodique en canal plan fortement anisotherme. L'anisotropie de la géométrie et du maillage semble nécessiter d'envisager la modélisation des erreurs de commutation filtre dérivée. Le filtre de Favre, commode pour les écoulements à propriétés variables, se révèle inapproprié pour l'équation d'énergie écrite sous la forme d'une contrainte pour la divergence de la vitesse. En effet, l'expression de l'équation de conservation de l'énergie en fonction des grandeurs filtrées pondérées par la masse volumique fait apparaître un terme sous-maille supplémentaire non-négligeable. Ce terme sous-maille est lié à la non-linéarité du produit vitesse masse volumique. La modélisation de ce terme sous-maille spécifique lié aux fortes variations des propriétés avec la température est indispensable, que ce soit avec le filtre de Favre, dans l'équation de conservation de l'énergie, ou avec le filtre classique, dans l'équation de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

## Références

- [1] S. Serra, A. Toutant, F. Bataille, Y. Zhou. High temperature gradient effect on a turbulent channel flow using Thermal Large-Eddy Simulation in physical and spectral spaces, *Journal of Turbulence* 13 (49) (2012) 1-25.
- [2] A. Toutant, F. Bataille. Turbulence statistics in a fully developed channel flow submitted to a high temperature gradient, *International Journal of Thermal Sciences* 74 (2013) 104-118.
- [3] F. Aulery, A. Toutant, Y. Zhou, F. Bataille. Energy transfer process of anisothermal wall-bounded flows, *Physics Letters A* 379 (24–25) (2015) 1520-1526.
- [4] F. Aulery, D. Dupuy, A. Toutant, F. Bataille, Y. Zhou. Spectral analysis of turbulence in anisothermal channel flows, *Computers and Fluids* (available online) doi :10.1016/j.compfluid.2016.06.011.
- [5] A. Toutant, E. Labourasse, O. Lebaigue, O. Simonin. DNS of the interaction between a deformable buoyant bubble and a spatially decaying turbulence : a priori tests for LES two-phase flows modelling, *Computers and Fluids* 37 (7) (2008) 877-886.
- [6] B. Vreman, B. Geurts, H. Kuerten. A priori tests of large eddy simulation of the compressible plane mixing layer, *Journal of Engineering Mathematics* 29 (4) (1995) 299-327.
- [7] M. P. Martin., U. Piomelli, G. V. Candler. Subgrid-scale models for compressible large-eddy simulations, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 13 (5) (2000) 361-376.
- [8] H. Lu, C. Ruthland, L. Smith, A priori tests of one-equation LES modeling of rotating turbulence, *Journal of Turbulence*, 8 (37) (2007).
- [9] N. Ghaisas, S. Frankel, A priori evaluation of large eddy simulation subgrid-scale scalar flux models in isotropic passive-scalar and anisotropic buoyancy-driven homogeneous turbulence, *Journal of Turbulence* 15 (2) (2014) 88-121
- [10] E. Garnier , N. Adams, P. Sagaut. *Large eddy simulation for compressible flows*, Springer Science & Business Media, 2009.
- [11] D. Dupuy, A. Toutant, F. Bataille, Study of the sub-grid terms of the large-eddy simulation of a low Mach strongly anisothermal channel flow. *Eurotherm Seminar 106*, Paris, France, 2016.
- [12] S. Paolucci. On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations. *Tech. Rep. SAND82-8257*, Sandia National Labs., 1982.
- [13] W. Sutherland. The viscosity of gases and molecular force. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 36 (223) (1893) 507–531.
- [14] P. Sagaut. *Large eddy simulation for incompressible flows : an introduction*, Springer Science & Business Media, 2006.
- [15] C. Calvin, O. Cueto, P. Emonot, An object-oriented approach to the design of fluid mechanics software, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 36 (05) (2002) 907–921.
- [16] M. A. Carper, F. Porté-Agel, Subfilter-scale fluxes over a surface roughness transition. Part II : A priori study of large-Eddy simulation models, *Boundary-layer meteorology* 127 (1) (2008) 73–95.

## Remerciements

Ces travaux ont bénéficié d'un accès aux moyens de calcul du CINES au travers de l'allocation de ressources 2016-c20162a5099 attribuée par GENCI (Grand Équipement National de Calcul Intensif). Nous remercions l'équipe Trio\_U du CEA pour la mise à disposition et le développement du code de calcul Trio\_U.