

Inférence bayésienne pour l'estimation simultanée des propriétés thermiques de matériaux orthotropes

Bayesian inference for simultaneous estimation thermal properties of orthotropic materials

Thomas PIERRE^{1*}, Helcio R. B. ORLANDE², Coline BOURGÈS¹, Edouard GESLAIN¹, Philippe LE MASSON¹, Julien BERGER³

¹ Univ. Bretagne Sud, UMR CNRS 6027, IRDL, F-56100 Lorient, France.

² Universidade Federal do Rio de Janeiro, Politécnica/COPPE, Cidade Universitária, 68502, Rio de Janeiro, Brazil.

³ LaSIE, UMR 7356 CNRS, La Rochelle Université, CNRS, 17000, La Rochelle, France.

* auteur correspondant : thomas.pierre@univ-ubs.fr

Résumé – Cette communication porte sur l'estimation simultanée des conductivités et de la capacité thermique de matériaux orthotropes par observation de plusieurs de ses faces à l'aide d'une seule caméra infrarouge. Les trois aspects expérimentaux, numériques et d'estimation sont abordés dont l'étude de sensibilité préalable qui discute de l'usage d'une fonctionnelle à multiples observables. Les tests d'estimation sont issus de données simulées numériques pour un matériau de type balsa. Les premiers tests expérimentaux sont présentés et discutés ouvrant la voie à une procédure d'inversion à l'aide d'un modèle direct numérique.

Abstract – This paper presents the simultaneous estimation of the conductivities and heat capacities of orthotropic materials using multiple visualizations with a single infrared camera. It develops three aspects: experimental, numerical, and estimation. The preliminary sensitivity study is about the use of a multi-observable functional. The estimation tests are based on data simulated using COMSOL Multiphysics® for a balsa-type material. The initial experimental tests are presented and discussed, paving the way for an inversion procedure using a direct numerical model.

Nomenclature

Lettres latines

c_p^m	chaleur massique, $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
e	épaisseur, m
h	coefficient d'échange, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
H	nombre de Biot modifié, m^{-1}
k	conductivité thermique, $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
ℓ	demi-longueur, m
N	norme
$\mathbf{P}$	vecteur des paramètres
q	distribution
t	temps, s
T	température, °C
U	nombre aléatoire
x, y, z	coordonnées cartésiennes

X, Y, Z fonctions propres

$\mathbf{Y}$ mesures, °C

Lettres grecques

α	ratio
β_m	valeur propre, m^{-1}
γ_n	valeur propre, m^{-1}
η_p	valeur propre, m^{-1}
θ	température, °C
ρ	masse volumique, $kg \cdot m^{-3}$
Ψ	fonction gaussienne, °C

Indices et exposants

x, y, z	direction des composantes
∞	ambiante
0	en $z = 0$

1. Introduction

La détermination de la conductivité thermique de matériaux orthotropes ou anisotropes est l'objet de nombreux travaux [1-8], principalement basés sur la méthode flash [9]. Afin d'estimer les paramètres d'intérêt que sont les conductivités, le modèle théorique représentatif de l'expérience repose sur plusieurs informations : la quantité d'énergie incidente absorbée par le matériau, les dimensions de ce dernier et la localisation de la température mesurée, ponctuelle ou moyenne. La confiance sur les paramètres d'intérêt estimés est due à celle sur ces informations. Dans le cas de matériaux orthotropes, la préparation de l'échantillon est également source d'erreur puisque les directions de propagation du flux doivent coïncider avec celles de la base orthonormée [8]. Depuis quelques années, les expériences et les modèles de type température-température sont de plus en plus utilisés car la connaissance du flux incident absorbé n'est plus nécessaire, tout comme les pertes là où la température est imposée comme données d'entrée [10]. Par conséquent, un seul instrument de mesure est suffisant, comme par exemple les travaux de Houssein *et al.* pour estimer la diffusivité thermique de métaux liquides par la visualisation simultanée avec une même caméra (associée à des optiques) des deux faces avant et arrière d'une plaque soumise à un chauffage laser [11]. Cette visualisation simultanée des faces avant et arrière est adéquate en monodirectionnel. Pour des matériaux orthotropes, le flux est bi-, voire tridirectionnel, et définir le tenseur des conductivités nécessite plusieurs expériences, car il n'y a qu'un observable. Jannot *et al.* ont développé un double fil chaud qui estime les trois conductivités avec une seule expérience [12]. Les mesures se font par thermocouple, il n'y a donc qu'une information partielle sur la répartition spatiale du flux.

Cette communication est dans la continuité de premiers travaux sur l'estimation simultanée des conductivités et de la capacité thermique de matériaux orthotropes [13]. L'originalité présentait la faisabilité de réaliser une expérience capable de visualiser simultanément à l'aide d'une seule caméra infrarouge quatre faces d'un même matériau orthotrope parallélépipédique : la face sollicitée thermiquement et trois autres faces des principales directions. Un modèle analytique 3D était développé par moyen de transformations intégrales de type Fourier dans les trois directions spatiales. Des tests d'estimation des propriétés thermiques d'un matériau quelconque étaient effectués à partir de températures simulées et bruitées par un modèle direct, communément appelés « crimes inverses ». Une première spécificité est que la fonctionnelle concernait les températures aux trois directions à la fois. Par ailleurs, la minimisation reposait sur des températures transformées selon les directions transversales (Fourier) à celle de la surface concernée. L'inférence bayésienne a été utilisée pour l'estimation. Les temps de calcul pouvant être longs avec cette méthode, un classement pondéral de chaque mode a permis d'en réduire le nombre. Cette nouvelle communication développe les trois aspects expérimentaux, numériques et d'estimation. Une étude de sensibilité est d'abord proposée afin de valider l'usage de la fonctionnelle à multiples observables. Par la suite, des tests d'estimation sont présentés à partir de données simulées *via* Comsol Multiphysics® pour un matériau de type balsa. Les avancées expérimentales sont présentées et discutées ouvrant la voie vers une méthode d'inversion à l'aide d'un modèle direct numérique.

2. Présentation de l'expérience

Le dispositif expérimental est présenté Figures 1 à 4 et sa description est déjà détaillée dans [13]. Il est composé de 9 miroirs et de 2 miroirs dichroïques. Les quatre chemins optiques ont été contrôlés par un télémètre et ont une longueur de 25 cm. L'échantillon de base $4\ell^2 = 10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ et de hauteur $e = 5 \text{ mm}$ est déposé sur un quadrillage de fils de nylon de $100 \mu\text{m}$ de diamètre. La source de chaleur est une lampe de 150 W équipée d'un diaphragme de 1 mm

de diamètre ainsi qu'une lentille qui focalise une surface de 3 mm de diamètre sur la face supérieure du matériau. La puissance de la lampe n'est pas connue.



Figure 1 : dispositif expérimental.

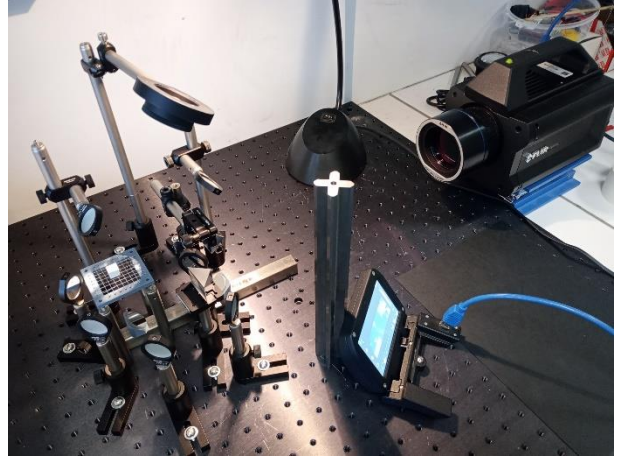


Figure 2 : dispositif expérimental.

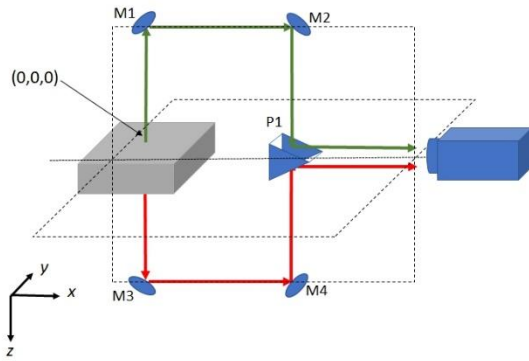


Figure 3 : Schéma du dispositif expérimental [13].

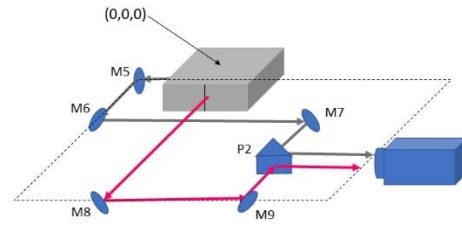


Figure 4 : Schéma du dispositif expérimental [13].

Quand le matériau est supposé thermiquement homogène, la caméra filme et enregistre les quatre faces du matériau simultanément à une fréquence à 1 Hz puis le chauffage en mis en route pour un temps d'enregistrement de 60 s jusqu'à stabilisation des températures. Les données expérimentales sont enfin converties en données Matlab le traitement.

3. Développement théorique

3.1. Modèle analytique

Les équations et conditions initiale et aux limites pour déterminer le champ de température au sein de l'échantillon orthotrope sont ici rappelées mais figurent dans [13] avec $\theta = T - T_\infty$ où T_∞ est la température ambiante :

$$k_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \rho c_p^m \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1)$$

$$\theta(x, y, z, 0) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(0, y, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$k_x \frac{\partial \theta(\ell, y, z, t)}{\partial x} + h_x \theta(\ell, y, z, t) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0, z, t)}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$k_y \frac{\partial \theta(x, \ell, z, t)}{\partial y} + h_y \theta(x, \ell, z, t) = 0 \quad (6)$$

$$T(x, y, 0, t) = f(x, y, t) \quad (7)$$

$$k_z \frac{\partial \theta(x, y, e, t)}{\partial z} + h_z \theta(x, y, e, t) = 0 \quad (8)$$

$$f(x, y, t) = [T_0(t) - T_\infty] e^{-\frac{x^2+y^2}{R^2}} \quad (9)$$

La condition limite en (7) est une température imposée $f(x, y, t)$, celle mesurée par la caméra infrarouge. Considérons une fonction de type gaussien (9) où $T_0(t)$ augmente avec le temps et R le rayon de distribution de la lampe. Une solution analytique est proposée pour T_0 constante et R exagérément grand ($\rightarrow \infty$), soit une condition de température imposée en $z = 0$. Cette solution $\ddot{\theta}(\beta_m, \gamma_n, \eta_p, t)$ du système (1)-(9) a été obtenue *via* plusieurs transformations intégrales selon les trois directions de l'espace. Chaque transformation est symbolisée : – pour celle en x , $\sim$ pour celle en y et $\cdot$ pour celle en z .

L'inversion s'effectue par comparaison entre les températures expérimentales des faces en $x = \ell$, $y = \ell$ et $z = e$ modifiées, respectivement, au moyen de transformations intégrales de type Fourier (10)-(12), et celles théoriques (13)-(15).

$$\dot{\theta}^{exp}(\ell, \gamma_n, \eta_p, t) = \int_{y=0}^{\ell} \int_{z=0}^e Y(\gamma_n, y) Z(\eta_p, z) \theta^{exp}(\ell, y, z, t) dy dz \quad (10)$$

$$\dot{\theta}^{exp}(\beta_m, \ell, \eta_p, t) = \int_{x=0}^{\ell} \int_{z=0}^e X(\beta_m, x) Z(\eta_p, z) \theta^{exp}(x, \ell, z, t) dx dz \quad (11)$$

$$\tilde{\theta}^{exp}(\beta_m, \gamma_n, e, t) = \int_{x=0}^{\ell} \int_{y=0}^{\ell} X(\beta_m, x) Y(\gamma_n, y) \theta^{exp}(x, y, e, t) dx dy \quad (12)$$

$$\dot{\theta}^{th}(\ell, \gamma_n, \eta_p, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X(\beta_m, \ell)}{N(\beta_m)} \ddot{\theta}(\beta_m, \gamma_n, \eta_p, t) \quad (13)$$

$$\dot{\theta}^{th}(\beta_m, \ell, \eta_p, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y(\gamma_n, \ell)}{N(\gamma_n)} \ddot{\theta}(\beta_m, \gamma_n, \eta_p, t) \quad (14)$$

$$\tilde{\theta}^{th}(\beta_m, \gamma_n, e, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z(\eta_p, e)}{N(\eta_p)} \ddot{\theta}(\beta_m, \gamma_n, \eta_p, t) \quad (15)$$

avec m, n et $p = 1, \dots, \infty$. Les valeurs propres, fonctions propres, normes et fonctions transcendentes nécessaires aux relations (10)-(15) sont précisées dans [14]. Le nombre

maximum des valeurs propres dans les trois directions m_{max} , n_{max} et p_{max} est fixée à 20 pour le modèle direct. m_{max} , n_{max} et p_{max}

3.2. Études de sensibilité et méthode inverse

Une étude de sensibilité est établie afin de voir l'intérêt d'utiliser une fonctionnelle à multiples observables selon les trois directions principales de propagation du flux. Pour les paramètres d'intérêt $\mathbf{P} = [k_x, k_y, k_z, \rho c_m^p]^T$, les trois sensibilités réduites suivantes sont tracées en Figures 5 :

$$\chi_i = P_i \frac{\partial \dot{\theta}^{th}(\ell, \gamma_n, \eta_p, t)}{\partial P_i} \quad (16)$$

$$\chi_i = P_i \frac{\partial \dot{\theta}^{th}(\beta_m, \ell, \eta_p, t)}{\partial P_i} \quad (17)$$

$$\chi_i = P_i \frac{\partial \tilde{\theta}^{th}(\beta_m, \gamma_n, e, t)}{\partial P_i} \quad (18)$$

La Figure 5 trace les différentes évolutions des relations (16) à (18) en fonction du temps. Les observations sont les suivantes :

- Face $x0y$ inférieure $[0, 0, e]$: k_x et k_y sont corrélées ; k_z et ρc_m^p sont décorrélées et peuvent être estimées.
- Plan $x0z$ $[0, \ell, e/2]$: k_y et k_z sont corrélées ; k_x et ρc_m^p sont décorrélées et peuvent être estimées.
- Plan $y0z$ $[\ell, 0, e/2]$: k_x et k_z sont corrélées ; k_y et ρc_m^p sont décorrélées et peuvent être estimées.

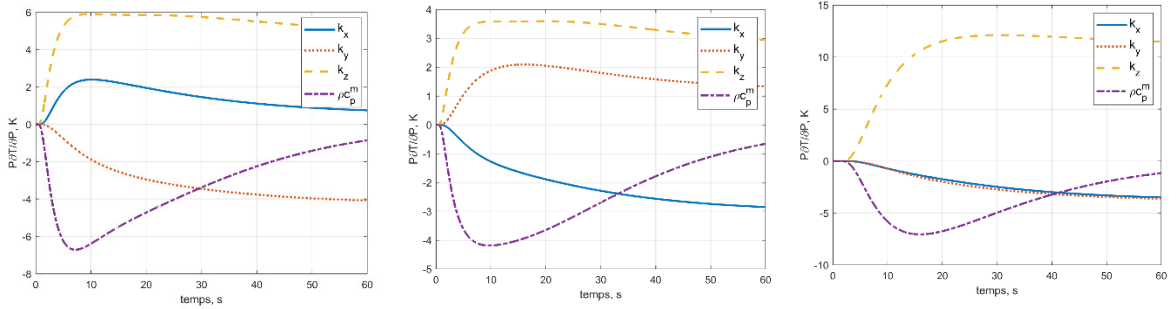


Figure 5 : Courbes de sensibilités aux paramètres d'intérêt au centre des trois faces en $x = \ell$, $y = \ell$ et $z = e$.

L'étude de sensibilité montre donc que tous les paramètres peuvent être estimés à l'aide d'une fonctionnelle multiple du type bayésien :

$$\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\dot{\theta}^{exp} - \dot{\theta}^{th}(\mathbf{P}) \right]^T \dot{\mathbf{\Omega}}^{-1} \left[\dot{\theta}^{exp} - \dot{\theta}^{th}(\mathbf{P}) \right] \dots \right. \\ \left. -\frac{1}{2} \left[\tilde{\theta}^{exp} - \tilde{\theta}^{th}(\mathbf{P}) \right]^T \tilde{\mathbf{\Omega}}^{-1} \left[\tilde{\theta}^{exp} - \tilde{\theta}^{th}(\mathbf{P}) \right] \dots \right. \\ \left. -\frac{1}{2} \left[\tilde{\tilde{\theta}}^{exp} - \tilde{\tilde{\theta}}^{th}(\mathbf{P}) \right]^T \tilde{\tilde{\mathbf{\Omega}}}^{-1} \left[\tilde{\tilde{\theta}}^{exp} - \tilde{\tilde{\theta}}^{th}(\mathbf{P}) \right] \right\} \quad (19)$$

$$\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) \propto \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}) \pi(\mathbf{P}) \quad (20)$$

$$\pi(\mathbf{P}) \propto \pi(k_x)\pi(k_y)\pi(k_z)\pi(\rho c_m^p) \quad (21)$$

$$\pi(k_x) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}[k_x - k_x^*]^T \Omega_{k_x}^{-1}[k_x - \bar{k}_x]\right\} \quad (22)$$

$$k_x = \mathcal{N}(\bar{k}_x, \sigma_{k_x}) \quad (23)$$

où la relation (20) est la loi de Bayes avec $\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$ la probabilité *a posteriori*, $\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$ la fonction de vraisemblance, $\pi(\mathbf{P})$ les *a priori* sur les paramètres d'intérêt à estimer de type gaussien (21)-(22) et Ω la matrice de covariance sur les données expérimentales.

4. Résultats et discussion

4.1. Estimation sur simulation numérique

Une estimation de paramètre a été effectuée à partir de données générées numériquement par le logiciel d'éléments finis Comsol Multiphysics®. La géométrie et les conditions initiale et limites sont strictement celles présentées du système (1)-(9). Le maillage est imposé régulier et carré avec une résolution de 200 μm /pixel (Figure 10). Le rayon R est imposé à 20 cm et $T_0 - T_\infty$ à 40 °C. Les propriétés sont celles du balsa : $k_x = k_z = 0,050 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $k_y = 0,100 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $\rho c_m^p = 140\,000 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$. La Figure 11 présente le champ de température à $t = 60 \text{ s}$ (1 Hz).

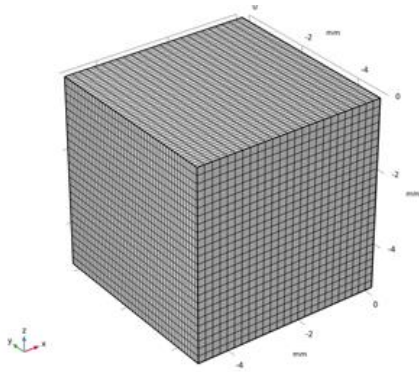


Figure 10 : maillage carré de résolution 200 μm .

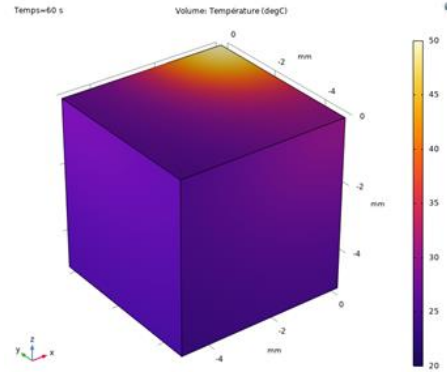


Figure 11 : champ de température à $t = 60 \text{ s}$.

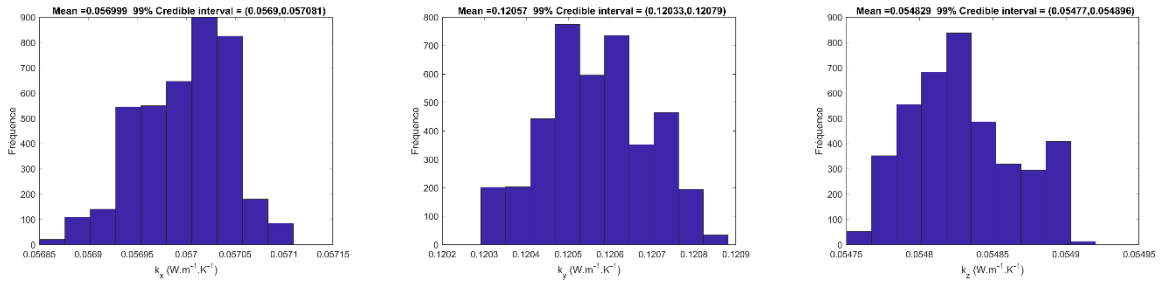


Figure 11 : Conductivités estimées à partir de données simulées par Comsol Multiphysics®.

La procédure bayésienne étant coûteuse en temps, plusieurs estimations ont été effectuées pour : $m_{max} = 2, 4, 6$; $n_{max} = 2, 4, 6$; $p_{max} = 2, 6, 10$ (tout n'est pas présenté). Pour un nombre d'états fixé à 20 000, la durée de l'estimation (9 heures pour la plus longue) baisse logiquement avec le nombre de valeurs propres, mais les résultats d'estimation sont disparates. Pour le temps le plus court (45 minutes), la meilleure combinaison est $m_{max} = 6$;

$n_{max} = 6$; $p_{max} = 10$ (Figure 11). Finalement, les valeurs des paramètres estimés sont $k_x = (0,057 \pm 0,001) \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (14 %), $k_y = (0,121 \pm 0,001) \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (21 %), $k_z = (0,055 \pm 0,001) \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (10 %) et $\rho c_m^p = (154\,790 \pm 117) \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}$ (7 %).

4.2. Résultats expérimentaux

En parallèle, les développements expérimentaux ont permis de réaliser les premiers tests de faisabilité, comme le montre la Figure 12. Le nombre de pixels pour chaque côté est différent par rapport à la simulation (25 pixels), il est compris entre 28 et 32 pixels et la résolution passe à $310 \mu\text{m}/\text{pixel}$. La caméra infrarouge enregistre l'évolution au cours du temps les champs d'isoluminance (DL). La Figure 13 représente les champs d'isoluminance pour les quatre faces à $t = 60 \text{ s}$. Il est à noter que l'élévation de température maximale au centre de la face chauffée est de l'ordre de 35°C , c'est-à-dire non loin de celle imposée par la simulation (40°C).

Enfin, on remarque que les conductivités sont du type $k_x = k_z < k_y$, puisque le flux a tendance à plus se dissiper dans le plan xOz que par rapport aux deux autres directions. L'orthotropie est donc clairement visualisable dans le cas du balsa.

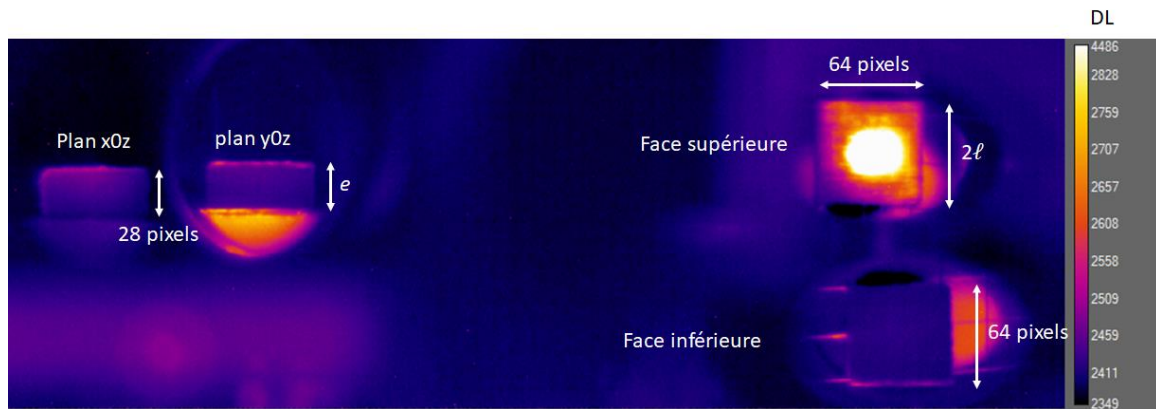


Figure 12 : image infrarouge des quatre faces à $t = 60 \text{ s}$.

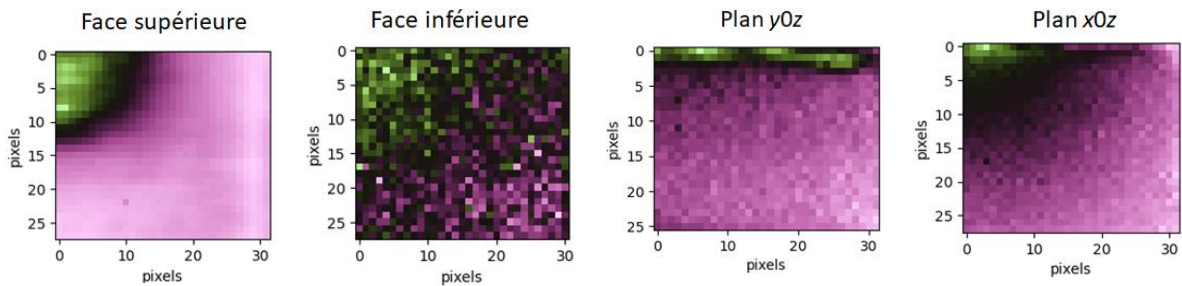


Figure 13 : Champs de température pour les quatre faces. Attention, les échelles d'une figure à l'autre ne sont pas respectées.

5. Conclusion

Cette étude poursuit les estimations des conductivités de matériaux orthotropes *via* une expérience qui visualise simultanément quatre faces d'un échantillon parallélépipédique. Dans cette nouvelle communication, une étude de sensibilité montre l'intérêt d'avoir une fonctionnelle à multiples observables (un par face) pour estimer convenablement les trois conductivités ainsi que la capacité thermique. Une estimation des conductivités thermiques a été réalisée à partir de données générées numériquement et a montré des résultats satisfaisants pour un modèle direct d'estimation qui limite le nombre de valeurs propres dans le but de gagner en temps de calcul. Néanmoins la faisabilité expérimentale a été présentée avec des résultats en

termes de température et d'observation de diffusion de la chaleur cohérents pour un matériau de type balsa. La méthode inverse étant basée sur l'inférence bayésienne, qui est très coûteuse en temps de calcul, il est envisagé de réduire le nombre de valeurs propres dans le modèle d'inversion, comme cela a montré être opportun dans le cas de crimes inverses où seulement deux termes étaient suffisants.

Références

- [1] Lachi, M., et A. Degiovanni. « Détermination des diffusivités thermiques des matériaux anisotropes par méthode flash bidirectionnelle ». *Journal de Physique III*, vol. 1, n° 12, décembre 1991, p. 2027-46. jp3.journaldephysique.org.
- [2] Philippi, I., Batsale, J. C., Maillet, D., & Degiovanni, A. (1995). Measurement of thermal diffusivities through processing of infrared images. *Review of scientific instruments*, 66(1), 182-192.
- [3] Griesinger, A., et al. « A photothermal method with step heating for measuring the thermal diffusivity of anisotropic solids ». *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 40, n° 13, septembre 1997, p. 3049-58. *ScienceDirect*.
- [4] Salazar, Agustin, et al. « Photothermal characterization of anisotropic materials with buried principal axes ». *Optical Engineering*, vol. 36, n° 2, février 1997, p. 391-99.
- [5] Knupp, Diego C., et al. « Space-Variable Thermophysical Properties Identification in Nanocomposites via Integral Transforms, Bayesian Inference and Infrared Thermography ». *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 20, n° 5, juillet 2012, p. 609-37..
- [6] Souhar, Youssef, et al. « Thermal Characterization of Anisotropic Materials at High Temperature Through Integral Methods and Localized Pulsed Technique ». *International Journal of Thermophysics*, vol. 34, n° 2, février 2013, p. 322-40. *Springer Link*.
- [7] Abreu, Luiz A. S., et al. « Detection of contact failures with the Markov chain Monte Carlo method by using integral transformed measurements ». *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 132, octobre 2018, p. 486-97. *ScienceDirect*.
- [8] Tarasovs, Sergejs, et Andrey Aniskevich. « Identification of the anisotropic thermal conductivity by an inverse solution using the transient plane source method ». *Measurement*, vol. 206, janvier 2023, p. 112252. *ScienceDirect*.
- [9] Parker, W. J., Jenkins, R. J., Butler, C. P., & Abbott, G. L. (1961). Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity. *Journal of applied physics*, 32(9), 1679-1684.
- [10] Maillet, Denis, et al. « Analysis of the estimation error in a parsimonious temperature-temperature characterization technique ». *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 62, juillet 2013, p. 230-41. *ScienceDirect*, <https://doi.org/10.1016/j.jheatmasstransfer.2013.02.055>.
- [11] Houssein, Jad, et al. « A novel apparatus dedicated to the estimation of the thermal diffusivity of metals at high temperature ». *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 191, septembre 2023, p. 108359. *ScienceDirect*.
- [12] Jannot, Yves, et al. « Apparent thermal conductivity measurement of anisotropic insulating materials at high temperature by the parallel hot-wire method ». *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 160, février 2021, p. 106672. *ScienceDirect*, <https://doi.org/10.1016/j.jthermalsci.2020.106672>.
- [13] Thomas Pierre, Helcio R. B. Orlande, Philippe Le Masson, Coline Bourges, Edouard Geslain, Julien Berger, *Pour une estimation simultanée des conductivités de matériaux orthotropes par thermographie*, Actes du congrès de thermique SFT, Chambéry, 3 – 6 juin 2025.
- [14] D. Maillet, S. André, J.-C. Batsale, A. Degiovanni, C. Moyne, *Thermal quadrupoles, Solving the heat equation through integral transforms*, John Wiley & Sons, Ltd., New-York, 2000.