

Identification des paramètres thermo-dépendants et orthotropes pour un isolant thermique par modèle réduit

Jianan Ni*, Frédéric Joly, Yassine Rouizi, Olivier Quéméner

Université d'Evry, Université Paris Saclay, Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry
40 rue du Pelvoux, 91020 Évry-Courcouronnes, France

*jianan.ni@univ-evry.fr

1. Résumé en français

On présente ici une procédure d'identification des propriétés d'isolants thermiques à partir d'une seule expérience virtuelle, à partir de laquelle on recherche à la fois la capacité thermique constante, et la conductivité thermique, considérée soit comme anisotrope soit comme thermo-dépendante. On s'affranchit par ailleurs de la connaissance des conditions aux limites, puisque le coefficient d'échange convectif, généralement mal connu, est également identifié. La procédure inverse, qui utilise la technique de région de confiance, s'appuie sur l'utilisation d'un unique modèle réduit de type modal quel que soit le scénario considéré, et pour une géométrie tri-dimensionnelle quelconque. Les résultats montrent qu'un modèle simplifié permet de simuler l'ensemble des configurations avec un rapport précision/temps de calcul satisfaisant.

2. INTRODUCTION

La mesure des propriétés thermophysiques reste un sujet qui fait toujours l'objet de travaux pour les matériaux qui présentent un comportement complexe (dépendance en température ou anisotropies) [1]. Pour de telles configurations, les solutions analytiques deviennent insuffisantes et le recours au calcul numérique s'impose mais le coût de calcul peut toutefois être incompatible avec les méthodes inverses. L'utilisation de modèles réduits constitue alors une alternative efficace. Ils permettent une forte diminution des degrés de liberté tout en conservant la géométrie essentielle [2] [3]. Par ailleurs la détermination et la maîtrise des conditions aux limites restent délicates, notamment pour les flux convectifs, ce qui complexifie les dispositifs expérimentaux. L'objectif de cette étude est donc d'exploiter les modèles numériques, ainsi que leurs formulations réduites, afin d'identifier les propriétés thermiques tout en réduisant les contraintes expérimentales, qu'il s'agisse de la géométrie ou des conditions convectives imposées en surface. Deux familles de matériaux sont examinées : les matériaux orthotropes et ceux à conductivité dépendante de la température.

3. Problème physique

La configuration physique est présentée à la Figure 1. Un échantillon de forme arbitraire (ici, un parallélépipède comportant un angle arrondi) est placé dans un environnement dont le coefficient d'échange thermique h_∞ est inconnu et dont la température est fixée à $T_\infty = 20^\circ C$. Deux éléments chauffants (Γ_1 et Γ_2) sont appliqués sur deux plans orthogonaux et fournissent respectivement les flux φ_1 et φ_2 , dont l'évolution temporelle est représentée sur la Figure 2. Sur la face arrière Γ_3 , un refroidissement est imposé à l'aide d'un dispositif à eau, avec $h_w = 1000 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ et $T_w = 10^\circ C$.

À partir d'une température initiale égale à $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, le problème est décrit par l'ensemble des équations (1). L'objectif de cette étude est d'identifier la capacité thermique c_0 , supposée constante, ainsi que la conductivité thermique κ , considérée soit orthotrope, soit dépendante de la température. Compte tenu de la difficulté à connaître le coefficient d'échange h_∞ , celui-ci est également identifié.

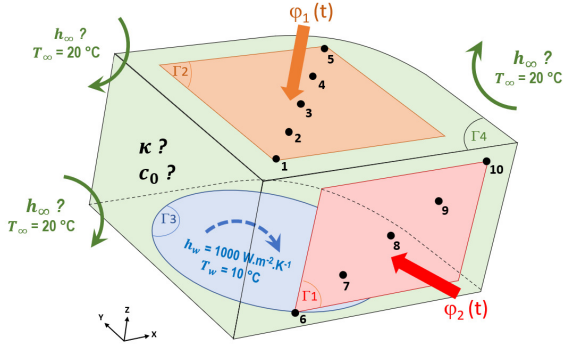


Figure 1 : Géométrie et conditions thermiques retenues pour l'étude.

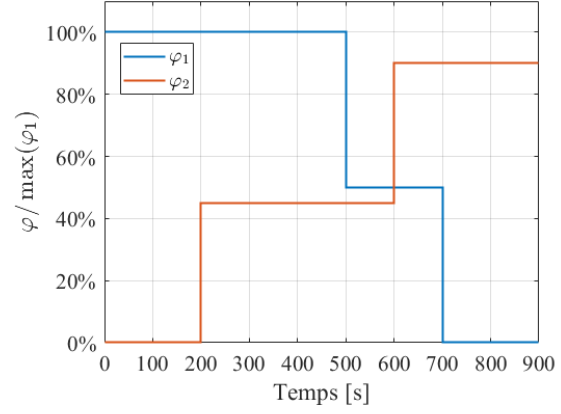


Figure 2 : Evolution temporelle du flux thermique.

$$\begin{aligned}
 \Omega : \quad & c_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} T) \\
 \Gamma_1 : \quad & \kappa \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi_1 & \Gamma_3 : \quad & \kappa \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h_w (T_w - T) \\
 \Gamma_2 : \quad & \kappa \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi_2 & \Gamma_4 : \quad & \kappa \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h_\infty (T_\infty - T)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dans ce problème, deux configurations sont étudiées :

3.1. Conductivité orthotrope constante

Le matériau est constitué de fibres orientées dans le plan (x, y) ; la conductivité thermique est donc identique selon ces deux directions, notée κ_x , tandis que la conductivité dans la direction normale au plan κ_z , est différente.

En utilisant l'équation (1) et une discrétisation spatiale par éléments tétraédriques, on obtient l'équation (2) sous forme matricielle.

$$c_0 \mathbf{C} \frac{\partial T}{\partial t} = - [\kappa_x (\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_y) + \kappa_z \mathbf{K}_z + h_\infty \mathbf{H}_\infty + \mathbf{H}_w] T + h_\infty U_\infty + U_{w,\varphi_1,\varphi_2} \tag{2}$$

Les matrices $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}_w$, $\mathbf{H}_\infty$ ainsi que $\mathbf{K}_x$, $\mathbf{K}_y$ et $\mathbf{K}_z$ (et, pour la conductivité thermo-dépendante, les matrices $\mathbf{K}_0$ et $\mathbf{K}_1$) sont des matrices creuses de dimension $[N \times N]$. Les termes U_∞ et $U_{w,\varphi_1,\varphi_2}$ sont des vecteurs de sollicitations thermiques de dimension $[N \times 1]$, avec $N = 33311$, où N est le nombre de degrés de liberté associé à la discrétisation spatiale.

Le Tableau 1 récapitule les différents matériaux isolants orthotropes étudiés dans cet article. Il convient de noter que les trois premiers matériaux sont isotropes. Par souci de clarté, nous les désignerons dans la suite par Polystyrène simplifié, Verre cellulaire simplifié et Polyuréthane simplifié. Cette isotropie n'est pas prise en compte dans la procédure d'identification, puisque l'on cherchera à identifier κ_x et κ_z .

Tableau 1 : Matériaux isolants orthotropes : propriétés et sollicitations thermiques

Étude de cas	κ_x [mW.m ⁻¹ .K ⁻¹]	κ_z [mW.m ⁻¹ .K ⁻¹]	c_0 [kJ.m ⁻³ .K ⁻¹]	h_∞ [W.m ⁻² .K ⁻¹]	$\max(\varphi_1)$ [W.m ⁻²]
1 Polystyrène (simplifié)	33,0	33,0	43,10	8	75
2 Verre cellulaire (simplifié)	40,4	40,4	70,60	10	250
3 Polyuréthane (simplifié)	27,6	27,6	38,84	15	100
4 Laine de roche	50,0	40,0	123,60	12	400
5 Fibres céramiques	80,0	50,0	110,00	18	450

3.2. Conductivité isotrope thermo-dépendante

Par hypothèse, la conductivité thermique est une fonction de la température selon une loi linéaire :

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 T \quad (3)$$

Après discrétisation spatiale, on obtient l'équation (4).

$$c_0 \mathbf{C} \frac{\partial T}{\partial t} = - [\kappa_0 \mathbf{K}_0 + \kappa_1 \mathbf{K}_1(T) + h_\infty \mathbf{H}_\infty + \mathbf{H}_w] T + h_\infty U_\infty + U_{w,\varphi_1,\varphi_2} \quad (4)$$

Nous sélectionnons de nouveau les trois premiers matériaux du Tableau 1, dont la conductivité est isotrope, en considérant cette fois son caractère thermo-dépendant. Les différents cas sont présentés dans le Tableau 2.

Tableau 2 : Matériaux isolants thermo-dépendants : propriétés et sollicitations thermiques.

Étude de cas	κ_0 [mW.m ⁻¹ .K ⁻¹]	κ_1 [mW.m ⁻¹ .K ⁻²]	c_0 [kJ.m ⁻³ .K ⁻¹]	h_∞ [W.m ⁻² .K ⁻¹]	$\max(\varphi_1)$ [W.m ⁻²]
6 Polystyrène	28,5	0,112	43,10	8	75
7 Verre cellulaire	34,1	0,158	70,60	13	250
8 Polyuréthane	21,3	0,158	38,84	18	100

L'utilisation d'une formulation par éléments finis dans une procédure d'identification itérative implique, d'une part, des temps de calcul élevés et, d'autre part, dans le cas d'une conductivité thermo-dépendante, la nécessité de reconstruire la matrice $\mathbf{K}_1(T)$ à chaque itération de l'identification. Pour ces raisons, les relations (2) et (4) sont remplacées par une formulation modale réduite. L'objectif est de définir un modèle réduit unique pour l'ensemble de ces configurations.

4. Modèle réduit modal

Dans une formulation modale réduite, le champ de température est approché par une combinaison linéaire des modes $\tilde{V}_i$, qui constituent la base du modèle :

$$T(M, t) \approx \tilde{T}(M, t) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} x_i(t) \tilde{V}_i(M) \quad (5)$$

où le nombre de modes conservés $\tilde{N}$ reste très faible par rapport au nombre de nœuds du modèle maillé ($\tilde{N} \ll N$). Les modes étant connus, les inconnues deviennent alors les amplitudes d'excitation $x_i(t)$.

4.1. Calcul des bases réduites

Parmi les différentes méthodes, la méthode AROMM a été retenue. Sans entrer dans des détails que l'on peut trouver dans des travaux récents [2], [3], il est important de comprendre que cette base réduite est construite à partir :

- de la résolution de problèmes aux valeurs propres qui permettent l'obtention d'une base dite complète (de dimension N) et calculée à partir d'un jeu de paramètres physiques fixes (ici $\kappa_x = 30 \text{ mW.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\kappa_z = 50 \text{ mW.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $c_0 = 60 \text{ MJ.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$),
- de la concaténation des modes de cette base complète en un nombre très réduit de modes amalgamés obtenus à partir d'un ensemble de simulations linéaires qui couvrent les différents intervalles des paramètres c_0 , κ_x , κ_z et h_∞ , en utilisant 16 scénarios obtenus à partir de valeurs extrêmes définies dans la Table 3. Le temps de calcul total pour la réduction de la base est de 1125 s. On obtient finalement une base réduite composée de $\tilde{N} = 200$ modes.

Tableau 3 : Paramètres choisis pour les cas de référence dans la procédure d'amalgame

Paramètres	Valeur minimale	Valeur maximale
κ_x [$\text{mW.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$]	20	50
κ_z [$\text{mW.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$]	20	50
c_0 [$\text{kJ.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$]	30	120
h_∞ [$\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$]	8	20
φ_1 [W.m^{-2}]	0	50
φ_2 [W.m^{-2}]	0	50

4.2. Équations d'état

Les états d'excitation $x_i(t)$ (regroupés dans le vecteur $X(t)$) sont déterminés à partir de l'équation d'état, obtenue en remplaçant la température T par sa formulation modale (Eq. (5)) dans le problème numérique considéré (Eq. (2) pour une conductivité orthotrope constante, et Eq. (4) pour une conductivité isotrope thermo-dépendante), puis en utilisant les modes réduits comme fonctions de test.

L'équation obtenue peut alors s'écrire sous forme matricielle :

- Conductivité orthotrope constante :

$$c_0 \mathbf{C}^R \frac{\partial X}{\partial t} = - [\kappa_x (\mathbf{K}_x^R + \mathbf{K}_y^R) + \kappa_z \mathbf{K}_z^R + h_\infty \mathbf{H}_\infty^R + \mathbf{H}_w^R] X + h_\infty U_\infty^R + U_{w,\varphi_1,\varphi_2}^R \quad (6)$$

- Conductivité isotrope thermo-dépendante :

$$c_0 \mathbf{C}^R \frac{\partial X}{\partial t} = - [\kappa_0 \mathbf{K}_0^R + \kappa_1 \mathbf{K}_1^R(T) + h_\infty \mathbf{H}_\infty^R + \mathbf{H}_w^R] X + h_\infty U_\infty^R + U_{w,\varphi_1,\varphi_2}^R \quad (7)$$

Ces matrices sont de dimension $[\tilde{N} \times \tilde{N}]$. C'est précisément à ce niveau que se situe la réduction.

Dans le cas de la conductivité thermo-dépendante, la matrice $\mathbf{K}_1^R(T)$ est calculée numériquement en remplaçant la température par sa décomposition modale dans la matrice réduite $\mathbf{K}_1$:

$$\mathbf{K}_1^R(i, j) = \int_\Omega T \vec{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_j \approx \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \int_\Omega x_k \tilde{V}_k \vec{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_j \approx \sum_{k=1}^{\tilde{N}} x_k \mathbf{K}_{1,k}^R(i, j) \quad (8)$$

Chacune de ces $\tilde{N}$ matrices $\mathbf{K}_{1,k}^R$ peut ainsi être calculée une fois pour toutes lors d'une phase hors-ligne, et la formulation (7) devient alors :

$$c_0 \mathbf{C}^R \frac{\partial X}{\partial t} = - \left[\kappa_0 \mathbf{K}_0^R + \kappa_1 \left(\sum_{k=1}^{\tilde{N}} x_k(t) \mathbf{K}_{1,k}^R \right) + h_\infty \mathbf{H}_\infty^R + \mathbf{H}_w^R \right] X + h_\infty U_\infty^R + U_{w,\varphi_1,\varphi_2}^R \quad (9)$$

Ainsi, les équations d'état (6) et (9) font apparaître explicitement les paramètres inconnus c_0 , h_∞ , κ_x et κ_z (ou κ_0 et κ_1), et peuvent alors être utilisées directement dans un problème inverse.

4.3. Validation du modèle réduit par simulation directe

Les deux modèles réduits (6) et (9), construits à partir de la base réduite unique, sont testés pour les différentes configurations présentées dans les Tables 1 et 2. En ne considérant que les température $T_i(t)$ aux 10 points de mesure (indiqués sur la Figure 1), et sur une durée de simulation $\tau = 900 \text{ s}$, on obtient des résultats très satisfaisant, puisque pour l'ensemble des cas testés, les erreurs moyennes $\bar{\varepsilon}$ sont inférieures à 0,2%, et les erreurs maximales ne dépassent pas 2%. La Figure 3 présente les évolutions de température pour le polystyrène et le verre cellulaire dans le cas d'une conductivité thermo-dépendante, pour les points 3 et 8, situés au centre des surfaces chauffantes Γ_1 et Γ_2 (voir Figure 1). Les écarts entre le modèle éléments finis et le modèle modal réduit y apparaissent très faibles. Les erreurs atteignent leur maximum à chaque variation de puissance dissipée $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$; cela illustre la limite du modèle réduit à reproduire les variations temporelles rapides.

En termes de temps de calcul, les gains sont significatifs par rapport à une simulation éléments finis complète : pour les problèmes à conductivité orthotrope constante, le gain est de l'ordre de 47, et pour les configurations à conductivité isotrope thermo-dépendante, il atteint 100.

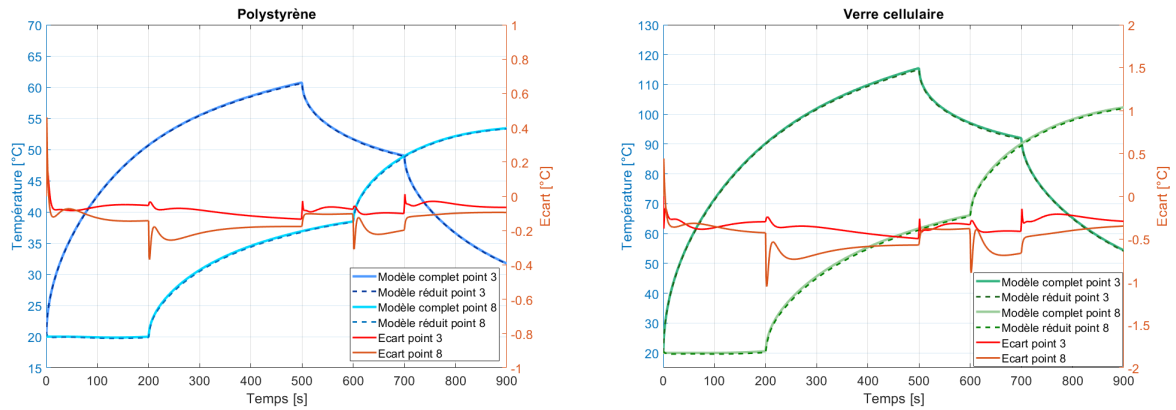


Figure 3 : Comparaison entre le modèle réduit et le modèle éléments finis

5. Problème inverse

5.1. Principe

Les différents paramètres à identifier sont regroupés dans le vecteur $\beta = [\kappa_x, \kappa_z, c_0, h_\infty]$ ou $\beta = [\kappa_0, \kappa_1, c_0, h_\infty]$. L'identification est effectuée à partir des N_{cap} capteurs de température, répartis régulièrement sur les surfaces Γ_1 et Γ_2 (voir Figure 1), et dont les mesures sont rassemblées dans le vecteur $Y(t)$, ainsi que dans son équivalent numérique $\hat{Y}(t)$. Ce dernier est

relié au vecteur de température par une matrice d'observation $\mathbf{E}$:

$$\hat{Y}(t) = \mathbf{E}T(t) = \mathbf{E} \mathbf{V} X(t) \quad (10)$$

Le processus d'identification itératif repose sur la minimisation d'un critère quadratique basé sur la différence entre les $N_{\Delta t}$ mesures discrètes Y à des intervalles de temps réguliers $\Delta t = 1 \text{ s}$ pour tous les capteurs, et le résultat de la simulation $\hat{Y}$ effectuée par le modèle réduit (équations (6) ou (9)) pour l'ensemble des paramètres estimés β à chaque itération :

$$J = \sum_{i=1}^{N_{cap}} \sum_{j=1}^{N_{\Delta t}} \left(Y_{i,j} - \hat{Y}_{i,j}(\beta) \right)^2 \quad (11)$$

Cette procédure de minimisation utilise une méthode de programmation non linéaire fondée sur un algorithme à région de confiance (disponible dans Matlab®, via la fonction lsqcurvefit). Cet algorithme appartient à la famille des méthodes à direction de descente : à chaque itération, un déplacement est déterminé en minimisant un modèle simplifié de la fonction (par exemple quadratique) à l'intérieur d'une région de confiance, ajustée de manière à garantir une diminution de la fonction à chaque pas [4].

5.2. Résultat

5.2.1. Matériau orthotrope

On réalise l'identification pour les configurations présentées dans le Tableau 1. Dans cette étude, les mesures sont simulées à l'aide du modèle éléments finis décrit par l'Éq. (2), c'est-à-dire sans prise en compte du caractère thermo-dépendant. Un bruit de mesure gaussien centré, de variance nulle et d'écart type $\sigma_b = 0,5^\circ\text{C}$, est ajouté aux résultats de simulation.

L'ensemble des résultats présenté Table 4 est excellent : les conductivités et les capacités thermiques sont identifiées avec une incertitude inférieure ou égale à 2,2%. L'erreur relativement importante observée pour h_∞ dans le cas du polyuréthane provient de sa faible sensibilité, ce qui rend le problème inverse mal conditionné vis-à-vis de ce paramètre. Néanmoins, ce comportement ne constitue pas une limitation pour l'objectif de caractérisation des matériaux isolants, puisqu'une simple estimation de l'ordre de grandeur de h_∞ suffit à reproduire correctement les évolutions de température aux points de mesure.

Tableau 4 : Matériaux isolants orthotropes : Précision de l'identification

Etude de cas		ε_{κ_x} [%]	ε_{κ_z} [%]	ε_{c_0} [%]	ε_{h_∞} [%]	Temps Cpu [s]
1	Polystyrène (simplifié)	-0,13	-0,85	0,73	1,70	6,3
2	Verre cellulaire (simplifié)	-0,38	-1,60	1,32	-0,10	4,2
3	Polyuréthane (simplifié)	-0,41	-1,45	2,20	6,25	5,6
4	Laine de roche	-0,78	-2,01	1,86	-1,01	8,0
5	Fibres céramiques	-0,38	-1,98	1,88	0,37	5,9

5.2.2. Matériau thermo-dépendant

On procède maintenant à l'identification des configurations présentées dans le tableau 2. Les mesures sont simulées à l'aide du modèle par éléments finis donné par l'Eq. (4), auquel on ajoute le même bruit gaussien, avec $\sigma_b = 0,5^\circ\text{C}$.

Les résultats de l'identification des paramètres sont présentés dans le tableau 5. Ces résultats sont moins précis que dans le cas précédent. Si la capacité c_0 et le terme constant κ_0 de la conductivité sont déterminés de manière satisfaisante, le terme affine κ_1 est affecté par une erreur beaucoup plus importante. Le coefficient de transfert thermique h_∞ présente des écarts plus élevés, ce qui reste cohérent avec la faible sensibilité mentionnée précédemment. Il convient de souligner que les résultats obtenus pour le polyuréthane (cas 8) sont moins précis que ceux obtenus pour les autres matériaux, en raison à la fois de ses erreurs moyennes de température plus importantes et de sa moindre sensibilité, ce qui réduit la robustesse de l'inversion.

En termes de temps de calcul, il est important de noter que l'identification des caractéristiques d'une configuration où la conductivité dépend de la température est nettement plus gourmande en ressources de calcul que lorsque ce paramètre est constant et orthotrope. Cela montre l'intérêt du modèle réduit, une identification classique demandant plusieurs jours de calcul.

Tableau 5 : Matériaux isolants dépendant de la température : Précision de l'identification

Etude de cas	ε_{κ_0} [%]	ε_{κ_1} [%]	ε_{c_0} [%]	ε_{h_∞} [%]	Temps Cpu [s]
6 Polystyrène	0,37	-7,62	0,62	2,30	1611,4
7 Verre cellulaire	0,56	-7,86	1,32	3,10	1809,1
8 Polyuréthane	2,96	-13,73	2,45	9,45	2592,6

Pour quantifier l'influence de l'identification du coefficient κ_1 , la figure 4 présente les différentes conductivités considérées pour les trois isolants étudiés, en fonction de leur domaine d'application. Il apparaît clairement que, si l'erreur d'identification du terme affine κ_1 a une influence notable sur la valeur globale de la conductivité, cette dernière reste nettement plus précise qu'avec une conductivité constante.

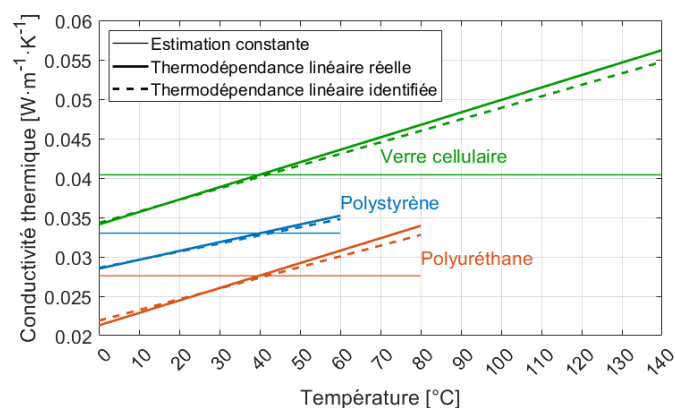


Figure 4 : Ensemble des conductivités thermiques considérées

La figure 5 présente ensuite l'évolution de la température aux points de mesure 3 et 8 (c'est-à-dire au centre de chaque surface chauffante Γ_1 et Γ_2), pour les trois types de représentation de la conductivité thermique. On constate que même une identification imprécise de la dépendance de la conductivité à la température donne des résultats de variation de température très proches de la réalité, ce qu'une conductivité constante ne permet pas (sauf dans le cas du polystyrène, dont le domaine d'application en termes de plage de températures reste limité).

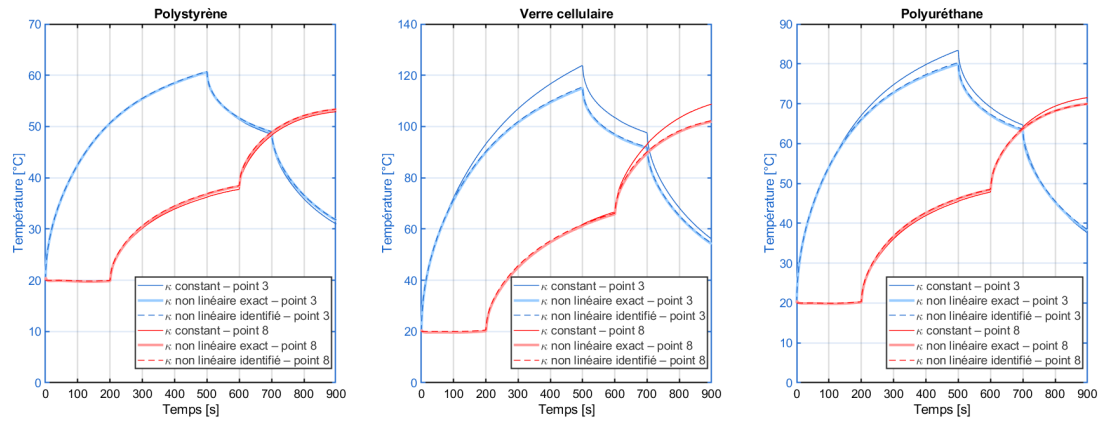


Figure 5 : Influence de la conductivité thermique thermo-dépendante

6. CONCLUSION

Cette étude a permis de montrer qu'il est possible d'utiliser deux modèles réduits construits à partir d'une base réduite unique de type AROMM, valable pour tout type d'isolant (orthotrope ou dépendant de la température) et pour toutes les conditions données (différentes valeurs du coefficient de transfert thermique avec l'extérieur et différentes densités de flux thermique variables dans le temps imposées aux parois). Ainsi, l'application de ce modèle réduit dans le processus inverse a permis de retrouver avec succès les paramètres recherchés, avec une précision satisfaisante et des temps de calcul acceptables. Il convient également de noter que, pour s'affranchir des contraintes expérimentales, le coefficient de transfert thermique avec l'environnement a également été déterminé.

Ces résultats encourageants ouvrent la voie à de futures études qui généraliseront ce type d'identification à des configurations plus générales, notamment la capacité thermique dépendant de la température et la conductivité thermique à la fois orthotrope et dépendante de la température. De plus, il serait intéressant d'étudier la possibilité de mieux appréhender la non-linéarité de la conductivité en tenant compte de sa relation quadratique avec la température.

Bien entendu, l'objectif final sera de confronter ce type d'expérience, actuellement idéal, à la réalité expérimentale.

Références

- [1] C. Zhou, J. Li, D. Yan, B. Zhao and L. Zhou. Experimental and numerical study on the effective thermal conductivity of carbon fibrous media for high temperature thermal insulation applications. *Aerospace Science and Technology*, 166 (2025), 1270–9638. doi :10.1016/j.ast.2025.110591.
- [2] Chavez Castillo A. G., Gaume B., Rouizi Y., Quémener O., Glouannec P. Identification of insulating materials thermal properties by inverse method using reduced order model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 166 (2021), 120683. doi :10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120683.
- [3] Mustapha F., Joly F., Bissuel V., Quémener O. Development of a reduced-order AROMM model for the nonlinear thermal simulation of electronic components. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 232 (2024), 125909. doi :10.1016/j.ijheatmasstransfer.2024.125909.
- [4] Conn A. R., Gould N. I. M., Toint P. L. Trust Region Methods. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2000. doi :10.1137/1.9780898719857.