

Modélisation d'un procédé de thermoablation à partir d'une approche par réseau de neurones informé par la physique

Modeling of a Thermoablation Process Using a Physics-Informed Neural Network Approach

Jean-Luc BATTAGLIA^{1,2}, Mariana De MELO ANTUNES^{1,2,4*}, Ida BURGERS^{1,2,3*}, Nino AVETIKOVI^{1,3*}, Valery OZENNE^{3*}

¹Univ. Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP, I2M, UMR 5295, F-33400, Talence, France

²Arts et Metiers Institute of Technology, CNRS, Bordeaux INP, I2M, UMR 5295, F-33400 Talence (ou F73375 Le-Bourget du Lac), France

³ Université de Bordeaux, Centre de Résonance Magnétique des Systèmes Biologiques, UMR CNRS 5536, Bordeaux, France

⁴ Université fédérale d'Itajubá, Laboratoire de transfert de chaleur - LabTC, Institut de génie mécanique, Campus Professor José Rodrigues Seabra, Avenue BPS 1303, Itajubá, MG, Brésil

*(auteur correspondant : jean-luc.battaglia@u-bordeaux.fr)

Résumé - Nous présentons la méthodologie adoptée pour entraîner un réseau de neurones informé par la physique afin de modéliser le processus thermique de thermoablation de tumeurs guidé par thermométrie IRM. Une application est présentée sur des données générées numériquement par un modèle discret basé sur un volume de tissu pertinent incluant des vaisseaux

Abstract - We present the methodology adopted to train a physics-informed neural network to model the thermal process of MRI-thermometry-guided tumor thermoablation. An application is presented on numerically generated data obtained from a discrete model based on a relevant tissue volume including blood vessels.

Nomenclature (11 points, 2 colonnes)

A	rapport de forme	T	température, K
D	diffusivité massique, m^2/s	<i>Symboles grecs</i>	
L	largeur, m	α	diffusivité thermique, m^2/s
$\vec{k}$	vecteur unité	<i>Indices et exposants</i>	
S	surface d'échange, m^2	p	paroi

1. Introduction

La thermoablation supervisée par IRM [1, 2] consiste à traiter des tumeurs en générant une source de chaleur [3] en son sein et en visualisant l'élévation de température grâce à la thermométrie IRM. L'idée principale de la présente étude est d'exploiter l'abondance de données de thermométrie IRM déjà disponibles dans les centres médicaux afin de construire un réseau de neurones profond exprimant la température $T(\mathbf{x}_v)$ sur la grille 3D des voxels IRM au cours du temps, en fonction à la fois de la topologie de la zone traitée et de la source de chaleur $q(\mathbf{x}_v)$. Les

coordonnées $\mathbf{x}_v = (x_v, y_v, z_v)$ correspondent au centre de chaque voxel de la grille. La méthode proposée ici consiste à identifier les paramètres θ du réseau optimal f_θ , un *réseau de neurones informé par la physique* [4]. La supervision physique durant l'apprentissage permet d'utiliser une quantité raisonnable et limitée de données associées à différents scénarios. Chaque scénario se caractérise par une amplitude et une distribution spatiale du terme source, ainsi que par un réseau de vaisseaux sanguins spécifique. L'identification des paramètres repose sur la minimisation d'une fonction objectif globale intégrant à la fois un critère sur les données, imposant l'accord avec les mesures expérimentales de température, et un critère physique, garantissant que la température prédite satisfait *raisonnablement* l'équation de conduction de la chaleur. Cette combinaison permet au réseau de tirer parti des paradigmes *data-driven* et *model-based*, améliorant la robustesse et la cohérence physique des champs reconstruits. Chaque scénario utilisé pour l'apprentissage fournit un jeu de données incluant : les coordonnées des voxels $\mathbf{x}_v$, le temps t , le masque des vaisseaux $v(\mathbf{x}_v)$, les mesures de température $T_{\text{meas}}(\mathbf{x}_v, t)$, ainsi que la source $q(\mathbf{x}_v)$. Comme nous nous intéressons principalement ici à tester la fiabilité et la précision de l'approche proposée, les données seront simulées à l'aide d'un modèle linéaire simplifié basé sur un domaine cubique pertinent de quelques centimètres de côté. Le domaine est traversé par des vaisseaux sanguins dont l'orientation et le diamètre varient aléatoirement. La source de chaleur est également aléatoire en amplitude et en position afin de couvrir un large éventail de configurations réalistes. Le réseau identifié est évalué d'abord à l'aide de métriques puis, ensuite, à partir de simulations sur des scénarios différents de ceux utilisés pour l'apprentissage.

2. Pré-traitement des données

Nous entraînons un réseau informé par la physique f_θ qui prédit la température à chaque voxel au cours du temps selon :

$$T_{\text{pred}}(\mathbf{x}_v, t) = f_\theta(x_v, y_v, z_v, t, q_v, v), \quad (1)$$

où (N_x, N_y, N_z) représentent le nombre de voxels selon les trois directions spatiales, et $x_v = \{x_{v_1}, \dots, x_{v_{N_x}}\}$, $y_v = \{y_{v_1}, \dots, y_{v_{N_y}}\}$, $z_v = \{z_{v_1}, \dots, z_{v_{N_z}}\}$, $t = \{t_1, \dots, t_{N_t}\}$ désignent respectivement les grilles spatiales et temporelles. Un *scénario* correspond à une configuration spécifique du domaine biologique caractérisée par un ensemble unique de : (i) la localisation des vaisseaux et de la source de chaleur, (ii) l'intensité et la distribution spatiale de la source de chaleur, (iii) le nombre, l'orientation et le diamètre des vaisseaux. Soit $N_0 = N_x N_y N_z N_t$ le nombre de voxels espace-temps par scénario et $N = K N_0$ le nombre total d'échantillons après concaténation des K scénarios. Nous indexons la grille par $i_x \in \{1, \dots, N_x\}$, $i_y \in \{1, \dots, N_y\}$, $i_z \in \{1, \dots, N_z\}$ et $i_t \in \{1, \dots, N_t\}$. Un aplatissement pratique vers un indice unique $i \in \{1, \dots, N\}$ est donné par :

$$i = i_x + (i_y - 1)N_x + (i_z - 1)N_x N_y + (i_t - 1)N_x N_y N_z + (k - 1)N_0, \quad k \in \{1, \dots, K\}. \quad (2)$$

Nous notons : $\mathbf{X}_v = \{(\mathbf{x}_{vi}, t_i, q_{vi}, v_i)\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times 6}$, qui regroupe les coordonnées spatiales et temporelles des N points de mesure, la source de chaleur stationnaire par voxel, ainsi que le masque des vaisseaux, où $v_j = 1$ indique que le j -ième voxel est occupé par des vaisseaux sanguins et $v_j = 0$ sinon ; et $T_{\text{meas}}(\mathbf{x}_v, t) = \{T_{\text{meas}}(\mathbf{x}_{vi}, t_i)\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$, les températures par voxel mesurées correspondantes. L'entraînement d'un réseau de neurones est très sensible à l'échelle

des variables d'entrée et de sortie. Dans la configuration considérée, ces plages diffèrent de plusieurs ordres de grandeur (par exemple, coordonnées spatiales en centimètres $\sim 10^{-2}$, temps en secondes $\sim 10^2$, variation de température en kelvins $\sim 10^1$, source en watts par mètre cube $\sim 10^6$). Ce déséquilibre d'échelle entraîne : une convergence lente ou instable de l'optimiseur, une propagation inefficace du gradient due à des mises à jour de poids disproportionnées, ainsi qu'un mauvais conditionnement du problème d'optimisation, susceptible de piéger l'apprentissage dans des minima locaux ou des plateaux. En ramenant toutes les caractéristiques à des plages comparables, l'optimiseur explore l'espace des paramètres de manière plus homogène, et la convergence devient plus rapide et plus stable. Soit $(x_{vi}, y_{vi}, z_{vi}, t_i, q_i)$ le i -ième échantillon après empilement de tous les scénarios. Nous utilisons des moments de type population :

$$\mu_x = \frac{1}{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} x_{vj}, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} (x_{vj} - \mu_x)^2},$$

avec des formules identiques pour y_v , z_v et t en remplaçant $(N_x, x_j) \rightarrow (N_y, y_j)$, etc. Les répétitions sur y_v , z_v , t et sur les scénarios n'affectent pas ces moments. Nous effectuons la normalisation de la source de la même façon. Les paramètres de normalisation (μ_v, σ_v) sont calculés à partir des masques de vaisseaux sur l'ensemble des scénarios. Comme v est binaire, μ_v correspond à la fraction volumique occupée par les vaisseaux et $\sigma_v = \sqrt{\mu_v(1 - \mu_v)}$. Finalement, les variables sont normalisées comme suit :

$$\tilde{x}_v = \frac{x_v - \mu_x}{\sigma_x}, \quad \tilde{y}_v = \frac{y_v - \mu_y}{\sigma_y}, \quad \tilde{z}_v = \frac{z_v - \mu_z}{\sigma_z}, \quad \tilde{t} = \frac{t - \mu_t}{\sigma_t}, \quad \tilde{q}_v = \frac{q_v - \mu_q}{\sigma_q}, \quad \tilde{v} = \frac{v - \mu_v}{\sigma_v} \quad (3)$$

Enfin, les températures mesurées et calculées sont normalisées selon :

$$\hat{T}_{\text{meas}} = \frac{T_{\text{meas}} - \mu_{T_{\text{meas}}}}{\sigma_{T_{\text{meas}}}}, \quad \hat{T}_{\text{pred}} = \frac{T_{\text{pred}} - \mu_T}{\sigma_T}. \quad (4)$$

À l'issue de ce processus de normalisation, on dispose : (i) de $\tilde{\mathbf{X}}_v = (\tilde{x}_v, \tilde{t}, \tilde{q}_v, \tilde{v}) \in \mathbb{R}^{N \times 6}$, regroupant les coordonnées espace-temps normalisées, la source volumique et le masque des vaisseaux ; (ii) d'une température mesurée normalisée $\hat{T}_{\text{meas}}$ et d'une température cible $\hat{T}_{\text{pred}}$ appartenant à $\mathbb{R}^{N \times 1}$; et (iii) des paramètres d'échelle (μ, σ) nécessaires pour assurer la cohérence entre apprentissage, validation et inférence. L'identification du PINN reposant sur des phases successives d'apprentissage et de validation, toutes les moyennes et écarts-types sont calculés *uniquement sur l'ensemble d'apprentissage*, puis réutilisés pour la validation afin d'éviter toute fuite d'information.

3. Obtention du réseau informé par la physique au sens de l'optimalité

Comme indiqué précédemment, f_θ désigne le réseau de neurones qui opère désormais sur le vecteur d'entrée normalisé $\tilde{\mathbf{X}}_v$, tel que : $\hat{T}_{\text{pred}} = f_\theta(\tilde{\mathbf{X}}_v)$, où $\hat{T}_{\text{pred}}$ est la température normalisée calculée. Nous utilisons un perceptron multicouche entièrement connecté (*Multi-Layer Perceptron*, MLP) comportant L couches, défini par :

$$\text{layers} = (n_1, \dots, n_L), \quad n_1 = 6 \ (\tilde{x}_v, \tilde{y}_v, \tilde{z}_v, \tilde{t}, \tilde{q}_v, \tilde{v}), \quad n_L = 1. \quad (5)$$

Pour chaque couche cachée ou de sortie $l = 1, \dots, L - 1$, les paramètres entraînaables sont une matrice de poids $W^{(l)} \in \mathbb{R}^{n_{l+1} \times n_l}$ et un vecteur de biais $b^{(l)} \in \mathbb{R}^{n_{l+1}}$. Le vecteur complet des paramètres est obtenu par concaténation : $\theta = (\text{vec}(W^{(1)}), b^{(1)}, \text{vec}(W^{(2)}), b^{(2)}, \dots, \text{vec}(W^{(L-1)}), b^{(L-1)})$,

c'est-à-dire les poids puis les biais de chaque couche, de l'entrée vers la sortie. Le nombre total de paramètres est donné par $\sum_{l=1}^{L-1} (n_{l+1}n_l + n_{l+1})$. En notant $a^{(1)} = \tilde{\mathbf{X}}_V^\top$ la valeur initiale du jeu de données, la propagation avant s'écrit classiquement :

$$p^{(l)} = W^{(l)}a^{(l)} + b^{(l)}, \quad a^{(l+1)} = \begin{cases} \phi(p^{(l)}), & l = 1, \dots, L - 2, \\ p^{(l)}, & l = L - 1 \text{ (sortie linéaire)}, \end{cases} \quad (6)$$

de sorte que $\hat{T}_{\text{pred}} = a^{(L)}^\top$ et, finalement : $T_{\text{pred}} = \mu_T + \sigma_T \hat{T}_{\text{pred}}$.

Toutes les couches cachées utilisent la même fonction d'activation : $\phi_{\tanh}(p) = \tanh(p)$.

La couche de sortie est laissée *linéaire* (fonction identité) afin de prédire un scalaire avant la dé-normalisation. La propagation arrière permet d'identifier les paramètres du réseau θ en minimisant la fonction objectif globale $\mathcal{L}_A(\theta)$, qui combine trois critères :

$$\mathcal{L}_A(\theta) = \lambda_d \mathcal{L}_d(\theta) + \lambda_p \mathcal{L}_p(\theta) + \lambda_v \mathcal{L}_v(\theta) \quad (7)$$

avec :

$$\mathcal{L}_d(\theta) = \frac{1}{N} \sum_i (T_{\text{pred}_i} - T_{\text{meas}_i})^2, \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_p(\theta) = \frac{1}{N} \sum_i \left(\rho c \partial_t T_{\text{pred}_i} - k \nabla^2 T_{\text{pred}_i} - q_{v_i} \right)^2, \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_v(\theta) = \frac{1}{N_v} \sum_{i:v_i=1} (T_{\text{pred}_i} - 0)^2. \quad (10)$$

La fonction $\mathcal{L}_d$ correspond au critère sur les données de température, définie à partir des résidus entre températures mesurées et prédites. Le critère $\mathcal{L}_p$ est défini à partir des résidus physiques, l'équation de la chaleur restant valable en remplaçant la température $T(\mathbf{x}, t)$ par T_{pred} , c'est-à-dire la température prédite à chaque voxel. Le critère $\mathcal{L}_v$ impose la contrainte associée aux vaisseaux, N_v désignant le nombre de voxels appartenant aux vaisseaux. Il est important de noter que les critères sont évalués sur les températures physiques réelles, et non sur les variables normalisées. Les coefficients λ_d et λ_p contrôlent respectivement l'équilibre entre fidélité aux mesures et cohérence physique.

Nous définissons : $e_i = T_{\text{pred}_i} - T_{\text{meas}_i}$, $R_i = (\rho c \partial_t T_{\text{pred}} - k \nabla^2 T_{\text{pred}} - q_v)_i$, $r_i^{(v)} = (T_{\text{pred}_i} - 0)$ et $m_i = \mathbb{1}_{\{v_i=1\}}$ désigne le masque binaire des vaisseaux.

La minimisation de la fonction objectif globale $\mathcal{L}_A(\theta)$ est réalisée à l'aide de l'optimiseur Adam [5], qui nécessite le calcul du gradient $\nabla_{\theta} \mathcal{L}_A(\theta)$ par rapport aux paramètres recherchés θ . Ce calcul suit la règle de dérivation :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \hat{T}_{\text{pred}}} \frac{\partial \hat{T}_{\text{pred}}}{\partial \theta}. \quad (11)$$

Deux modes pratiques de rétropropagation peuvent être envisagés :

- *Guidé.* (sans rétropropagation PDE) La perte $\mathcal{L}_p$ est utilisée pour suivre et pondérer l'apprentissage, mais elle n'est pas rétropropagée (on impose $\partial \mathcal{L}_p / \partial \hat{T}_{\text{pred}} \approx 0$).
- *Rétropropagation PDE complète.* En utilisant le résidu R_i et $\mathcal{L}_p = \frac{1}{B} \sum_i (R_i / \text{denom})^2$, la règle de la chaîne conduit à :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \hat{T}_{\text{pred}_i}} = \frac{2}{B} \frac{R_i}{\text{denom}^2} \frac{\partial R_i}{\partial T_{\text{pred}_i}} \sigma_T, \quad (12)$$

où $\partial R_i / \partial T_{\text{pred}_i}$ regroupe les coefficients de différences finies au point i .

Les métriques globales (espace-temps) sont calculées sur l'ensemble des scénarios, des voxels et des instants : $\text{MAE}_{\text{glob}} = \frac{1}{N} \sum_i |e_i|$, $\text{RMSE}_{\text{glob}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i e_i^2}$, $\bar{T}_{\text{meas}} = \frac{1}{N} \sum_i T_{\text{meas}_i}$, $R_{\text{glob}}^2 = 1 - \frac{\sum_i e_i^2}{\sum_i (T_{\text{meas}_i} - \bar{T}_{\text{meas}})^2}$.

Une corrélation de Pearson est également calculée : $\rho(t_j) = \text{corr}(T_{\text{pred}}(t_j), T_{\text{meas}}(t_j))$, et représentée graphiquement afin de visualiser les tendances temporelles.

4. Résultats et discussion

Afin de construire un ensemble de données pertinentes, similaires à celles obtenues par thermométrie IRM, nous considérons le problème tridimensionnel transitoire de conduction thermique dans un milieu biologique homogène et isotrope Ω , pouvant contenir des vaisseaux sanguins modélisés comme des tubes froids à la température T_b . Le système d'EDP est résolu par une méthode de différences finies sur un maillage régulier, où le pas spatial est égal aux dimensions des voxels selon les trois directions. La méthode d'Euler classique est utilisée pour l'intégration temporelle. Enfin, la température $T(\mathbf{x}_v, t)$ et la source de chaleur $q(\mathbf{x}_v)$ à chaque voxel sont calculées en moyennant respectivement la température $T(\mathbf{x}, t)$ et la source $q(\mathbf{x})$ à partir des valeurs aux huit nœuds de chaque voxel, pour les deux grandeurs. Nous construisons $K = 20$ scénarios d'apprentissage, avec $\rho = 1000 \text{ [kg/m}^3]$, $c_p = 3600 \text{ [J/(kg}\cdot\text{K)]}$ et $k = 0.5 \text{ [W/(m}\cdot\text{K)]}$, et nous simulons les températures $T_{\text{clean}}(\mathbf{x}_v, t)$ sur une grille régulière de voxels. Comme présenté en annexe A, chaque q_k est la somme de « blobs » gaussiens lisses, avec éventuellement un fond, puis est légèrement lissé sur la grille. L'amplitude de la source varie entre $(2 - 8) \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$ selon le scénario. Le chauffage est constant pendant 10 secondes pour tous les scénarios. Un bruit de mesure gaussien d'écart-type $\sigma_{\text{noise}} = 1\text{K}$ est ajouté selon :

$$T_{\text{meas}}(\mathbf{x}_v, t) = T_{\text{clean}}(\mathbf{x}_v, t) + \varepsilon(\mathbf{x}_v, t), \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{noise}}^2). \quad (13)$$

Comme indiqué précédemment, la localisation et l'orientation des vaisseaux et de la source de chaleur sont tirées aléatoirement. Il en va de même pour le nombre de vaisseaux et leur diamètre, autorisés à varier dans une plage prédéfinie. Dans la Figure 1, nous représentons 6 scénarios choisis parmi les K scénarios générés. Les vaisseaux et la source de chaleur sont visibles dans chaque cas.

L'architecture du MLP est : layers = $(6 \rightarrow 256 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 1)$. Les paramètres de la méthode Adam sont : $\text{lr} = 3 \cdot 10^{-4}$, $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.999$, $\varepsilon = 10^{-8}$, et un *weight decay* = 0. Les pondérations des critères sont : $\lambda_d = 1$ pour les données et $\lambda_p = 0.2$ pour la physique. Les modes « guidé » et « rétropropagation PDE complète » sont testés.

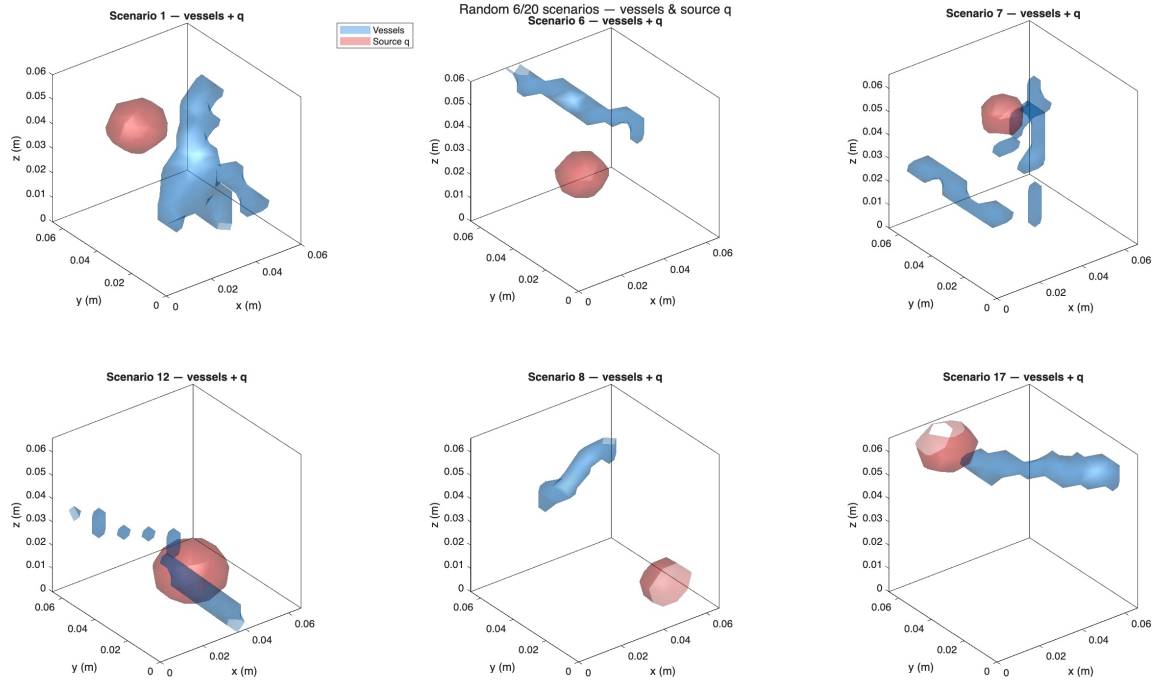


Figure 1 : Six scénarios choisis parmi les $K = 20$ scénarios générés. La localisation des vaisseaux et de la source est aléatoire pour chaque configuration.

Dans chaque cas, la performance du réseau entraîné peut être analysée à la fois quantitativement (métriques) et qualitativement (cartes et projections). La fonction objectif en échelle logarithmique confirme une décroissance monotone et rapide, sans fluctuations quel que soit le mode. Cela valide le choix des paramètres d'apprentissage λ_d et λ_p . Lorsque le mode de rétropropagation PDE complète est considéré, le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère de convergence visé est plus faible que pour le premier mode. Cependant, comme le calcul de $\partial \mathcal{L}_p / \partial \hat{T}_{\text{pred}}$ est requis dans ce mode, le temps CPU est très similaire pour les deux approches (environ 2 heures et 20 minutes, calculs sous Matlab sur un ordinateur portable 2.5 GHz avec 8 Go de RAM).

Les métriques agrégées sur l'ensemble des scénarios et des instants permettent d'évaluer la précision quantitative des deux modes ; elles sont très proches et prennent les valeurs suivantes :

- Erreur absolue moyenne (MAE) : ~ 1.059 K,
- Erreur quadratique moyenne (RMSE) : 1.327 K,
- RMSE normalisée (NRMSE, relative à l'amplitude) : 0.018, soit environ 2% d'erreur relative,
- Coefficient de détermination R^2 : 0.93, le modèle explique plus de 93% de la variance,
- Corrélation de Pearson : 0.97, ce qui indique une quasi-linéarité parfaite entre les prédictions et la référence.

Comme le montre la Figure 2, la comparaison visuelle (qualitative) confirme ces métriques. Dans la représentation MIP_z (*maximum intensity projection*), les cartes prédites et mesurées sont très proches ; la forme du « blob » thermique est bien reproduite. La géométrie spatiale et l'intensité sont correctement restituées, avec seulement une légère sous-estimation de l'amplitude maximale. Il est également difficile de distinguer une différence entre les deux cartes

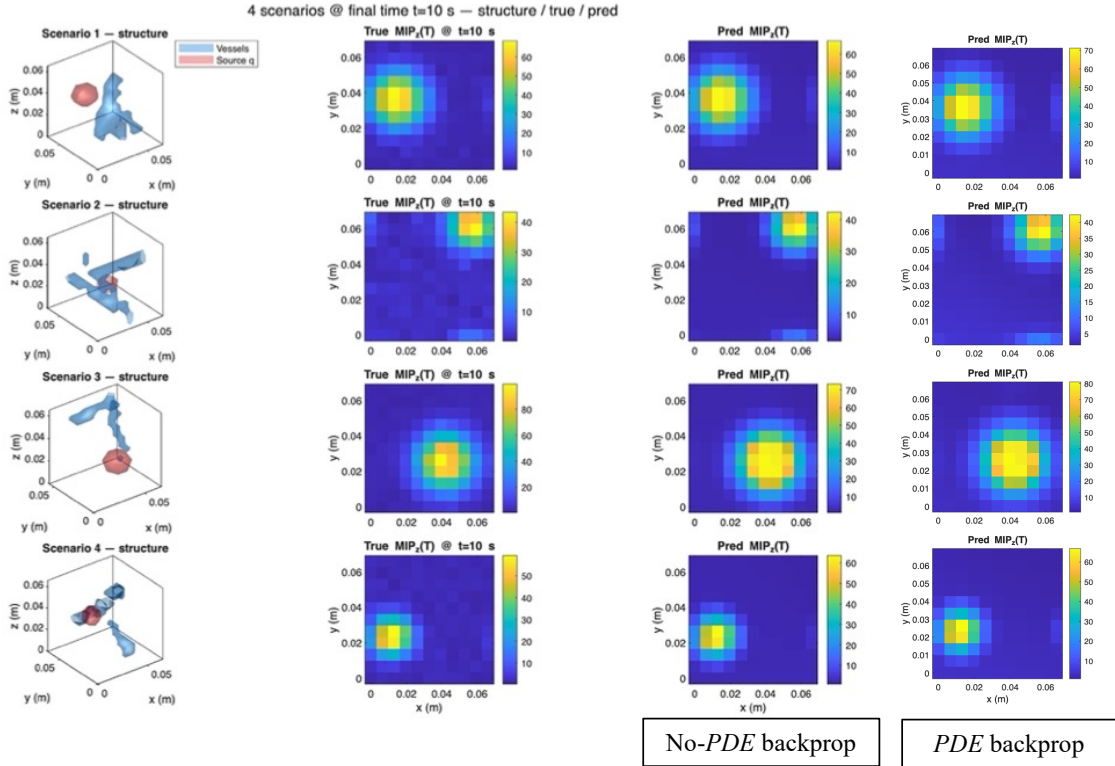


Figure 2 : Comparaison entre la température (vraie = mesurée) utilisée pour l'entraînement du réseau et celle calculée (prédite) par le réseau optimal pour les scénarios 1 à 4 au temps final $t = 10$ s. La position des vaisseaux et de la source dans le domaine est visible sur les figures 3D à gauche pour chaque scénario. Les résultats sont présentés en utilisant soit le mode guidé, soit le mode de rétropropagation PDE complète.

prédites obtenues avec les deux modes.

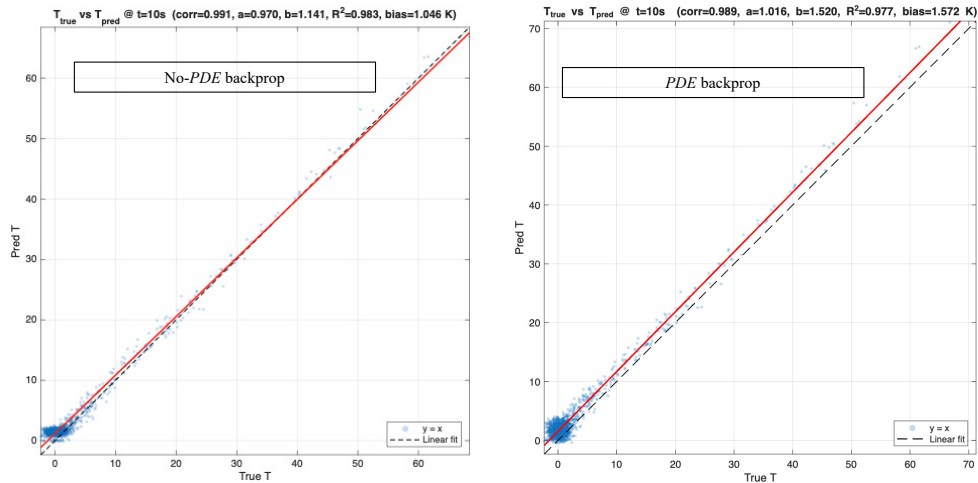


Figure 3 : Corrélation entre la température vraie et la température prédite au temps 10 s pour le scénario 1, en utilisant soit le mode guidé, soit le mode de rétropropagation PDE complète.

Le nuage de points T_{meas} vs. T_{pred} est présenté sur la Figure 3, avec l'ajustement linéaire $T_{\text{pred}} \approx aT_{\text{meas}} + b$. Bien que les deux modes conduisent à des résultats très satisfaisants, le

mode de rétropropagation PDE complète, avec $\text{corr} = 0.91$ et $R^2 = 0.977$, indique que le modèle explique l’essentiel de la variance. L’ajustement linéaire ($a = 1.016$, $b = -1.520$ K) montre un meilleur accord pour les basses températures, tandis que la précision est légèrement moindre pour les températures plus élevées.

Afin de valider le modèle identifié, nous le simulons sur cinq jeux de données différents de ceux utilisés pour l’apprentissage du réseau. Le réseau reproduit correctement la structure spatiale et l’amplitude du champ de température sur des scénarios non vus. Les erreurs sont généralement faibles et principalement localisées dans les zones à forts gradients (proches des sources de chaleur et des frontières des vaisseaux), ce qui est cohérent avec la physique et les métriques précédentes. Les métriques agrégées calculées en incluant tous les scénarios et tous les voxels sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{MAE} &= 1.542 \text{ K}, & \text{RMSE} &= 2.677 \text{ K}, & \text{NRMSE} &= 1.86 \times 10^{-2}, \\ R^2 &= 0.864, & \text{corr}(T_{\text{pred}}, T_{\text{true}}) &= 0.949. \end{aligned}$$

Le résidu moyen normalisé de l’EDP, qui constitue l’indicateur physique, vaut : $\mathbb{E}[R_n^2] = 1.035 \times 10^{-1}$, ce qui indique une bonne cohérence avec la contrainte de l’équation de la chaleur lors de l’inférence.

5. Conclusion

Les métriques confirment la fiabilité et la précision du réseau identifié, puisque l’erreur de sortie est essentiellement du même ordre de grandeur que le niveau de bruit, $\text{MAE} \approx \sigma = 1$ K. En résumé, le réseau apprend correctement la dynamique thermique sans sur-apprentissage évident. Autrement dit, l’erreur résiduelle correspond essentiellement au bruit ajouté, ce qui signifie que le modèle est proche de la limite théorique de précision. Les deux modes conduisent à des métriques globalement similaires et ne diffèrent que légèrement pour la corrélation entre températures mesurées et prédites. Il n’en résulte donc pas de conclusion définitive quant au choix du mode de rétropropagation.

Références

- [1] Baudouin Denis de Senneville, Charles Mougenot, Bruno Quesson, Iulius Dragonu, Nicolas Grenier, and Chrit T. W. Moonen. Mr thermometry for monitoring tumor ablation, *European Radiology*, 17(9) :2401–2410, May 2007.
- [2] Valéry Ozenne, Solenn Toupin, Pierre Bour, Baudouin Denis de Senneville, Matthieu Lepetit-Coiffé, Manuel Boissenin, Jenny Benois-Pineau, Michael S Hansen, Souheil J Inati, Assaf Govari, et al., Improved cardiac magnetic resonance thermometry and dosimetry for monitoring lesion formation during catheter ablation, *Magnetic resonance in medicine*, 77(2) :673–683, 2017.
- [3] Rory Geoghegan, Gail Ter Haar, Kathryn Nightingale, Leonard Marks, and Shyam Natarajan. Methods of monitoring thermal ablation of soft tissue tumors—a comprehensive review, *Medical physics*, 49(2) :769–791, 2022.
- [4] Shengze Cai, Zhicheng Wang, Sifan Wang, Paris Perdikaris, and George Em Karniadakis, Physics-informed neural networks for heat transfer problems, *Journal of Heat Transfer*, 143(6) :060801, 04 2021.
- [5] Maziar Raissi, Paris Perdikaris, and George E Karniadakis. Physics-informed neural networks : A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational physics*, 378 :686–707, 2019.

Remerciements (Times New Roman , 12 pts)

Ce travail a été financé par l’ANR au travers du projet SMART-HEAT ANR-24-CE92- 0073-01.