

Modélisation du transfert thermique couplé conducto-radiatif instationnaire dans un mur 1D semi-transparent gris par des techniques stochastiques

Loïc SEYER^{1*}, Franck ENGUEHARD², Denis ROCHAIS¹

¹ Commissariat à l’Energie Atomique et aux Energies Alternatives (CEA) / Le Ripault, BP 16, F-37260 Monts, France

² Institut Pprime, CNRS, Université de Poitiers, ISAE-ENSMA, F-86962 Futuroscope Chasseneuil, France

*(auteur correspondant : seyer.loic@gmail.com)

Résumé

Deux approches de résolution du transfert de chaleur instationnaire couplé conducto-radiatif dans un milieu semi-transparent homogène gris, à géométrie 1D, et soumis à des conditions aux limites de Dirichlet sont présentées. La première suit une méthode classique déterministe et sert de référence à la seconde. Cette dernière, purement stochastique, représente une nouveauté en associant la méthode des marcheurs Browniens pour modéliser le transfert par conduction, et une méthode de lancer de rayons pour le transfert par rayonnement. Un excellent accord est obtenu entre les deux approches.

Nomenclature

a	diffusivité thermique, $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
C_p	capacité thermique massique, $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	β	coefficient d’extinction, m^{-1}
δt	pas de temps, s	δh	enthalpie élémentaire, J
δx	pas d’espace, m	θ	angle zénithal d’émission
E	épaisseur optique	κ	coefficient d’absorption, m^{-1}
e	épaisseur du mur, m	λ	conductivité thermique, $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
g	paramètre de la fonction de phase de Henyey-Greenstein	Λ	matrice des résultats du lancer de rayons
L	luminance totale, $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	μ	$\cos\theta$
l	longueur d’extinction, m	Π	fonction de phase de diffusion
M	nombre de marcheurs	ρ	masse volumique, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
n	indice de réfraction	σ	coefficient de diffusion, m^{-1}
N_r	rayons lancés par cellule ou surface	σ_{SB}	constante de Stefan-Boltzmann, $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
N_t	nombre de pas de temps	φ	flux surfacique, $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
N_x	nombre de pas d’espace ou de voxels	ϕ	angle azimutal d’émission
\mathbb{P}	probabilité	ω	albédo de diffusion
P	puissance surfacique radiative, $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	<i>Indices et exposants</i>	
Pl	nombre de Planck	*	adimensionné
p^R	puissance volumique radiative, $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$	<i>abs</i>	absorbé
r	nombre aléatoire	<i>c</i>	caractéristique
S	terme source de l’ETR, $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$	<i>emi</i>	émis
T	température, K	<i>f</i>	final
T_0	température imposée en $x = 0$, K	i, j	indices spatial et directionnel
T_e	température imposée en $x = e$, K	N	loi normale centrée réduite
t	temps, s	r, rh	référence, référence de l’enthalpie
V_v	volume d’un voxel, m^3	S, V	en surface, en volume
x	position suivant l’axe 1D, m	U	loi uniforme sur $[0,1]$

1. Introduction

Les matériaux de type céramiques poreux présentent de nombreuses applications en tant qu'isolants à hautes températures. Dans l'aérospatial ou les nouvelles technologies pour l'énergie, les besoins de caractérisation et de modélisation du comportement de ces matériaux sont croissants et de plus en plus exigeants [1-4]. En particulier, les matériaux de structures 3D complexes, hétérogènes, semi-transparents et portés à haute température atteignent les limites des modèles classiques déterministes instationnaires, car les besoins en mémoire vive deviennent très importants, et les maillages des structures poreuses très complexes [5].

Pour contourner ces difficultés, on cherche à développer une méthode purement stochastique. Ces méthodes présentent l'avantage de nécessiter bien moins de mémoire vive, au détriment d'un besoin en puissance de calcul souvent plus important lorsqu'on souhaite atteindre le régime thermique asymptotique. Des méthodes hybrides, couplant des résolutions stochastique et déterministe, ont été proposées dans la littérature [6]. Certaines méthodes purement stochastiques existent, comme celles associées au projet Stardis [7], mais ces méthodes sont conçues pour des structures mathématiques 3D (et non voxélisées) et évaluent la température en des points et instants donnés (et non le transfert instationnaire complet).

Notre modèle stochastique repose sur le couplage de la méthode des marcheurs Browniens et d'une méthode de lancer de rayons. La première méthode a initialement été proposée dans les travaux de G. Vignoles [8-9] avant d'être approfondie par V. Gonneau [10-11]. La méthode discrétise l'enthalpie des voxels en quanta d'énergie appelés marcheurs Browniens, dont le déplacement représente le transfert de chaleur conductif. La seconde méthode repose sur l'analyse des trajectoires de rayons au sein du milieu, et permet ainsi d'évaluer le transfert radiatif pour un profil de température donné. Cette méthode de lancer de rayons reprend celle approfondie dans la thèse de Y. Dauvois [12]. De plus, pour éviter l'étape de maillage, souvent complexe, on fait le choix de travailler sur des structures numériques voxélisées, directement accessibles par tomographie.

Dans cet article, notre objectif principal est de valider notre concept ; nous nous plaçons donc dans un cas simple de mur (1D) homogène semi-transparent gris. Nous décrivons d'abord le modèle déterministe, puis nous présentons notre modèle stochastique. Enfin, la comparaison des résultats obtenus sur un cas test permettra de valider les deux approches.

2. Modèle déterministe

Notre milieu d'étude est un mur (1D) homogène semi-transparent gris borné par deux surfaces noires à températures imposées. Le milieu est initialement à la température uniforme T_e ; et à partir de l'instant $t = 0$, les conditions aux limites de surfaces noires, de températures T_0 en $x = 0$ et T_e en $x = e$, sont imposées.

Pour résoudre le transfert conducto-radiatif par une méthode déterministe, il faut coupler la résolution de l'équation du transfert radiatif (ETR) à celle du bilan d'énergie.

2.1. Équation du transfert radiatif

Etant donné les hypothèses ci-dessus, l'ETR instationnaire et intégrée en fréquence s'écrit :

$$\mu \frac{\partial L(x, \mu, t)}{\partial x} + \beta L(x, \mu, t) = \frac{\kappa n^2 \sigma_{SB} T(x, t)^4}{\pi} + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{-1}^1 L(x, \mu', t) \Pi(\mu, \mu') d\mu' \quad (1)$$

et les conditions aux limites de surfaces noires sont :

$$L(x = 0, \mu > 0, t) = \frac{n^2 \sigma_{SB} T_0^4}{\pi} \quad ; \quad L(x = e, \mu < 0, t) = \frac{n^2 \sigma_{SB} T_e^4}{\pi} \quad (2)$$

On introduit le terme source $S(x, \mu, t)$ égal à la partie droite de l'équation (1). On discrétise l'intervalle spatial $0 \leq x \leq e$ en N_x cellules de largeurs identiques δx , et l'intervalle directionnel $-1 \leq \mu \leq 1$ selon une quadrature classique de Lobatto à 96 points (2×48) [13]. L'application de la méthode des différences finies à l'ETR à un instant t fixé aboutit aux expressions suivantes de la luminance totale $L_{i,j}$ (i étant l'indice de la cellule et j celui de la direction) :

$$L_{i,j} = \frac{S_{i+1,j} + S_{i,j} - (\beta + 2\mu_j/\delta x)L_{i+1,j}}{\beta - 2\mu_j/\delta x} \quad \text{lorsque } \mu_j < 0 \quad (3)$$

$$L_{i,j} = \frac{S_{i,j} + S_{i-1,j} - (\beta - 2\mu_j/\delta x)L_{i-1,j}}{\beta + 2\mu_j/\delta x} \quad \text{lorsque } \mu_j > 0 \quad (4)$$

La fonction de phase $\Pi(\mu, \mu')$ est prise égale à celle issue de la fonction de Henyey-Greenstein de paramètre $g \in [-1, 1]$. Les équations (3-4) permettent de calculer le champ de luminance $L_{i,j}$ connaissant le champ de source $S_{i,j}$. Par ailleurs, le champ $S_{i,j}$ peut être calculé sur la base de son expression en fonction du champ $L_{i,j}$. On procède donc par itérations jusqu'à convergence des champs $L_{i,j}$ et $S_{i,j}$.

2.2. Bilan d'énergie

Dans notre problème, le bilan d'énergie s'écrit :

$$\rho C_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + p^R(x, t) \quad (5)$$

et les conditions initiale et aux limites sont :

$$T(x, t < 0) = T_e \quad ; \quad T(x = 0, t \geq 0) = T_0 \quad ; \quad T(x = e, t \geq 0) = T_e \quad (6)$$

Dans l'équation (5), le terme $p^R(x, t)$ représente la puissance volumique radiative, qui a ici pour expression :

$$p^R(x, t) = \kappa \left(2\pi \int_{-1}^1 L(x, \mu, t) d\mu - 4n^2 \sigma_{SB} T(x, t)^4 \right) \quad (7)$$

et dont l'intégrale en μ est calculée encore une fois à l'aide de la quadrature de Lobatto [13].

En appliquant la méthode des différences finies de manière très classique selon un schéma implicite, on est capable, par résolution d'un système linéaire, d'obtenir le champ de température T_i à un instant t fixé en fonction du champ de puissance volumique p_i^R . L'obtention des champs T_i , $L_{i,j}$, $S_{i,j}$ et p_i^R à un instant t fixé résulte donc d'itérations entre résolutions de l'ETR et du bilan d'énergie.

3. Modèle stochastique

De même que pour le modèle déterministe, on prend en compte l'apport du transfert radiatif dans le bilan d'énergie sous forme d'un terme de puissance volumique radiative. Ce dernier est calculé dans chaque voxel via la méthode de lancer de rayons, laquelle se base sur le profil de

température au pas de temps précédent. Le profil de température est quant à lui obtenu par la méthode des marcheurs Browniens dans laquelle on prend en compte l'apport de la puissance volumique radiative.

3.1. Lancer de rayons

Le mur semi-transparent est discrétisé en N_x cellules, auxquelles on ajoute les deux surfaces noires aux extrémités. La puissance volumique radiative dans la cellule i a pour expression :

$$p_i^R = \frac{P_i^{abs} - P_i^{emi}}{\delta x} \quad (8)$$

où P_i^{abs} et P_i^{emi} sont les puissances radiatives absorbée et émise par unité de surface de la cellule i . Pour une cellule du milieu semi-transparent, i.e. pour $1 \leq i \leq N_x$, le terme P_i^{emi} a pour expression :

$$P_i^{emi} = 4\kappa n^2 \sigma_{SB} T_i^4 \delta x \quad (9)$$

tandis qu'aux deux extrémités (surfaces noires), i.e. pour $i = 0$ ou $i = N_x + 1$, P_i^{emi} vaut :

$$P_0^{emi} = n^2 \sigma_{SB} T_0^4 ; P_{N_x+1}^{emi} = n^2 \sigma_{SB} T_e^4 \quad (10)$$

Enfin, la puissance radiative absorbée par la cellule i P_i^{abs} s'exprime aisément si on introduit la matrice de probabilités conditionnelles $\Lambda_{i,i'}$ définie par :

$$\Lambda_{i,i'} = \mathbb{P}(\text{rayon absorbé par la cellule } i' \mid \text{rayon émis par la cellule } i) \quad (11)$$

avec $0 \leq i, i' \leq N_x + 1$ et où la notation $\mathbb{P}(A \mid B)$ signifie « probabilité conditionnelle de l'événement A sachant l'événement B ». P_i^{abs} s'exprime alors en fonction des puissances radiatives émises $P_{i'}^{emi}$ de la manière suivante :

$$P_i^{abs} = \sum_{i'=0}^{N_x+1} P_{i'}^{emi} \Lambda_{i',i} \quad (12)$$

Pour déterminer la matrice $\Lambda_{i,i'}$, on effectue un lancer de rayons suivant la méthode décrite dans les travaux de Y. Dauvois [12]. Un grand nombre de rayons sont lancés depuis les N_x voxels et les deux surfaces noires. On les suit depuis leur émission jusqu'à leur absorption. Même si on ne retiendra que la position d'absorption x suivant l'axe 1D d'étude, les rayons se déplacent dans l'espace 3D entre les deux plans en $x = 0$ et $x = e$. Pour chaque rayon, on procède comme suit dans chaque voxel et dans chacune des deux surfaces noires :

1. Tirer un nombre aléatoire r_U dans la loi uniforme sur $[0,1]$ pour définir la position de départ dans le voxel (prendre $x = 0$ pour la surface noire de gauche, et $x = e$ pour celle de droite).
2. Tirer un nombre aléatoire r_U pour définir le cosinus de l'angle zénithal d'émission $\mu = \cos\theta$ ($\theta \in [0, \pi]$ pour l'émission depuis un voxel, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour la surface noire de gauche, et $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ pour la surface noire de droite).
3. Tirer un nombre aléatoire r_U pour définir l'angle azimutal d'émission $\phi \in [0, 2\pi]$.

4. Dans les milieux semi-transparents Beeriens, la fonction de répartition des longueurs d'extinction l a pour expression $(1 - \exp(-\beta l))$; par conséquent, une longueur d'extinction l s'obtient en tirant un nombre aléatoire r_U puis en résolvant l'équation $r_U = 1 - \exp(-\beta l)$ [14].
5. Si le rayon ainsi émis atteint une surface noire, il est absorbé.
6. Sinon, le devenir du rayon lors d'une extinction en volume se décide par comparaison d'un nombre aléatoire r_U à l'albédo de diffusion ω : si $r_U \geq \omega$, le rayon est absorbé ; sinon, il est diffusé. Dans ce dernier cas, le rayon prend une nouvelle direction de parcours qui est tirée aléatoirement sur la base de la fonction de phase de diffusion retenue pour le milieu semi-transparent.

La connaissance des cellules de départ et d'arrivée de tous les rayons ainsi lancés permet de calculer la matrice de probabilités conditionnelles $\Lambda_{i,i'}$ et ensuite les puissances volumiques radiatives p_i^R pour un champ de température donné via les équations (8-10) et (12).

3.2. Marcheurs Browniens

La méthode des marcheurs Browniens a été principalement développée dans les travaux de V. Gonneau [10-11]. Elle consiste à discrétiser l'enthalpie H contenue dans un voxel de volume V_v à la température uniforme T_c en un grand nombre M_r de quanta d'énergie appelés marcheurs Browniens. L'enthalpie élémentaire δh portée par chaque marcheur est donc :

$$\delta h = \frac{H}{M_r} = \frac{\rho C_p V_v (T_c - T_{rh})}{M_r} \quad (13)$$

où T_{rh} désigne la température de référence de l'enthalpie (T_{rh} est donc telle que $H(T_{rh}) = 0$).

Le déplacement des marcheurs suit le schéma d'Itô-Taylor permettant de décrire des phénomènes de diffusion stochastique. Ainsi, le déplacement Dx d'un marcheur pendant un pas de temps δt dépend de la diffusivité thermique du matériau a et du tirage d'un nombre aléatoire r_N dans la loi normale centrée réduite :

$$Dx = r_N \sqrt{2a\delta t} \quad (14)$$

Connaissant le nombre de marcheurs M_i présents dans un voxel i à un instant t donné, on peut immédiatement déduire la température T_i de ce voxel à cet instant via l'expression :

$$T_i = T_{rh} + \frac{M_i}{M_r} (T_c - T_{rh}) \quad (15)$$

Enfin, pour simuler notre problème, il faut que la procédure de marches Browniennes que nous employons puisse prendre en compte les conditions aux limites de Dirichlet ainsi qu'une puissance volumique radiative. C'est l'objet des sections 3.2.1. et 3.2.2. qui suivent.

3.2.1. Prise en compte d'une condition à la limite de Dirichlet avec les marcheurs Browniens

On a discrétisé le milieu 1D en N_x voxels. Par ailleurs, on considère que les deux surfaces noires sont infiniment fines, de sorte qu'aucun volume ne peut y être défini. On ne peut donc pas non plus considérer de marcheurs Browniens dans ces surfaces. On fait donc le choix d'imposer les températures non pas aux frontières (i.e. aux abscisses $x = 0$ et $x = e$) mais au niveau du premier voxel (adjacent à la surface noire en $x = 0$) et du dernier voxel (adjacent à la surface noire en $x = e$). Ainsi, la régulation de la température ne se fait pas exactement aux surfaces mais dans les deux voxels frontières.

Afin d'illustrer la méthode de régulation que nous appliquons, supposons qu'à la fin d'une procédure de déplacement des marcheurs entre deux instants successifs t et $(t + \delta t)$, il manque un certain nombre de marcheurs dans le voxel à température imposée. Afin de combler ce manque, il va falloir injecter, entre t et $(t + \delta t)$, un flux thermique supplémentaire (et inconnu), autrement dit un nombre (inconnu) de marcheurs supplémentaires, par la face du voxel en contact avec la surface noire. Ces marcheurs seront donc injectés à des instants aléatoires entre t et $(t + \delta t)$, i.e. à des instants $t_U = t + r_U \delta t$ où r_U désigne un nombre aléatoire tiré dans la loi uniforme sur $[0,1]$; et une fois injectés, ils devront faire une marche aléatoire dans le milieu pendant la durée restante, soit $t + \delta t - t_U = (1 - r_U) \delta t$. On va donc leur imposer un déplacement Dx égal à :

$$Dx = r_N \sqrt{2a(1 - r_U) \delta t} \quad (16)$$

Certains marcheurs finiront leur marche dans le voxel où on les a injectés, tandis que d'autres échoueront dans des voxels plus éloignés. Il faudra donc répéter cette procédure d'injection tant que le nombre de marcheurs manquants dans le voxel à température imposée n'est pas comblé.

Il faut noter que cette procédure fonctionne aussi lorsque le nombre de marcheurs dans le voxel à température imposée est trop élevé. Dans cette situation, il faut injecter des marcheurs « négatifs », i.e. portant l'enthalpie élémentaire $(-\delta h)$.

3.2.2. *Prise en compte d'une puissance volumique radiative avec les marcheurs Browniens*

Cette procédure est détaillée dans la thèse de V. Gonneau [10].

Supposons qu'on doive prendre en compte une puissance volumique radiative p_i^R dans le voxel i . A cette puissance volumique peut être associée une quantité d'enthalpie à injecter entre deux instants successifs t et $(t + \delta t)$, et donc un nombre de marcheurs $M_{p^R,i}$:

$$M_{p^R,i} = \frac{p_i^R V_v \delta t}{\delta h} \quad (17)$$

Cette injection est répartie uniformément au cours du pas de temps et dans le voxel, ce qui s'effectue par deux tirages aléatoires dans la loi uniforme.

4. Résultats

Pour nos calculs, on adimensionne les équations :

- Les abscisses x et les instants t sont adimensionnés de manière classique : $x^* = x/e$ et $t^* = at/e^2$;
- Les températures sont adimensionnées par la température de référence $T_r = T_0$: $T^* = T/T_r$;
- Les flux surfaciques et luminances sont adimensionnés par la même grandeur de référence $\varphi_r = L_r = n^2 \sigma_{SB} T_r^4 / \pi$: $\varphi^* = \varphi / \varphi_r$ et $L^* = L / L_r$;
- Les puissances volumiques radiatives sont adimensionnées par la puissance volumique de référence $p_r = L_r / e$: $p^{R*} = p^R / p_r$.

L'adimensionnement fait apparaître deux nombres sans dimension qui fixent la physique du problème : d'une part l'épaisseur optique $E = \beta e$, et d'autre part le nombre de Planck Pl qui a pour expression $Pl = \lambda \beta / n^2 \sigma_{SB} T_r^3$.

Les paramètres choisis pour nos simulations sont renseignés dans le tableau 1. On choisit volontairement une configuration délicate pour mettre à l'épreuve nos modèles. En particulier,

le milieu est absorbant et diffusant, la diffusion est très fortement anisotrope, et le transfert radiatif domine largement le transfert conductif. Les résultats des deux approches sont comparés sur les figures 1 et 2.

Paramètres	Valeurs (sans unités)	Descriptions
N_t	100	Nombre de pas de temps
N_x	100	Nombre de pas d'espace (ou de voxels)
M_r	1e5	Nombre de marcheurs de référence
N_r	1e5	Nombre de rayons lancés par cellule et par surface noire
t_f^*	0.125	Temps final adimensionné
T_e^*	0.5	Température adimensionnée de la surface noire en $x = e$
E	1	Épaisseur optique
Pl	0.1	Nombre de Planck
ω	0.5	Albédo de diffusion
g	0.9	Paramètre de la fonction de phase de Henyey-Greenstein

Tableau 1 : Paramètres du cas traité par les méthodes déterministe et stochastique. Les paramètres M_r et N_r ne concernent que la méthode stochastique ; tous les autres sont communs aux deux méthodes.

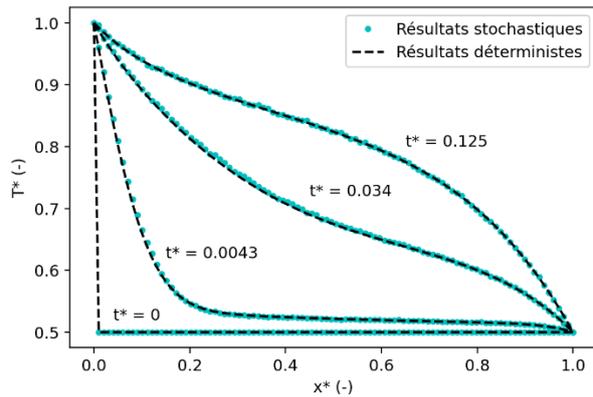


Figure 1 : Profils de température adimensionnée à différents instants t^* .

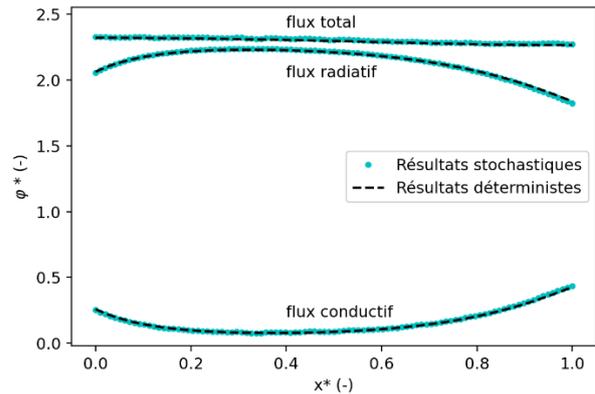


Figure 2 : Profils de flux conductif, radiatif et total adimensionnés à l'instant $t^* = 0.125$.

On observe un excellent accord entre les deux méthodes, ce qui valide notre modèle stochastique. Le tracé des flux à $t^* = t_f^*$ à la figure 2 permet d'observer que le flux total est constant selon x , preuve que le régime thermique asymptotique est atteint à cet instant. Le programme stochastique termine le calcul en 21 secondes (1 seconde pour le lancer de rayons, 20 secondes pour la méthode des marcheurs Browniens) sur 8 processeurs et nécessite 31 Mo de mémoire vive, contre 10 secondes et 90 Mo de mémoire vive pour la méthode déterministe sans parallélisation. Ces écarts devraient se creuser très sensiblement lors du passage à des structures 3D. Il faut cependant noter que la méthode stochastique est particulièrement facile à paralléliser, contrairement à la méthode déterministe, ce qui constitue un très gros avantage de la méthode stochastique pour le passage au 3D.

5. Conclusion

Deux méthodes fondamentalement différentes ont été développées pour la résolution du couplage conducto-radiatif instationnaire dans un milieu semi-transparent 1D homogène, gris,

et borné par deux surfaces noires : la première, déterministe, servant de référence, et la deuxième où les deux phénomènes de transfert sont traités de manière totalement stochastique. Leur comparaison sur un cas où le transfert radiatif est dominant, le milieu est absorbant et diffusant, et la diffusion est très fortement anisotrope, a permis de valider cette nouvelle approche. Cependant, l'application à ce cas académique (milieu homogène et géométrie 1D) reste une preuve de concept. Le modèle stochastique prendra tout son sens lors du passage à des structures 3D hétérogènes. Pour cela, la principale difficulté qu'il reste à résoudre est le comportement d'un marcheur Brownien à l'interface de deux constituants, qui pose problème dans le cas de forts contrastes de propriétés thermophysiques [11].

Références

- [1] J. Ramousse, S. Didierjean, O. Lottin, D. Maillet, Estimation of the effective thermal conductivity of carbon felts used as PEMFC Gas Diffusion Layers, *Int. J. Therm. Sci.* 47 (2008), 1-6.
- [2] A. Kribus, Y. Gray, M. Grijnevich, G. Mittelman, S. Mey-Cloutier, C. Cal, The promise and challenge of solar volumetric absorbers, *Sol. Energy* 110 (2014), 463-481.
- [3] A. Ortona, D. Trimis, V. Uhlig, R. Eder, S. Gianella, P. Fino, G. D'Amico, E. Boulet, C. Chazelas, T. Grämer, E. Cresci, J.G. Wünnig, H. Altena, F. Beneke, M. Debier, SiSiC heat exchangers for recuperative gas burners with highly structured surface elements, *Int. J. Appl. Ceram. Technol.* 11 (2014), 927-937.
- [4] L. Ferrari, M. Barbato, B. Esser, I. Petkov, M. Kuhn, S. Gianella, J. Barcena, C. Jimenez, D. Francesconi, V. Liedtke, A. Ortona, Sandwich structured ceramic matrix composites with periodic cellular ceramic cores: an active cooled thermal protection for space vehicles, *Compos. Struct.* 154 (2016), 61-68.
- [5] M.A. Badri, P. Jolivet, B. Rousseau, Y. Favennec, High performance computation of radiative transfer equation using the finite element method, *J. Comput. Phys.* 360 (2018), 74-92.
- [6] S. Haussener, P. Coray, W. Lipinski, P. Wyss, A. Steinfeld, Tomography-based heat and mass transfer characterization of reticulate porous ceramics for high-temperature processing, *ASME J. Heat Transf.* 132 (2010), 023305.
- [7] L. Penazzi, S. Blanco, C. Caliot, C. Coustet, M. El Hafi, R. Fournier, J. Gautrais, M. Sans, Stardis: propagator evaluation for coupled heat transfer in large geometric models, *HAL Open Science* (2022).
- [8] G.L. Vignoles, W. Ros, I. Szelengowicz, C. Germain, A Brownian motion algorithm for two-scale modeling of chemical vapor infiltration, *Comp. Mater. Sci.* 50 (2011), 1871-1878.
- [9] G.L. Vignoles, A hybrid random walk method for the simulation of coupled conduction and linearized radiation transfer at local scale in porous media with opaque solid phases, *Int. J. Heat Mass Tran.* 93 (2015), 707-719.
- [10] V. Gonneau, Modélisation du transfert thermique par marcheurs Browniens dans des milieux hétérogènes, manuscrit de thèse (Université Paris-Saclay, 2020).
- [11] V. Gonneau, D. Rochais, F. Enguehard, Modelling of heat transfer within heterogeneous media by Brownian walkers, *Int. J. Heat Mass Tran.* 184 (2022), 122261.
- [12] Y. Dauvois, Modélisation du transfert thermique couplé conductif et radiatif au sein de milieux fibreux portés à haute température, manuscrit de thèse, (Université Paris-Saclay, 2016).
- [13] H. H. Michels, Abscissas and Weight Coefficients for Lobatto Quadrature, *Journal Storage*, 17-83 (1963), 237-244.
- [14] M. Tancrez, J. Taine, Direct identification of absorption and scattering coefficients and phase function of a porous medium by a Monte Carlo technique, *Int. J. Heat Mass Tran.* 47 (2) (2004) 373-383.