

# Résolution d'un problème de transferts thermiques couplés en géométrie urbaine par la méthode Monte Carlo

Florent RETAILLEAU<sup>1\*</sup>, Robert SCHOETTER<sup>2</sup>, Vincent FOREST<sup>3</sup>, Cyril CALIOT<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CNRS, UPPA, E2S, LMAP, 1 Allée du Parc Montaury, 64600 Anglet, France

<sup>2</sup> CNRM, Université de Toulouse, Météo-France, CNRS, 42 avenue Gaspard Coriolis, Toulouse, France

<sup>3</sup> MESO-STAR SAS, Longages, France, www.meso-star.com

\*(auteur correspondant : florent.retailleau@univ-pau.fr)

**Résumé** - Pour prévenir et s'adapter aux canicules en zone urbaine, il est nécessaire de disposer d'outils numériques de prédiction des transferts thermiques couplés qui prennent en compte la complexité géométrique de la ville. L'étude qui suit présente un modèle probabiliste de transferts couplés conducto-radiatif linéarisé et transitoire. La méthode de Monte-Carlo (MC) est utilisée pour la résolution du modèle probabiliste avec une randomisation des contributions des différents modes de transferts de chaleur à la paroi. Nous faisons ici la preuve de concept du passage à l'échelle à l'aide du programme Stardis.

## Nomenclature

$C_p$	chaleur spécifique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	$W$	poids MC
$h_c$	coefficient convectif, $W.m^{-2}.K^{-1}$	$\mathbf{y}$	triplet de coordonnées
$h_r$	coefficient radiatif, $W.m^{-2}.K^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
$k$	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	$\alpha$	diffusivité, $m^2.s^{-1}$
$q_0$	flux radiatif, $W.m^{-2}$	$\delta_b$	distance de réinjection, m
$\mathbf{n}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$	vecteur normal	$\rho$	masse volumique, $kg.m^{-3}$
$N$	nombre de rayons lancés	<i>Indices et exposants</i>	
$s$	écart-type	$I$	initial
$t$	temps, s	$s$	surface
$T$	température, K		

## 1. Introduction

Le phénomène d'îlot de chaleur urbain (ICU) accentue les effets des vagues de chaleur qui deviendront plus fréquentes sur des territoires fortement peuplés. Actuellement, 50 % de la population mondiale vit dans des villes et ce chiffre devrait atteindre 70 % d'ici 2050. Pour réduire les problèmes de santé [1] et l'augmentation de la consommation d'énergie causée par la climatisation, qui augmente également la température urbaine [2], il devient urgent de comprendre et de prédire les ICU pour proposer des solutions d'adaptation. Pour ce faire, les décideurs locaux doivent avoir accès à des données scientifiques sur les températures que les villes subiront. Il est essentiel de disposer d'outils numériques de prédiction des transferts thermiques couplés qui prennent en compte la complexité géométrique de la ville. Cependant, il est extrêmement difficile de tenir compte de la géométrie complexe des villes, de l'hétérogénéité des matériaux urbains et de la diversité des processus physiques qui se déroulent à des échelles très variées [3]. Néanmoins, différentes approches ont été développées, soit en utilisant une géométrie simplifiée [4, 5], soit en appliquant le modèle à de petits domaines sur de courtes périodes de temps [6, 7].

Ces dernières années, une nouvelle approche de la résolution a été développée. Elle consiste à

formuler le problème sous forme intégrale puis à utiliser une technique de résolution stochastique. MC permet une résolution précise des échanges de chaleur et une vision des chemins de propagation des sources qui aide à mieux comprendre et prédire les échanges de chaleur en milieu urbain [8, 9]. Le logiciel de simulation thermique 3D Stardis (<https://www.meso-star.com/projects/stardis/stardis.html>) est utilisé pour calculer la température (par exemple avec un calcul sonde en un point) avec de nouveaux algorithmes MC résolvant les transferts thermiques couplés. Les progrès récents de l'informatique ont rendu cette approche très efficace. En particulier, les structures accélératrices d'accès à la donnée ont permis de rendre les temps de calcul sonde insensibles à la complexité de la donnée. MC est une méthode massivement parallélisable, ce qui rend théoriquement possible le passage à l'échelle des simulations pour être appliquées à la ville.

Dans cette étude, le modèle de transferts couplés est présenté et une preuve de concept de ce passage à l'échelle est donnée avec le programme Stardis enrichi d'un modèle de ciel pour les rayonnements solaire et thermique. La validation numérique du code est obtenue par comparaison avec une méthode déterministe dans une géométrie simplifiée. Ensuite, la méthode est appliquée au calcul du flux de chaleur montant au-dessus d'une géométrie urbaine simplifiée.

## 2. Description du système

### 2.1. Formulation intégrale du problème

Le modèle vise à calculer la température de surface  $T_s$  de tout point  $y$  de la géométrie à l'interface entre le solide et le fluide en fonction du temps  $t$ . L'équation de la chaleur, Eq. 1, est résolue dans des milieux solides homogènes et isotropes (transparents ou opaques au rayonnement) sans source appartenant à un domaine  $\mathcal{D}_S$  avec une frontière  $\partial\mathcal{D}_S$  dont les surfaces sont des interfaces solide-solide ( $\partial\mathcal{D}_{S,S}$ ) ou solide-fluide ( $\partial\mathcal{D}_{S,F}$ ) :

$$\frac{\partial}{\partial t} T_s(\mathbf{y}, t) = \alpha \Delta T_s(\mathbf{y}, t), \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad (1)$$

avec  $\rho$  la densité,  $C_p$  la chaleur spécifique du matériau et  $k$  la conductivité thermique. Les conditions aux limites du système sont les suivantes :

$$T_s(\mathbf{y}, t) = T_I(\mathbf{y}), \quad t < t_I,$$

$$-k \nabla T_s(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{n} = h(\mathbf{y}, t) [T_s(\mathbf{y}, t) - T_F(\mathbf{y}, t)] + h_r(\mathbf{y}, t) [T_s(\mathbf{y}, t) - T_r(\mathbf{y}, t)] + q_o(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \partial\mathcal{D}_{S,F}, \quad t > t_I \quad (2)$$

$$k_1 \nabla T_s(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{n}_1 = k_2 \nabla T_s(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{y} \in \partial\mathcal{D}_{S,S}, \quad (3)$$

avec  $T_I$  la température au temps initial ( $t_I$ ),  $T_F$  la température du fluide,  $T_r$  la température radiative,  $\mathbf{n}$  la normale sortante du domaine,  $h$  le coefficient d'échange par convection,  $h_r$  le coefficient d'échange radiatif linéarisé et  $q_0$  le flux solaire absorbé. Dans l'équation 3, on suppose que le transfert radiatif peut être linéarisé par rapport à la température autour d'une température de référence donnée  $T_{ref}$ , ce qui signifie que  $T^4 \approx T_{ref}^4 + 4T_{ref}^3(T - T_{ref})$  ce qui conduit à  $h_r = 4\epsilon\sigma T_{ref}^3$ . Avec un système de transfert de chaleur linéarisé comme celui-ci, il est possible d'évaluer un propagateur pour chacune des sources d'énergie de sorte que la température à un endroit et un instant donnés peut être exprimée comme une simple somme de toutes les

sources à tous les moments précédents, multipliée par leur propagateur correspondant. Ainsi, l'algorithme MC évalue une température locale à un endroit donné et à un moment donné (calcul sonde) en explorant l'espace et le temps (à rebours) pour trouver les sources en utilisant une marche aléatoire sur des sphères dans le solide (conduction) et une marche de multiple réflexions entre parois opaques (rayonnement). De plus, la technique de double randomisation aboutit à la connexion de ces marches aléatoires à l'interface solide-fluide. L'équation 2 peut être écrite sous forme probabiliste :

$$T_s(\mathbf{y}, t) = P_c T_s(\mathbf{y} - \delta_b, t) + P_v T_F + P_r T_r + \frac{q_0}{h_{tot}}, \quad (4)$$

avec

$$P_c = \frac{k}{\delta_b h_{tot}}; P_v = \frac{h}{h_{tot}}; P_r = \frac{h_r}{h_{tot}},$$

$$h_{tot} = \frac{k}{\delta_b} + h + h_r,$$

et  $\delta_b$  une distance de ré-injection dans le solide qui doit être petite afin de représenter au mieux le gradient normal à la frontière.  $P_c$ ,  $P_v$  et  $P_r$  sont les probabilités de transfert conductif, convectif et radiatif, respectivement, de sorte que,  $P_c + P_v + P_r = 1$ . À cette interface, la température est inconnue et le chemin aléatoire continue en enregistrant le terme lié à la source solaire puis en démarrant aléatoirement un nouveau chemin en conduction ou rayonnement. En effet, si le mode convectif est aléatoirement choisi, la température du fluide est retenue et le chemin s'arrête. De même, si le chemin conductif remonte jusqu'à  $t_I$ , le chemin s'arrête et retient la température initiale.

## 2.2. Transferts de chaleur couplés

### 2.2.1. Fonctionnement de Stardis

Le code Stardis est basé sur une approche MC *reverse* pour estimer la solution d'un problème linéaire de transfert de chaleur. Cette approche permet de remonter le temps entre le point de mesure et la source de chaleur en échantillonnant les chemins thermiques à travers le système. Dans ce cas, cela implique une définition complète des sources, afin d'englober toutes les informations ayant un impact sur la solution, ce qui inclut : les flux de surface imposés ainsi que toutes les températures limites imposées et le champ de température initial. Le concept clé ici est que les phénomènes de transfert de chaleur ne sont pas considérés séparément mais sont naturellement couplés via la récursion croisée des différents algorithmes MC. Ici, la grandeur d'intérêt est la température de surface du bâtiment  $T_s(\mathbf{y}, t)$ . Pour chaque point de mesure,  $N$  chemins thermiques sont échantillonnés dont chacun possède le poids MC,  $W_i$ . Ensuite, ces poids sont moyennés afin de produire une estimation de la quantité d'intérêt ( $\tilde{T}_s$ ). De plus, grâce aux propriétés de la méthode MC, l'erreur standard  $\sigma$ , reliée à l'intervalle de confiance associée à l'estimation MC de la grandeur peut être facilement calculée.

$$T_s(\mathbf{y}, t) = \int_{2\pi} p_{\Omega} d\Omega(\omega) W \quad (5)$$

$$T_s(\mathbf{y}, t) \approx \frac{1}{N} \sum_i^N W_i = \tilde{T}_s \quad (6)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i^N W_i^2 - \tilde{T}_s^2} \quad (7)$$

Le fonctionnement du logiciel est présenté de manière simplifiée dans le schéma de la Fig. 1. Le schéma montre les différents types de chemin thermique qu'il est possible de tracer jusqu'à une source :

- ① : Chemin conductif vers une température imposée
- ② : Flux solaire, flux imposé
- ③ : Transfert par convection, température du fluide
- ④ : Chemin conductif vers la température initiale
- ⑤ : Trajet radiatif et absorption par le milieu, température de surface
- ⑥ : Chemin radiatif avec phénomène de réflexion

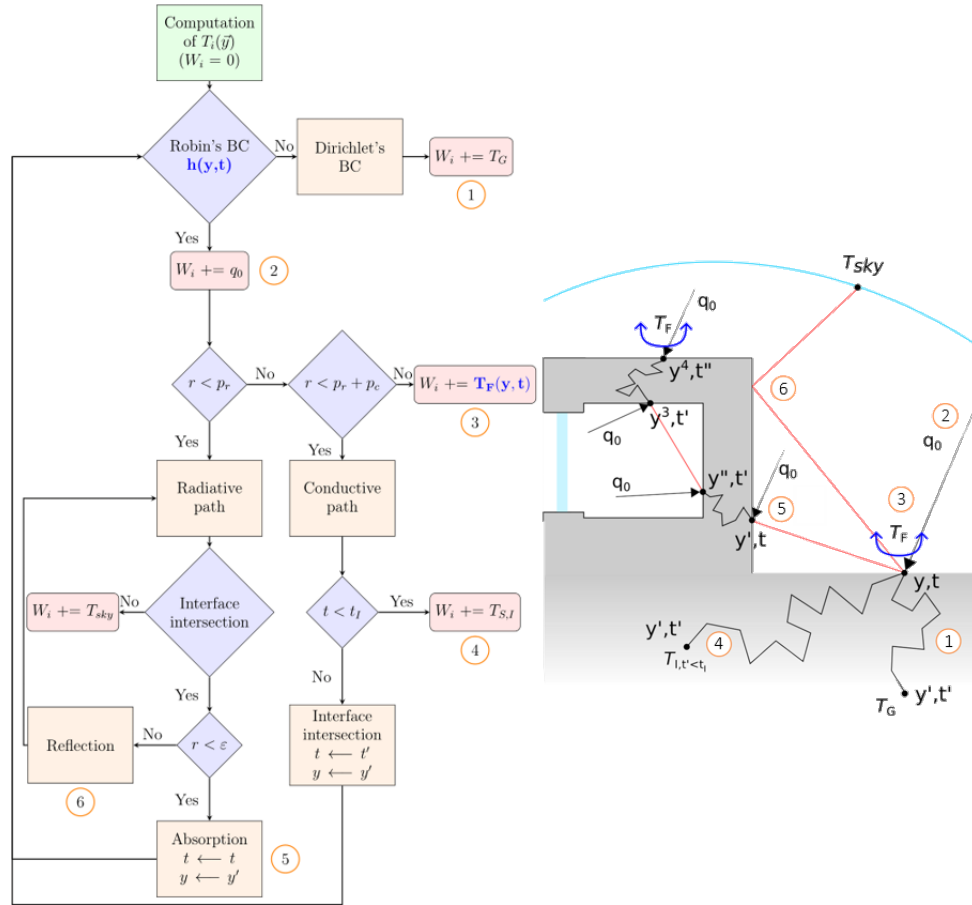


Figure 1 : Organigramme algorithmique de Stardis et exemples de chemins aléatoires

### 2.2.2. Flux solaire absorbé

La prise en compte du flux solaire absorbé  $q_0$  dans Stardis a été réalisée. L'expression de  $q_0$  ( $\text{W m}^{-2}$ ) à la position  $\mathbf{y}_i$  est donnée par :

$$q_0(\mathbf{y}_i, t) = \int_{2\pi} I_0(\mathbf{y}_i, t, -\boldsymbol{\omega}_i) \varepsilon(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\omega}_i) |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}_i| d\Omega_i$$

avec  $\varepsilon$  l'émissivité du matériau opaque, ici égale à l'absorptivité,  $\boldsymbol{\omega}_i$  la direction du rayon depuis  $\mathbf{y}_i$  et  $I_0$  la luminance solaire. Pour améliorer la convergence du MC,  $I_0$  est divisée en deux parties, le rayonnement solaire direct  $I_d(\mathbf{y}_i, -\boldsymbol{\omega}_d)$  et le rayonnement diffus  $I_s(\mathbf{y}_i, -\boldsymbol{\omega}_i)$  qui

comprend les phénomènes de réflexion et de diffusion :

$$I_0(\mathbf{y}_i, t, -\boldsymbol{\omega}_i) = I_d(\mathbf{y}_i, t, -\boldsymbol{\omega}_d) + I_s(\mathbf{y}_i, t, -\boldsymbol{\omega}_i) \quad (8)$$

La figure 2 montre les différents chemins possibles pour le flux solaire. Les flèches pleines représentent le flux solaire direct et les flèches en pointillés représentent le flux solaire diffus.

- ① : Flux solaire direct (*direct normal irradiation, DNI*)
- ② : Réflexion du chemin diffus
- ③ : Pas d'irradiation solaire directe, ombrage
- ④ : Flux solaire diffus absorbé après avoir pénétré dans un bâtiment

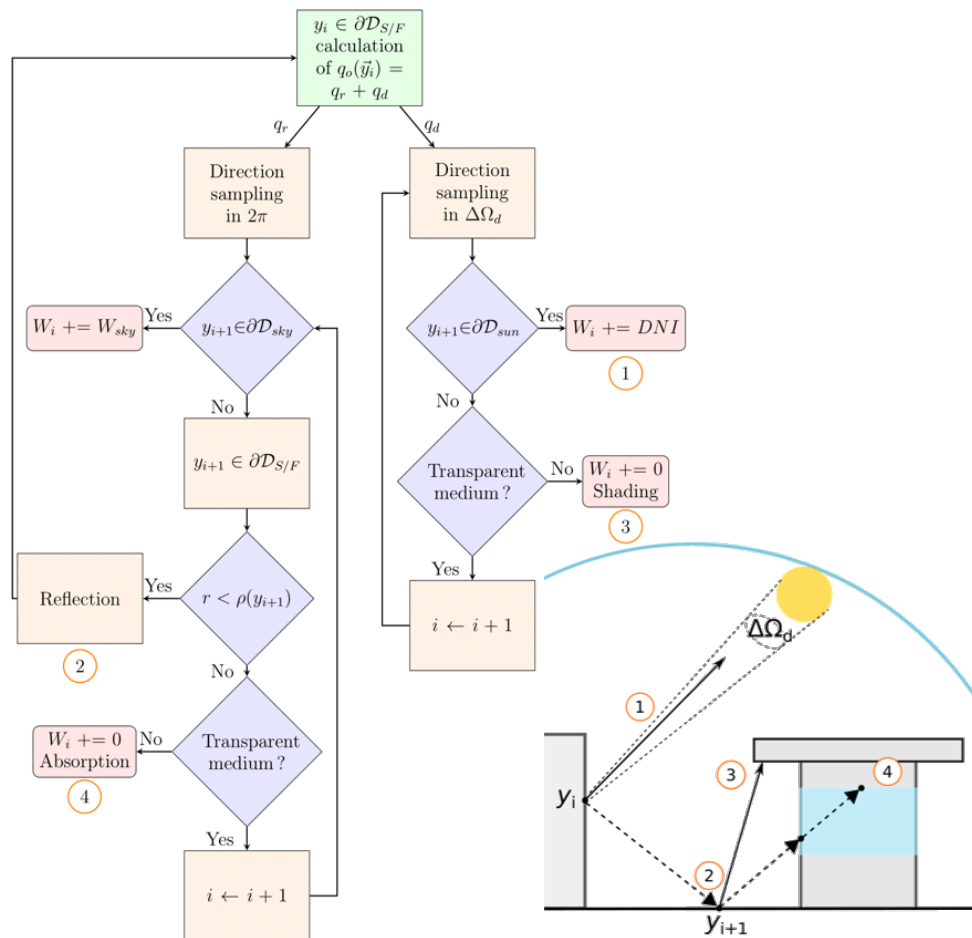


Figure 2 : Organigramme algorithmique et exemples de chemins pour des contributions directes et diffuses à  $q_0$

### 3. Validation et résultats

#### 3.1. Validation

L'approche a été validée pour une géométrie mono-dimensionnelle, ici une dalle homogène de béton de longueur et largeur  $L$  et d'épaisseur  $e$  où  $L \gg e$  comme le montre la Fig. 3. Ainsi, la dalle est considérée d'étendue infinie dans les directions  $x$  et  $y$ . Les résultats du modèle probabiliste présenté sont comparés avec des résultats obtenus avec une méthode de différences finies (DF). Les conditions limites sont les suivantes :

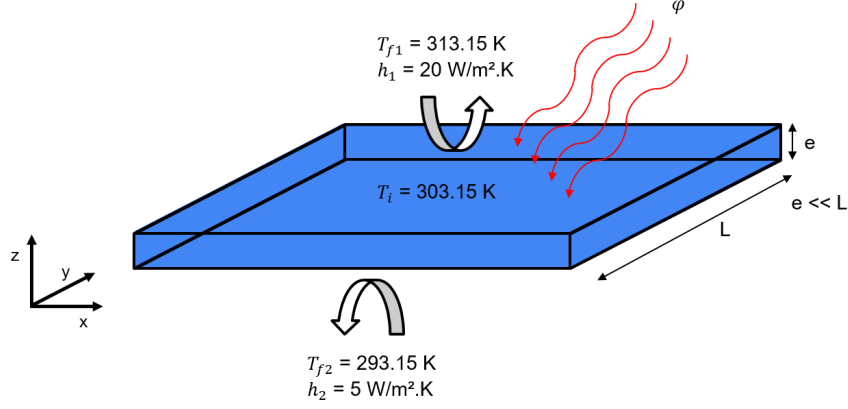


Figure 3 : Géométrie 1D et conditions limites pour la configuration de validation

$$\begin{aligned}
 T_s(z, t) &= T_i, & t < t_i, \\
 -k \nabla T_s(z, t) \cdot \mathbf{n} &= h_2(T_s(z, t) - T_{f2}), & z = 0, \\
 -k \nabla T_s(z, t) \cdot \mathbf{n} &= h_1(T_s(z, t) - T_{f1}) + \varphi, & z = e.
 \end{aligned}$$

$h_1$  et  $h_2$  sont les coefficients de convection et  $T_{f1}$  ainsi que  $T_{f2}$  sont les températures du fluide au-dessus et en dessous de la dalle, respectivement.  $\varphi$  est la densité de flux radiatif appliquée sur la face supérieure de la dalle. Deux cas ont été étudiés, dans un cas  $\varphi = 0$  et dans l'autre cas  $\varphi = 900 \text{ W.m}^{-2}$ . Seuls les résultats pour le second cas sont présentés ici pour des raisons de concision. Pour comparer les deux modèles, la température a été calculée en trois points différents le long du temps :  $T1 \equiv T_s(z = e, t)$  la température de la face supérieure,  $T2 \equiv T_s(z = 0, t)$  la température de la face arrière et  $T_{center} \equiv T_s(z = e/2, t)$  la température au centre de la dalle. Le calcul MC a été effectué avec  $10^6$  réalisations. Les résultats obtenus sont présentés dans la Fig. 4. L'écart entre les températures calculées par DF et MC est compris dans l'intervalle de confiance de MC (Fig. 4b). Cela valide ainsi notre approche. On note aussi que la barre d'erreur ( $\pm \tilde{\sigma}$ ) diminue proche de l'instant initial ( $t_I = 0$ ) et augmente à des temps élevés. En effet, les sources échantillonnées sont plus nombreuses à mesure que le temps du calcul est éloigné de la condition initiale et l'intervalle de confiance traduit cette dispersion des poids MC.

### 3.2. Résultats

Cette méthode a ensuite été testée sur un cas réaliste. L'objectif est ici de calculer le flux radiatif montant lors d'une vague de chaleur en été. Les flux montants sont, entre autres, utilisés dans les modèles météorologiques à meso-échelles pour caractériser l'effet d'ICU. Ces modèles calculent le flux montant de la ville en simplifiant la géométrie (rues canyons, quadrillage de blocs) et en utilisant principalement la méthode des radiosités pour les transferts radiatifs. Cependant, ils ne sont pas pratiques dans les géométries urbaines comportant des formes complexes et de nombreux matériaux avec des réflectivités différentes (spéculaires et diffuses). Le modèle probabiliste présenté résout la thermique couplée et prend en compte la complexité géométrique de la ville. La géométrie de l'expérience COSMO [10] est considérée dans cette étude. Elle est composée de  $15 \times 30$  cubes de béton creux (de côté 1.5 m et d'épaisseur 5 cm) assimilés à un quartier idéalisé à l'échelle 1/5. La figure 5 présente les températures équivalentes corps noirs au cours d'un 25 juin (ciel clair) et permet notamment de visualiser l'impact du flux solaire sur la distribution spatiale des températures équivalentes corps noir.

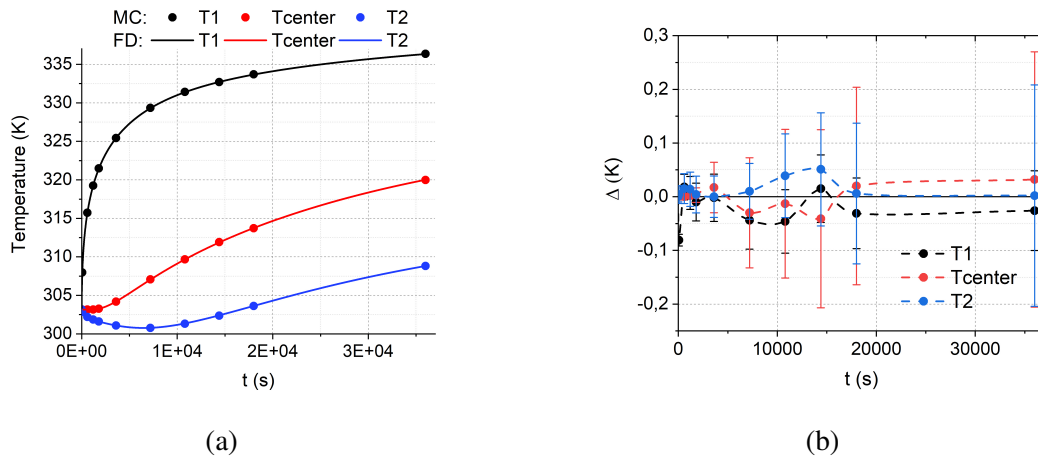


Figure 4 : Température au-dessus, à l'intérieur et sous une dalle de béton homogène calculée avec une méthode des différences finies et une méthode MC pour un  $\varphi = 900 \text{ W.m}^{-2}$  (a) et la différence de température  $\Delta$  entre les deux méthodes (b).

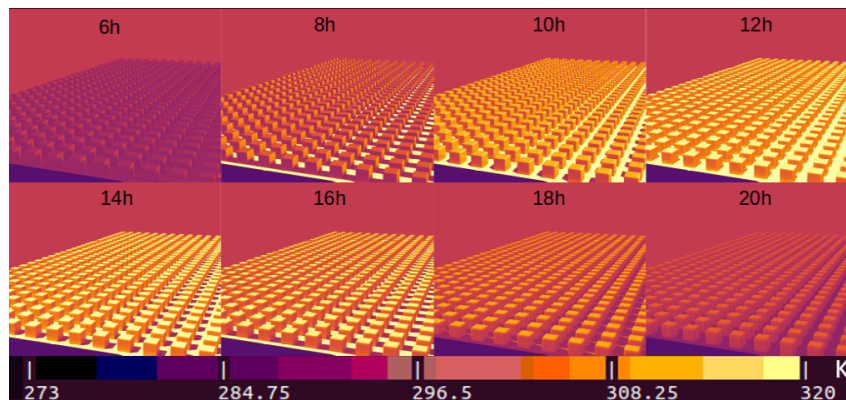


Figure 5 : Température de corps noir pour la géométrie COSMO à différents instants dans la journée.

Le flux radiatif montant et le flux solaire global (DNI et diffus) incident sont tracés en fonction du temps pendant une journée dans la Fig. 6a. Le flux radiatif montant est maximum lorsque l'angle d'élévation du soleil est le plus élevé. En effet, la présence d'ombrage diminue le flux solaire absorbé par la géométrie et la température de surface des blocs bétons. Malgré un flux solaire faible en fin de journée, les refroidissements radiatif et convectif de la géométrie sont freinés par l'inertie thermique du domaine. Le flux radiatif net échangé entre la géométrie et le ciel est tracé dans la Fig. 6b. La température radiative du ciel est considérée constante à  $T_{rad} = 273 \text{ K}$ . On constate un décalage entre les valeurs maximales des deux grandeurs qui résulte de l'influence prépondérante du flux solaire sur les transferts thermiques couplés ( $h = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ ). Le calcul a été réalisé avec  $N = 10^7$  réalisations. L'ordre de grandeur des intervalles de confiance ( $\pm \tilde{\sigma}$ ) est de  $10^{-2} \text{ W m}^{-2}$  (elles ne sont donc pas visibles).

#### 4. Conclusion

Cette étude montre qu'il est possible de réaliser des simulations de transferts couplés dans des géométries de grandes tailles et ainsi lever certains verrous associés à la gestion des discrétisations par les modèles déterministes. Le passage à l'échelle est mis en évidence dans une simula-

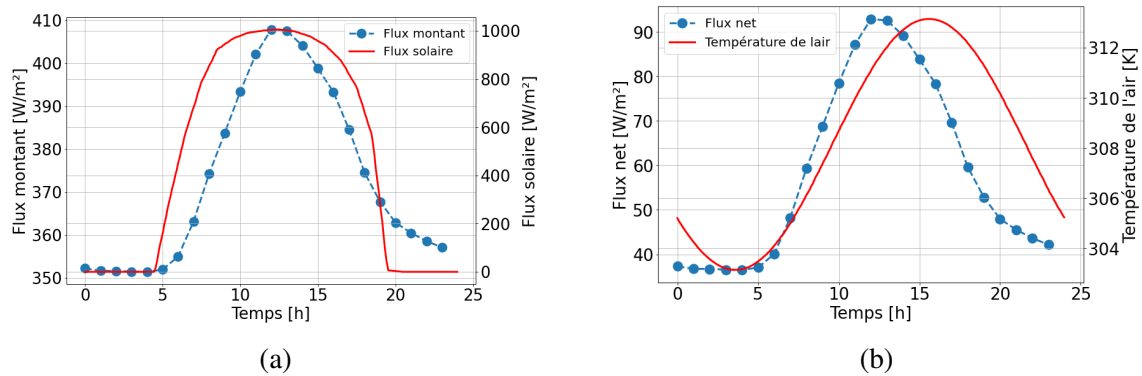


Figure 6 : Flux montant (a) et flux net échangé (b) au cours d'une journée ensoleillée de juin.

tion en géométrie urbaine réaliste comportant des données spatiales et temporelles complexes pour la résolution des transferts thermiques en milieu urbain. La méthode proposée et son implémentation dans un logiciel libre permet de poser de nouvelles questions scientifiques comme celle du couplage de la thermique urbaine avec des simulations micro-météorologiques d'écoulement en vue de prédiction ou de développement de modèles de paramétrisation. Cette étude a été réalisée dans le cadre du projet MC2 financé par l'ANR (ANR-21-CE46-0013).

## Références

- [1] S. N. Gosling, et al., Associations between elevated atmospheric temperature and human mortality : a critical review of the literature, *Climatic Change* 92 (3) (2009-02) 299–341.
- [2] C. de Munck, et al., How much can air conditioning increase air temperatures for a city like paris, france ?, *International Journal of Climatology* 33 (1) (2013) 210–227.
- [3] T. Oke, G. Mills, A. Christen, J. Voogt, *Urban Climates*, Cambridge University Press, 2017.
- [4] V. Masson, A physically-based scheme for the urban energy budget in atmospheric models, *Boundary-Layer Meteorology* 94 (3) (2000-03-01) 357–397.
- [5] D. Jacob, et al., EURO-CORDEX : new high-resolution climate change projections for european impact research, *Regional Environmental Change* 14 (2) (2014-04-01) 563–578.
- [6] B. Maronga, et al., Overview of the PALM model system 6.0, *Geoscientific Model Development* 13 (3) (2020) 1335–1372.
- [7] F. Miguët, D. Groleau, A daylight simulation tool for urban and architectural spaces—application to transmitted direct and diffuse light through glazing, *Building and Environment* 37 (8) (2002-08-01) 833–843.
- [8] C. Caliot, et al., Combined conductive-radiative heat transfer analysis in complex geometry using the monte carlo method, *Eurotherm Seminar 110 - Computational Thermal Radiation in Participating Media - VI* (2018).
- [9] L. Ibarret, et al., Combined conductive-convective-radiative heat transfer in complex geometry using the monte carlo method, in : *IHTC 16 - 16th International Heat Transfer Conference*, 2018-08, p. 8 p.
- [10] M. Kanda, et al., A comprehensive outdoor scale model experiment for urban climate, *sixth international conference on urban climate* (2006) 270–282.