

# Modèle semi-analytique d'un caloduc capillaire cylindrique en régime transitoire avec conditions aux limites de flux imposés

Nicolas BLET<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Université de Lorraine, CNRS, LEMTA, F-54000 Nancy, France

\*(auteur correspondant : nicolas.blet@univ-lorraine.fr)

**Résumé** - Ce papier expose le développement et la validation d'un modèle semi-analytique de caloduc capillaire cylindrique soumis à des conditions axisymétriques simplifiées de flux imposés à l'évaporateur et au condenseur en régime transitoire. Ce modèle se base de manière originale sur une double transformée intégrale de Fourier et de Laplace et sur une représentation par quadripôles thermiques pour évaluer les transferts de chaleur. En outre, les profils axiaux de pression et de vitesse des écoulements vapeur et liquide sont déterminés en fonction des harmoniques thermiques.

## Nomenclature

$a$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$	$\lambda$	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$g$	accélération de pesanteur, $m.s^{-2}$	$\mu$	viscosité dynamique, Pa.s
$h$	coefficient d'échange, $W.m^{-2}$	$\rho$	masse volumique, $kg.m^{-3}$
$h_v$	chaleur latente, $J.kg^{-1}$	$\phi$	flux radial, $W.m^{-1}$
$k$	perméabilité, $m^2$	$\Phi$	variation de flux radial, $W.m^{-1}$
$L$	longueur du caloduc, m	$\chi$	fonction indicatrice
$p$	variable de Laplace, $s^{-1}$	<i>Indices et exposants</i>	
$P$	pression, Pa	$\infty$	ambiance
$q$	source de flux de chaleur, $W.m^{-1}$	$\tilde{f}$	transformée de Laplace de $f$
$Q$	source totale de chaleur, W	$\tilde{f}$	transformée de Fourier de $f$
$r$	abscisse radiale, m	$0$	initial(e)
$R$	rayon, m	$C$	condenseur
$t$	temps, s	$eq$	équivalent(e)
$T$	température, K	$E$	évaporateur
$u$	vitesse, $m.s^{-1}$	$i$	intérieur
$x$	abscisse axiale, m	$l$	liquide
$Z$	impédance thermique, $K.W^{-1}$	$o$	extérieur
<i>Symboles grecs</i>		$sat$	saturation
$\alpha_n$	valeurs propres spatiales, $m^{-1}$	$v$	vapeur
$\gamma$	angle du caloduc avec l'horizontal	$w$	poreux
$\Theta$	variation de température, K		

## 1. Introduction

De nombreux modèles numériques de caloducs ont été développés pour simuler leur fonctionnement en régime permanent [1-2] ou transitoire [3-4]. Ils s'appuient le plus souvent sur une résolution par éléments ou volumes finis, ou sur des méthodes plus récentes comme Lattice-Boltzmann [5]. Ils sont par contre encore assez coûteux en temps de calcul pour un dimensionnement à la fois précis et rapide. Ainsi, des développements analytiques sont toujours présents dans la littérature actuelle [6-7].

Un modèle analytique en régime permanent a ainsi été récemment développé pour simuler les transferts de conduction 2D [8] ou 3D [9] au sein de l'enveloppe et du poreux du caloduc, ainsi que les écoulements liquide et vapeur. Ce modèle se base notamment sur une représentation par quadripôles thermiques et sur l'évaluation de transformées intégrales de Fourier. Une résolution analytique directe ou itérative a été mise en place selon la nature des conditions aux limites externes et le couplage thermodynamique à l'interface liquide-vapeur.

En se basant sur ces derniers travaux, cet article présente un modèle semi-analytique en régime transitoire avec des conditions aux limites simplifiées.

## 2. Description du problème

### 2.1. Hypothèses et conditions aux limites

On étudie ici un problème axisymétrique d'un caloduc cylindrique, les sources à l'évaporateur et au condenseur étant donc supposées uniformes autour de l'axe du caloduc. Alors que les transferts de chaleur 2D sont évalués au sein de la paroi et de la mèche poreuse, les écoulements vapeur et liquide sont considérés unidirectionnels. Le fonctionnement du caloduc est supposé normal, avec aucun effet thermique de la courbure de l'interface liquide-vapeur ou d'un bouchon liquide au condenseur. Les propriétés thermiques (conductivité et diffusivité) des solides et du fluide sont considérées constantes. En outre, une conductivité et une diffusivité thermique équivalentes sont supposées pour estimer les transferts au sein de la mèche poreuse saturée de liquide. Les autres propriétés thermodynamiques du fluide peuvent varier suivant la température de fonctionnement du caloduc, mais pourront être considérées constantes dans le cas de variations autour d'un équilibre par exemple.

On considère ici pour simplifier la résolution avec conditions de flux imposés à l'évaporateur  $q_E$  et au condenseur  $q_C$  (Fig. 1). Ces flux peuvent être non-uniformes sur les longueurs associées. En outre, on peut les considérer comme une unique source  $q(x,t)$ . En plus de ces conditions, des pertes thermiques par convection sur toute la longueur du caloduc sont prises en compte, en supposant un coefficient d'échange  $h_\infty$  constant, mais une possible variation de la température ambiante  $T_\infty(t)$ . Les parois latérales sont supposées adiabatiques.

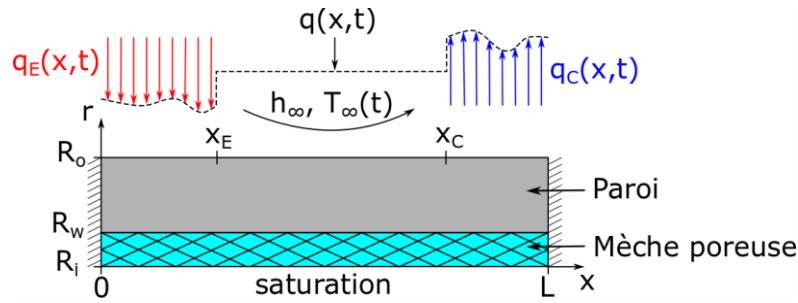


Figure 1 : Illustration du système thermique modélisé

### 2.2. Condition initiale

L'état initial thermique et hydraulique du système est supposé connu parfaitement. En effet, le modèle en régime permanent [8] précédemment développé permet de fournir l'ensemble des champs de température et de flux de chaleur, ainsi que les profils de pression et de vitesse des écoulements à partir des conditions aux limites initiales.

## 3. Développement de la modélisation

### 3.1. Modèle thermique par méthode quadripolaire

Sous les conditions axisymétriques, le transfert conductif au sein de la paroi et de la mèche poreuse suit la loi de Fourier en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Pour faciliter la résolution, on introduit la variable en température  $\Theta(x,r,t) = T(x,r,t) - T^0(x,r)$ , avec  $T^0(x,r)$  la température initiale à  $t = 0$ . La transformée de Laplace de l'équation de la chaleur s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial r} \right) = \frac{p}{a} \bar{\Theta} \quad (2)$$

A partir des conditions en  $x = 0$  et  $x = L$ , on définit la transformée intégrale de Fourier :

$$\tilde{\Theta}_n(r, p) = \int_{x=0}^{x=L} \bar{\Theta}(x, r, p) \cos(\alpha_n x) dx \quad (3)$$

où les valeurs propres  $\alpha_n$  sont définies pour tout entier naturel  $n$  par  $\alpha_n = n\pi/L$ . La transformée de Fourier inverse associée est alors :

$$\bar{\Theta}(x, r, p) = \frac{\tilde{\Theta}_0(r, p)}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Theta}_n(r, p) \cos(\alpha_n x) \quad (4)$$

La transformée de Fourier de l'équation (2) donne les équations différentielles vérifiées par les harmoniques  $\tilde{\Theta}_n$  :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{\Theta}_n}{\partial r} \right) - \left( \alpha_n^2 + \frac{p}{a} \right) \tilde{\Theta}_n = 0 \quad (5)$$

En introduisant la double transformée de la variable de flux de chaleur radial,  $\Phi = -2\pi\lambda r \partial\Theta/\partial r$ , correspondant à la différence entre les flux radiaux courant et initial, la relation quadripolaire suivante est écrite pour une couche de conductivité et diffusivité constantes entre deux rayons  $R_1$  et  $R_2$  :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_n \\ \tilde{\Phi}_n \end{pmatrix}_{r=R_2} = \begin{pmatrix} \bar{A}_n & \bar{B}_n \\ \bar{C}_n & \bar{D}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_n \\ \tilde{\Phi}_n \end{pmatrix}_{r=R_1} \quad (6)$$

Les expressions des coefficients quadripolaires [10] sont fournies dans le tableau 1.

$\bar{A}_n$	$\beta_n R_1 [I_0(\beta_n R_2) K_1(\beta_n R_1) + I_1(\beta_n R_1) K_0(\beta_n R_2)]$
$\bar{B}_n$	$[I_0(\beta_n R_1) K_0(\beta_n R_2) - I_0(\beta_n R_2) K_0(\beta_n R_1)] / 2\pi\lambda$
$\bar{C}_n$	$2\pi\lambda \beta_n^2 R_1 R_2 [I_0(\beta_n R_1) K_0(\beta_n R_2) - I_0(\beta_n R_2) K_0(\beta_n R_1)]$
$\bar{D}_n$	$\beta_n R_2 [I_0(\beta_n R_1) K_1(\beta_n R_2) + I_1(\beta_n R_2) K_0(\beta_n R_1)]$
$\beta_n = \sqrt{\alpha_n^2 + p/a}$	
$I_j$ et $K_j$ sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre $j$ , de première et seconde espèce.	

Tableau 1 : Coefficients quadripolaires

Le problème conductif global avec deux couches (paroi + poreux) peut être alors mis sous forme quadripolaire reliant les conditions interne et externe :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_n \\ \tilde{\Phi}_n \end{pmatrix}_{r=R_o} = \begin{pmatrix} \bar{A}_n & \bar{B}_n \\ \bar{C}_n & \bar{D}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_n \\ \tilde{\Phi}_n \end{pmatrix}_{r=R_i} \quad (7)$$

où la matrice quadripolaire est le produit des deux matrices de chacune des couches.

En plus de ce modèle quadripolaire, on suppose que la température de saturation à l'interface est uniforme. Cette hypothèse est nécessaire afin de traiter analytiquement le cas général où les propriétés thermodynamiques du fluide varient significativement, par exemple lors d'un démarrage ou plus généralement lors de grandes variations de température de fonctionnement. Cela implique, par couplage thermodynamique, que les pertes de charge vapeur ne soient pas prépondérantes au sein du système, typiquement pour des caloducs de taille standards (diamètre suffisamment grand). Cela entraîne que les harmoniques  $\tilde{\Theta}_n$  soient nuls en  $r = R_i$ . En outre, l'expression du fondamental en température est exprimée sous la forme :

$$\tilde{\Theta}_0 \Big|_{r=R_i} = L(\bar{T}_{sat}(p) - T_{sat}^0/p) = L\bar{\Theta}_{sat} \quad (8)$$

En négligeant l'inertie thermique de la vapeur, le bilan d'énergie sur la totalité du volume de vapeur implique en outre que  $\tilde{\Phi}_0 \Big|_{r=R_i} = 0$ .

### 3.2. Modèle hydraulique

#### 3.2.1. Écoulement vapeur

##### 3.2.1.1. Profil de vitesse

Le profil de vitesse axiale de l'écoulement vapeur est supposé parabolique :

$$u_x(x, r, t) = 2u_v(x, t) \left(1 - \frac{r^2}{R_i^2}\right) \quad (9)$$

avec  $u_v(x, t)$  vitesse moyenne axiale.

En négligeant la compressibilité, le bilan de masse de cet écoulement s'écrit :

$$r \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} = 0 \quad (10)$$

L'intégration de ce bilan entre 0 et  $r$  fournit la vitesse radiale :

$$u_r(x, r, t) = -r \left(1 - \frac{r^2}{R_i^2}\right) \frac{\partial u_v}{\partial x} \quad (11)$$

La vitesse moyenne en  $r = R_i$  est liée directement au changement de phase par :

$$\frac{\partial u_v}{\partial x} = - \frac{\phi \Big|_{r=R_i}}{\pi R_i^2 \rho_v h_{lv}} \quad (12)$$

En intégrant l'équation (12) entre 0 et  $x$ , et en introduisant la vitesse moyenne axiale initiale, le développement en série de Fourier de  $u_v$  peut s'écrire :

$$u_v(x, t) = \frac{\rho_v^0 h_{lv}^0}{\rho_v h_{lv}} u_v^0(x) - \frac{2}{\pi R_i^2 \rho_v h_{lv} L} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_n \Big|_{r=R_i} \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \quad (13)$$

##### 3.2.1.2. Profil de pression

En supposant l'écoulement vapeur unidirectionnel et en négligeant le terme de compressibilité, le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial P_v}{\partial x} = \mu_v \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right) - \rho_v \left( u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - \rho_v \frac{\partial u_x}{\partial t} \quad (14)$$

A partir des expressions de  $u_x$  (Eq. (9)) et  $u_r$  (Eq. (11)), la pression moyenne sur le profil de vitesse vérifie :

$$\frac{\partial P_v}{\partial x} = \frac{-8\mu_v}{R_i^2} u_v + \mu_v \frac{\partial^2 u_v}{\partial x^2} - \frac{4}{3} \rho_v \frac{\partial u_v}{\partial x} - \rho_v \frac{\partial u_v}{\partial t} \quad (15)$$

En supposant que la pression moyenne axiale correspond à la pression de saturation à la température  $T_{sat}(t)$  (courbe de saturation linéarisable), l'intégration entre 0 et  $x$  de l'équation (15) fournit le profil de pression (après tout développement effectué) :

$$\begin{aligned} P_v(x, t) = & P_{sat}(T_{sat}) + \frac{\rho_v^0 h_{lv}^0 / \mu_v^0}{\rho_v h_{lv} / \mu_v} \left( p_v^0(x) - P_{sat}(T_{sat}^0) \right) + \frac{16}{3\pi^2 R_i^4 \rho_v^0 h_{lv}^0 L^2} \left( \frac{h_{lv}^0}{h_{lv}} - \frac{\mu_v}{\mu_v^0} \right) \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}_n^0 \Big|_{r=R_i}^2}{\alpha_n^2} - \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}_n^0 \Big|_{r=R_i}}{\alpha_n} \sin(\alpha_n x) \right)^2 \right) \\ & - \frac{2}{\pi R_i^2 \rho_v h_{lv} L} \left[ \frac{8\mu_v}{R_i^2} + \rho_v \frac{\partial}{\partial t} \right] \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_n \Big|_{r=R_i}}{\alpha_n^2} \cos(\alpha_n x) \right) - \frac{2\mu_v}{\pi R_i^2 \rho_v h_{lv} L} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_n \Big|_{r=R_i} \cos(\alpha_n x) \\ & + \frac{32}{3\pi^2 R_i^4 \rho_v h_{lv}^2 L^2} \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_n \Big|_{r=R_i}}{\alpha_n^2} \frac{\tilde{\phi}_n^0 \Big|_{r=R_i}}{\alpha_n} - \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_n \Big|_{r=R_i}}{\alpha_n} \sin(\alpha_n x) \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}_n^0 \Big|_{r=R_i}}{\alpha_n} \sin(\alpha_n x) \right) \right) \\ & + \frac{16}{3\pi^2 R_i^4 \rho_v h_{lv}^2 L^2} \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_n \Big|_{r=R_i}^2}{\alpha_n^2} - \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_n \Big|_{r=R_i}}{\alpha_n} \sin(\alpha_n x) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (16)$$

### 3.2.2. Écoulement liquide

#### 3.2.2.1. Profil de vitesse

A partir d'un développement similaire à celui pour l'écoulement vapeur, l'expression de la vitesse liquide moyenne est :

$$u_l(x,t) = \frac{\rho_l^0 h_{lv}^0}{\rho_l h_{lv}} u_l^0(x) - \frac{2}{A_w \rho_l h_{lv} L} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_n \Big|_{r=R_i} \frac{\sin(\alpha_n x)}{\alpha_n} \quad (17)$$

avec  $A_w = \pi(R_w^2 - R_i^2)$ , section de passage de la mèche poreuse.

#### 3.2.2.2. Profil de pression

Les pertes de charge de l'écoulement liquide au sein du poreux sont supposées laminaires et suivre la loi de Darcy. En négligeant en outre les effets dynamiques, le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial P_l}{\partial x} = -\frac{\mu_l}{k_w} u_l + \rho_l g \sin \gamma - \rho_l \frac{\partial u_l}{\partial t} \quad (18)$$

En intégrant ce bilan entre 0 et  $x$ , et en supposant que la pression capillaire minimale est nulle et à la même position  $x_0$  au cours du temps, on obtient :

$$P_l(x,t) = P_v(x_0,t) + \frac{\rho_l^0 h_{lv}^0 / \mu_l^0}{\rho_l h_{lv} / \mu_l} \left( P_l^0(x) - P_v^0(x_0) \right) + \left( \rho_l - \rho_l^0 \frac{\rho_l^0 h_{lv}^0 / \mu_l^0}{\rho_l h_{lv} / \mu_l} \right) g \sin \gamma (x - x_0) \\ + \left[ \frac{\mu_l}{k_w} + \rho_l \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[ \frac{2}{A_w \rho_l h_{lv} L} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_n \Big|_{r=R_i} \frac{\cos(\alpha_n x_0) - \cos(\alpha_n x)}{\alpha_n^2} \right] \quad (19)$$

## 4. Résolution du problème

### 4.1. Expressions analytiques des transformées intégrales externes

A partir des conditions aux limites (Fig. 1), la variation du flux externe s'écrit :

$$\Phi \Big|_{r=R_o} (x,t) = \delta \tilde{q}(x,t) + 2\pi R_o h_{\infty} \left( \Theta \Big|_{r=R_o} (x,t) - \Theta_{\infty}(t) \right) \quad (20)$$

avec  $\delta \tilde{q}(x,t) = q(x,t) - q^0(x)$  et  $\Theta_{\infty}(t) = T_{\infty}(t) - T_{\infty}^0$ .

La transformée fondamentale de l'équation (20), couplée avec le modèle quadripolaire (Eq. (7)) nous fournit l'expression de  $\bar{\Theta}_{sat}$  :

$$\bar{\Theta}_{sat} = \frac{\delta \tilde{q}_0 / L - 2\pi R_o h_{\infty} \bar{\Theta}_{\infty}}{\bar{C}_0 - 2\pi R_o h_{\infty} \bar{A}_0} \quad (21)$$

Les autres transformées de l'équation (20), couplées avec le modèle quadripolaire (Eq. (7)) nous fournissent les harmoniques en  $r = R_o$  et en  $r = R_i$  :

$$\tilde{\Theta}_n \Big|_{r=R_o} = \frac{\bar{B}_n}{\bar{D}_n - 2\pi R_o h_{\infty} \bar{B}_n} \delta \tilde{q}_n \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}_n \Big|_{r=R_o} = \frac{\bar{D}_n}{\bar{D}_n - 2\pi R_o h_{\infty} \bar{B}_n} \delta \tilde{q}_n \quad (n \neq 0) \quad (22.a)$$

$$\tilde{\Theta}_n \Big|_{r=R_i} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}_n \Big|_{r=R_i} = \frac{1}{\bar{D}_n - 2\pi R_o h_{\infty} \bar{B}_n} \delta \tilde{q}_n \quad (n \neq 0) \quad (22.b)$$

### 4.2. Principe de résolution pour un point quelconque du domaine

#### 4.2.1. Champs thermiques

Les doubles transformées intégrales sont connues en  $r = R_o$  et en  $r = R_i$ . Grâce au modèle quadripolaire de chacune des couches (Eq. (6)), on en déduit facilement celles pour toute valeur de  $r$ . Par transformée analytique inverse de Fourier (Eq. (4)), on peut dès lors obtenir l'expression des transformées de Laplace en tout point  $(x, r)$ . Une inversion numérique de Laplace est alors réalisée par algorithme de De Hoog [11] afin d'obtenir les valeurs de  $\Theta(x, r, t)$  et  $\Phi(x, r, t)$ . Finalement les champs de températures et de flux radiaux sont évalués à partir du régime permanent initial.

Dans le cas particulier où les flux imposés à l'évaporateur et au condenseur sont uniformes, les transformations intégrales de la variable  $\delta q$  peuvent être explicitement exprimées à partir des deux variations des sources totales  $\delta Q_E(t) = Q_E(t) - Q_E^0$  et  $\delta Q_C(t) = Q_C(t) - Q_C^0$ . En outre, si les pertes avec l'ambiance sont négligées ( $h_\infty = 0 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ ) et que la variation des sources à l'évaporateur et au condenseur est identique et simultanée ( $\delta Q_E(t) = \delta Q_C(t) = \delta Q(t)$ ), les transformées de Laplace des variations de températures et de flux sont directement reliées à la transformée de Laplace de cette dernière sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \bar{\Theta}(x, r) \\ \bar{\Phi}(x, r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Z}(x, r) \\ \bar{W}(x, r) \end{pmatrix} \delta \bar{Q} \quad (23)$$

Les impédances  $\bar{Z}$  et transmittances  $\bar{W}$  dépendent uniquement des propriétés des deux couches et de la localisation des conditions aux limites. Par exemple, l'expression de  $\bar{Z}$  pour la paroi externe est (avec  $R_1 = R_o$  et  $R_2 = r$  pour les coefficients du tableau 1) :

$$\bar{Z}(x, r) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n \bar{B}_n + \bar{B}_n \bar{D}_n}{\bar{D}_n} \left( \frac{\tilde{\chi}_{C,n}}{\tilde{\chi}_{C,0}} - \frac{\tilde{\chi}_{E,n}}{\tilde{\chi}_{E,0}} \right) \cos(\alpha_n x) \quad (24)$$

#### 4.2.2. Profils hydrauliques

Le calcul des profils de vitesse et de pression des écoulements vapeur et liquide nécessite la connaissance de la température de saturation (afin de réévaluer les propriétés du fluide) et des harmoniques de Fourier du flux en  $r = R_i$ , ainsi que de leurs dérivées temporelles. La première est obtenue par inversion numérique de Laplace de l'équation (21). Les autres sont plus coûteux en calculs car ils impliquent d'évaluer numériquement l'inverse de Laplace de chaque harmonique et de leur dérivée temporelle (Eq. (22.b)).

Dans le cas de flux imposés uniformes, des expressions directes de ces profils en fonction des sollicitations, équivalentes à la relation (23) ne peuvent être formulées qu'à condition de supposer des propriétés thermodynamiques constantes (dans le cas d'une faible variation de température de fonctionnement).

### 5. Comparaison des résultats avec la littérature et analyse

Les résultats du modèle développé sont comparés aux travaux numériques de Tournier et El-Genk [12] utilisant une méthode de résolution par volumes finis sur les équations de conservation complètes 2D axisymétrique, avec propriétés thermo-dépendantes, et une prise en compte de l'évolution de la courbure de l'interface liquide-vapeur, ainsi que l'apparition d'un potentiel bouchon liquide au condenseur.

Les conditions aux limites dans ce modèle numérique sont un flux imposé à l'évaporateur (de forme exponentielle) et une condition de convection au condenseur. La différence de cette dernière condition avec le modèle présenté implique d'utiliser le flux au condenseur calculé par Tournier et El-Genk en tant qu'entrée du modèle semi-analytique. Ce flux apparaît en effet quasi-uniforme sur la longueur du condenseur. En outre, aucune perte avec l'ambiance n'est prise en compte ( $h_\infty = 0 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ ), ce qui implique d'imposer la valeur de la température de saturation initiale du modèle analytique [8] ; cette contrainte ne pose pas de problème ici car la simulation correspond à un démarrage de caloduc, donc initialement à température ambiante.

La comparaison des profils spatio-temporels des températures externes est fournie sur les figures 2 et 3. Malgré une légère surestimation aux premiers instants, les résultats du modèle semi-analytique sont extrêmement satisfaisants, compte tenu de ses hypothèses fortes.

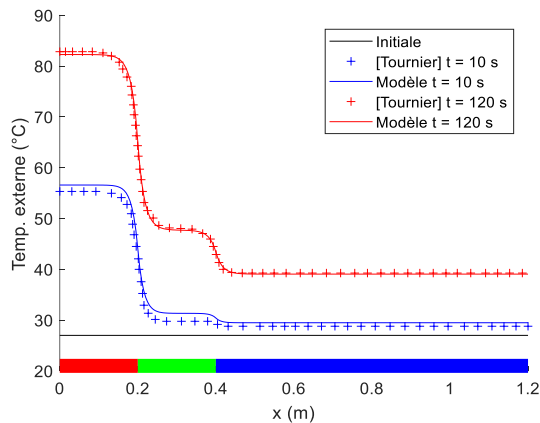


Figure 2 : Profils axiaux de températures de paroi externe pour différents temps

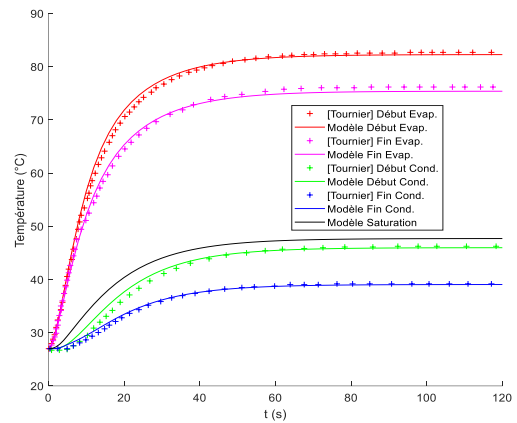


Figure 3 : Evolution temporelle de températures externes en différents points

Les données hydrauliques comparées sont l'évolution du profil axial de débit masse à l'interface liquide-vapeur, évalué à partir du flux de chaleur à l'interface  $\Gamma_{LV} = \phi|_{r=R_i} / 2\pi R_i h_{lv}$  (Fig. 4) ainsi que l'évolution de la pression vapeur (Fig. 5). Deux simulations avec le modèle semi-analytique ont été réalisées en supposant ou non les propriétés constantes.

Les résultats sur le débit masse à l'interface sont cohérents et s'avèrent peu sensibles aux variations des propriétés thermodynamiques (notamment la chaleur latente). Le profil de pression vapeur est par contre mal estimé en considérant des propriétés constantes, notamment dans ce cas où la température de saturation varie de près de 20 K. Avec des propriétés variables (notamment la masse volumique vapeur qui varie de près de 180% entre les températures de fonctionnement initiale et finale), ce profil de pression apparaît relativement bien évalué, les quelques différences avec le modèle numérique provenant des hypothèses très simplificatrices de la description de l'écoulement vapeur du modèle semi-analytique.

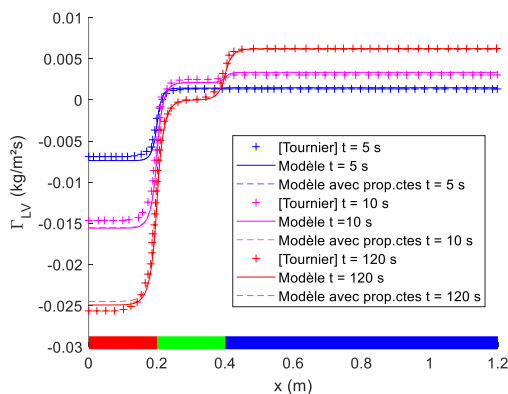


Figure 4 : Profils axiaux de débit masse à l'interface L/V pour différents temps

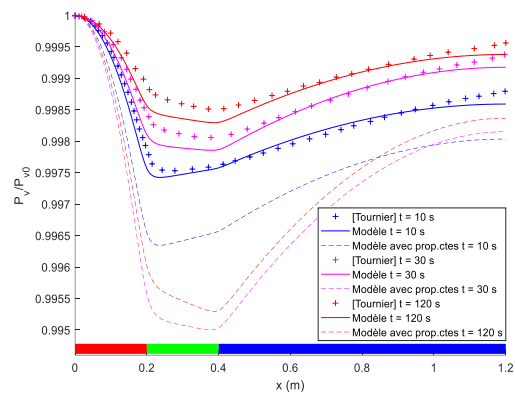


Figure 5 : Profils axiaux de pression vapeur pour différents temps

Pour conclure l'analyse, la réponse indicielle des impédances thermiques  $Z(x,t)$  sur la paroi externe du même caloduc étudié, définies Eq. (24), est représentée sur la figure 6, en supposant les variations des sources chaude et froide identique et simultanées.

On constate que la réponse correspond fortement à celle d'une fonction de transfert du premier ordre, avec une constante de temps dépendant de la position axiale, et avec un gain positif à l'évaporateur et négatif au condenseur. Cette différence signifie que lorsque le flux de chaleur transféré par le caloduc augmente, le gradient axial de températures augmente entre l'évaporateur et le condenseur. La différence de longueur de chacun implique un gain absolu plus ou moins important (du fait d'une densité de flux plus ou moins grande). La

réponse dans la zone adiabatique est proche de zéro du fait que la température de fonctionnement du caloduc reste inchangée (à partir de l'équation (21)).

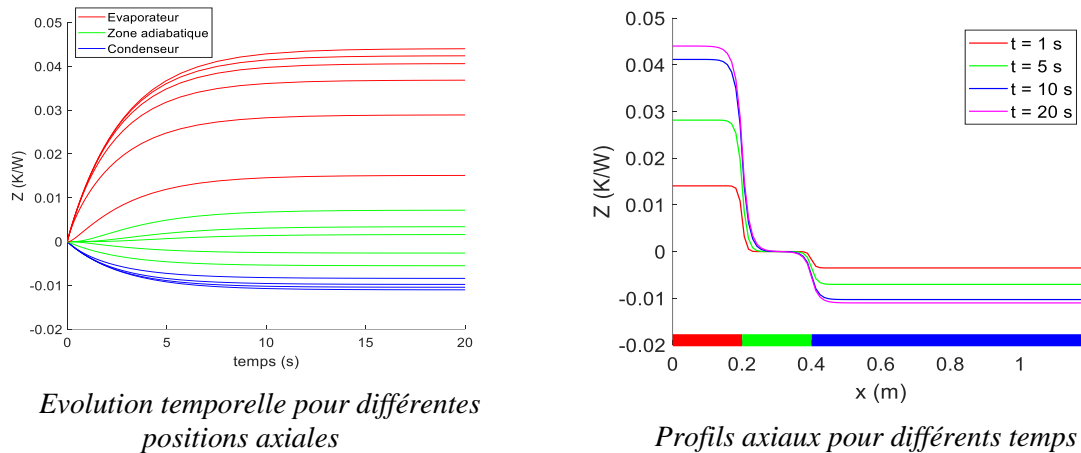


Figure 6 : Réponse indicielle de l'impédance thermique  $Z(x,t)$  en  $r=R_o$  (Eq.(24))

## 6. Conclusion

Malgré des hypothèses fortes et une représentation simplifiée des conditions aux limites, le modèle semi-analytique développé permet de simuler de façon correcte le fonctionnement transitoire d'un caloduc capillaire cylindrique. Sous des conditions de flux imposés uniformes, il permet même de définir des propriétés intrinsèques (impédances et transmittances) du comportement thermo-hydraulique du caloduc.

Le travail présenté reste cependant limité à ce type de conditions aux limites, qui ne correspondent pas nécessairement aux conditions normales de fonctionnement d'un caloduc, un refroidissement convectif étant le plus généralement utilisé. Des méthodes analytiques plus avancées pour gérer ce type de conditions plus réalistes sont en cours de développement. En outre, à l'instar du modèle en régime permanent [8], un plus fort couplage thermo-hydraulique peut être envisagé sous certaines conditions.

Ce type de modèle servira par la suite à construire, avec un faible temps de calcul, des modèles réduits de caloducs (par méthodes inverses) indépendants des conditions aux limites, qui pourront être utilisés dans la modélisation de systèmes thermiques complexes avec caloducs.

## Références

- [1] N. Pooyoo *et al.*, Numerical simulation of cylindrical heat pipe considering non-Darcian transport for liquid flow inside wick and mass flow rate at liquid-vapor interface, *Int. J. Heat Mass. Trans.*, 70 (2014) 965-978.
- [2] T. Naemsai *et al.*, Numerical model of heat transfer characteristics for sintered-grooved wick heat pipes under non-uniform heat loads, *App. Therm. Eng.*, 148 (2019) 886-896.
- [3] B. Suman *et al.*, Transient modeling of micro-grooved heat pipe, *Int. J. Heat Mass. Trans.*, 48 (2005) 1633-1646.
- [4] E.G.Jung & J.H.Boo, A novel transient thermohydraulic model of a micro heat pipe, *Int. J. Heat Mass. Trans.*, 140 (2019) 819-827.
- [5] Y.Huang & Q.Chen, A numerical model for transient simulation of porous wicked heat pipes by lattice Boltzmann method, *Int. J. Heat Mass. Trans.*, 105 (2017) 270-278.
- [6] H.Shabgard & A.Faghri, Performance characteristics of cylindrical heat pipes with multiple heat sources, *App. Therm. Eng.*, 31 (2011) 3410-3419.
- [7] S.Lips & F.Lefèvre, A general analytical model for the design of conventional heat pipes, *Int. J. Heat Mass. Trans.*, 72 (2014) 288-298.
- [8] N.Blet & D.Maillet, Analytical steady-state model based on Fourier integral transforms for cylindrical heat pipes under axisymmetric conditions, *Int. J. Heat Mass. Trans.*, 183 (2022) 122117
- [9] N.Blet & D.Maillet, Modèle analytique d'un caloduc capillaire cylindrique en régime permanent, *SFT 2020* (Belfort).
- [10] D. Maillet *et al.*, *Thermal Quadrupoles: solving the heat equation through integral transforms*, John Wiley & Sons, Ltd (2000).
- [11] De Hoog *et al.*, An improved method for numerical inversion of Laplace transforms, *SIAM J. Sc. Stat. Comp.*, 3(3) (1982) 357-366.
- [12] J-M.Tournier & M-S.El-Genk, HPTAM heat-pipe transient analysis model : an analysis of water heat pipes, *AIP Conference Proc.*, 246 (1992) 1023-1037.