

Développements récents en approches analytiques et/ou hybrides et d'identification en vue de la caractérisation et de la résolution de problèmes complexes de diffusion

---

Disposition du titre

SOCIETE FRANÇAISE DE THERMIQUE

Groupe « Transferts Interfaciaux solides »

Journée du 20 Juin 2019

Identification via des fonctions de transfert pour un problème de couplage thermomécanique.

Application à un cas de thermo-élasticité

---

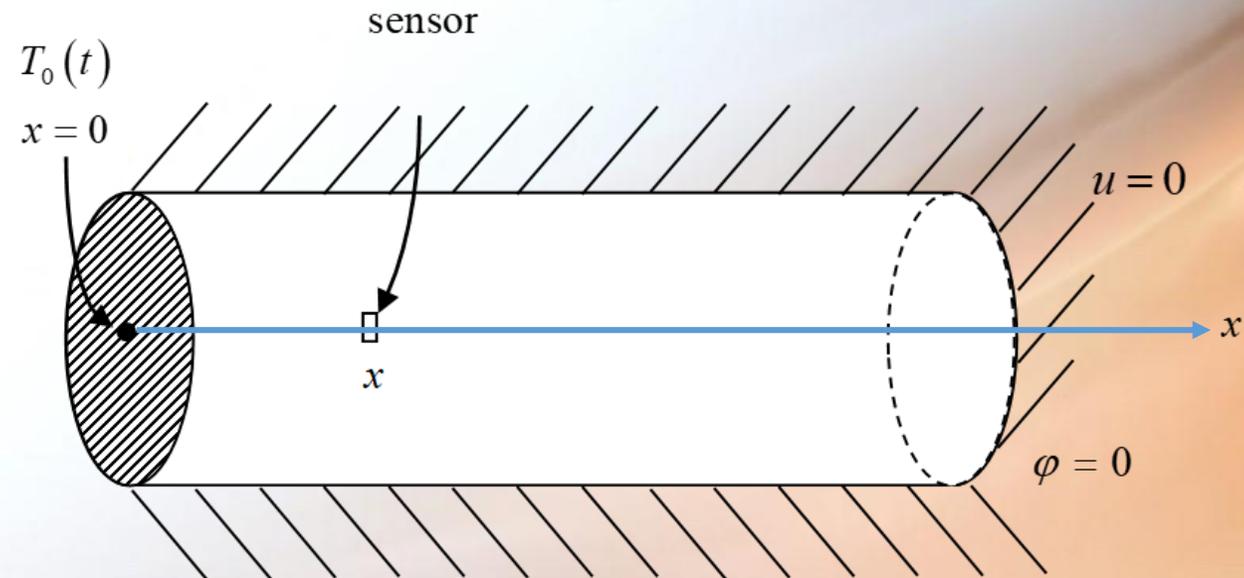
Jean-Gabriel BAUZIN, Minh-Nhat NGUYEN, Najib LARAQI

*Laboratoire Thermique Interfaces Environnement, EA 4415,*

*Université Paris Nanterre, 50 Rue de Sèvres, 92410 Ville d'Avray, France*

# Systeme étudié

- Cylindre adiabatique, déplacements nuls imposés sauf sur la surface s'application de la température



- Plusieurs possibilités de capteurs: déplacement/déformation

# Equations mécaniques

- Le déplacement est lié à la température

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k_0 \frac{\partial T}{\partial x}, \quad 0 < x < L, t > 0$$

- Avec  $k_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t$  et  $c_0 = \sqrt{2G(1-\nu)/[\rho(1-2\nu)]}$

- Les conditions limites et initiales du systèmes:

- ✓ Surface libre:  $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = k_0 T_0(t)$

- ✓ Surface encastree:  $u(L,t) = 0$

- ✓ À l'instant  $t=0$ , le système est immobile et au repos:  $u(x,0) = 0$  ,  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$

# Application de la transformée de Laplace

- Le système mécanique s'écrit dans l'espace de Laplace

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} - \frac{p^2}{c_0^2} \bar{U} = k_0 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}$$

$$\bar{U}(L) = 0; \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)_{x=0} = k_0 \bar{T}_0$$

- Reste à déterminer le terme  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}$  pour résoudre le problème thermomécanique.

# Equations thermiques

- Modèle 1D:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

- Conditions limites

$$T(0, t) = T_0(t) \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = L, \quad t > 0$$

- Conditions initiales

$$T(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t = 0$$

$$\bar{T}(x) = \frac{ch[q(L-x)]}{ch(qL)} \bar{T}_0$$

$$\bar{\varphi}(x) = -\lambda q \frac{sh[q(L-x)]}{ch(qL)} \bar{T}_0$$

avec

$$q = \sqrt{\frac{p}{\alpha}}$$

# En remplaçant dans les équations de mécanique

- Equation différentielle:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} - \frac{p^2}{c_0^2} \bar{U} = -k_0 q \frac{\text{sh}[q(L-x)]}{\text{ch}(qL)} \bar{T}_0$$

- Conditions limites

$$\bar{U}(L) = 0; \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)_{x=0} = k_0 \bar{T}_0$$

# Fonction de transfert Déplacement/Température

- Dans le cas général il vient donc

$$\bar{U}(x) = \bar{G}(x) \cdot \bar{T}_0$$

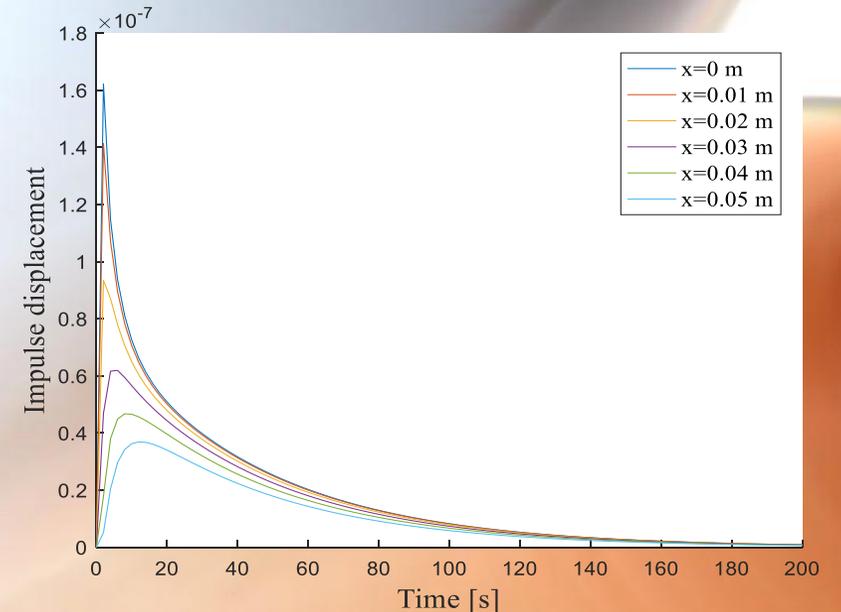
- Avec la fonction de transfert:

$$\bar{G}(x, p) = \frac{k_0}{q(1-\beta^2)} \left( \beta \frac{sh(\beta q(L-x))}{ch(\beta qL)} - \frac{sh(q(L-x))}{ch(qL)} \right)$$

- Pas d'expression explicite de la réponse impulsionnelle dans l'espace temps:

$$g(x, t) = L^{-1} \{ \bar{G}(x, p) \}$$

- Il est nécessaire d'effectuer une inversion numérique.



# Sur la déformation

- La déformation  $\varepsilon$  est reliée au déplacement  $u$  :

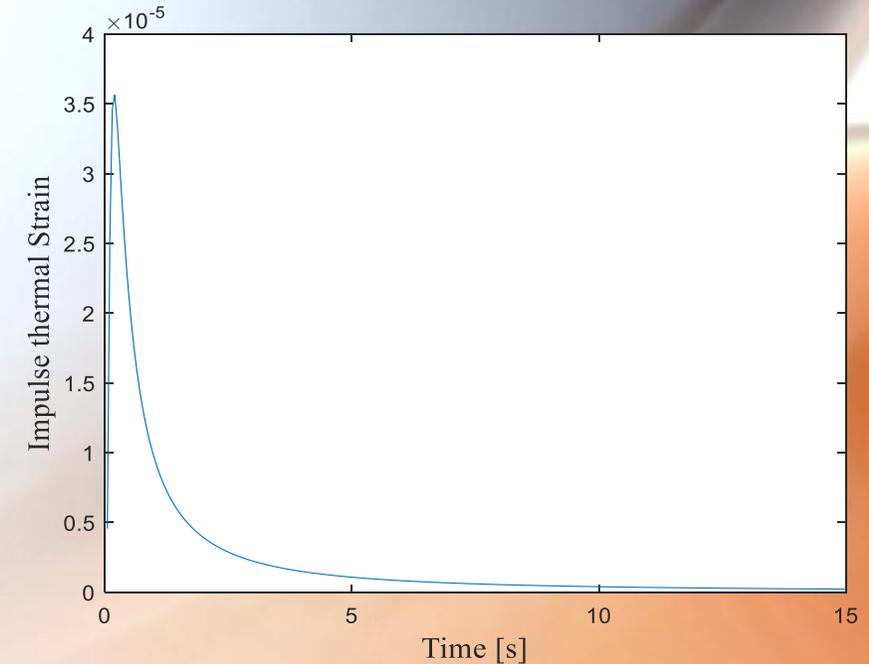
$$\bar{\varepsilon}(x, p) = \frac{\partial \bar{U}(x, p)}{\partial x}$$

- Il vient donc:

$$\bar{\varepsilon}(x, p) = \frac{k_0}{(1 - \beta^2)} \left( \frac{ch(q(L-x))}{ch(qL)} - \beta^2 \frac{ch(\beta q(L-x))}{ch(\beta qL)} \right) \cdot \bar{T}_0$$

$$\bar{\varepsilon}(x, p) = \bar{G}_1(x, p) \cdot \bar{T}_0 \quad \bar{G}_1(x, p) = \frac{k_0}{(1 - \beta^2)} \left( \frac{ch(q(L-x))}{ch(qL)} - \beta^2 \frac{ch(\beta q(L-x))}{ch(\beta qL)} \right)$$

$$g(x, t) = L^{-1} \{ \bar{G}_1(x, p) \}$$



# Calcul du déplacement par convolution

$$u(x,t) = g(x,t) * T_0(t)$$

Numériquement:

$$\underline{u} = \underline{C} \underline{T}$$

Avec

$$g_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(x,t) dt$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N_f-1} \\ u_{N_f} \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & g_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{N_f-1} & & \ddots & \ddots & 0 \\ g_{N_f} & g_{N_f-1} & \cdots & g_2 & g_1 \end{bmatrix}, \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N_f-1} \\ T_{N_f} \end{bmatrix}$$

On effectuera une décomposition en valeurs singulières de C:

$$\underline{C} = \underline{U} \underline{D} \underline{V}^T$$

$$\underline{U}^T \underline{U} = \underline{U} \underline{U}^T = \underline{V} \underline{V}^T = \underline{V}^T \underline{V} = \underline{I}_{N_f}$$

$$\underline{D} = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_{N_f}) \text{ avec } D_1 \geq D_2 \geq \dots \geq D_{N_f}$$

# Calcul de la déformation par convolution

$$\varepsilon(x, t) = g(x, t) * T_0(t)$$

Numériquement:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{T}}$$

Avec

$$g_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(x, t) dt$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{N_f-1} \\ \varepsilon_{N_f} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & g_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{N_f-1} & & \ddots & \ddots & 0 \\ g_{N_f} & g_{N_f-1} & \cdots & g_2 & g_1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N_f-1} \\ T_{N_f} \end{bmatrix}$$

On effectuera une décomposition en valeurs singulières de C:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{V}}^T$$

$$\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{U}}^T = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{I}}_{N_f}$$

$$\underline{\underline{D}} = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_{N_f}) \text{ avec } D_1 \geq D_2 \geq \dots \geq D_{N_f}$$

# Simplification

- En fonction des sollicitations imposées, il est possible de négliger le terme vibratoire dans l'équation mécanique. Il vient alors sur le déplacement et la déformation:

$$\bar{U} = -\frac{k_0}{q} \frac{sh[q(L-x)]}{ch(qL)} \bar{T}_0 \quad \bar{\varepsilon}(x, p) = k_0 \left( \frac{ch(q(L-x))}{ch(qL)} \right) \cdot \bar{T}_0$$

- Dans ce cas, il est possible d'inverser les fonctions de transfert et d'obtenir une expression explicite dans l'espace temps.

# Expressions explicites dans le cas simplifié

- Pour le déplacement

$$u(x,t) = -k_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( e^{-\frac{(2nL+x)^2}{4\alpha t}} - e^{-\frac{(2L(n+1)-x)^2}{4\alpha t}} \right) \right) * T_0(t)$$

$g(x,t)$

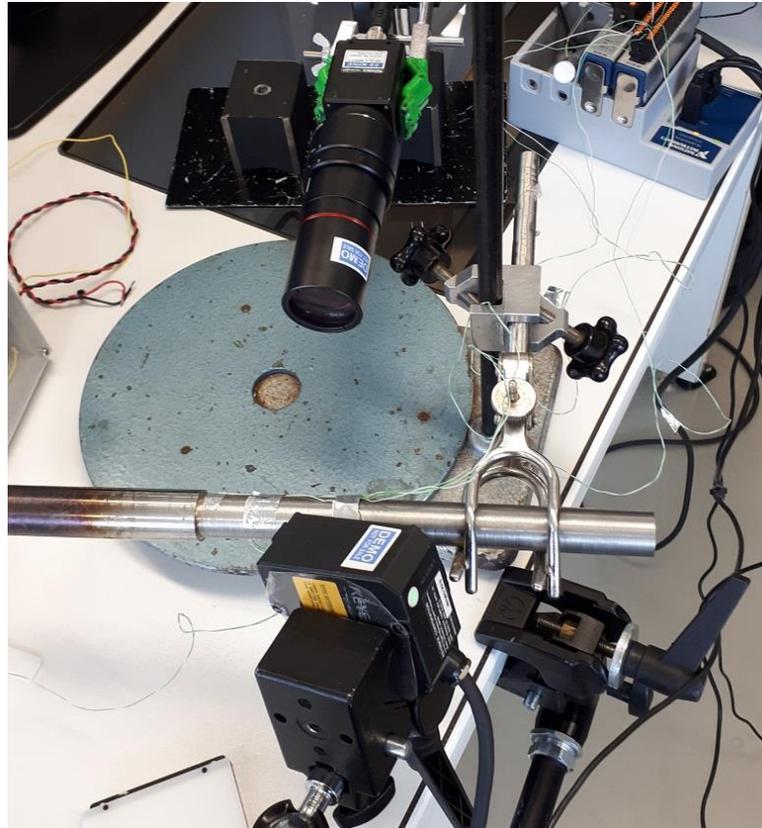
- Pour la déformation

$$\varepsilon(x,t) = k_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{(2nL+x)}{2\sqrt{\pi\alpha t^3}} e^{-\frac{(2nL+x)^2}{4\alpha t}} + \frac{(2L(n+1)-x)}{2\sqrt{\pi\alpha t^3}} e^{-\frac{(2L(n+1)-x)^2}{4\alpha t}} \right) * T_0(t)$$

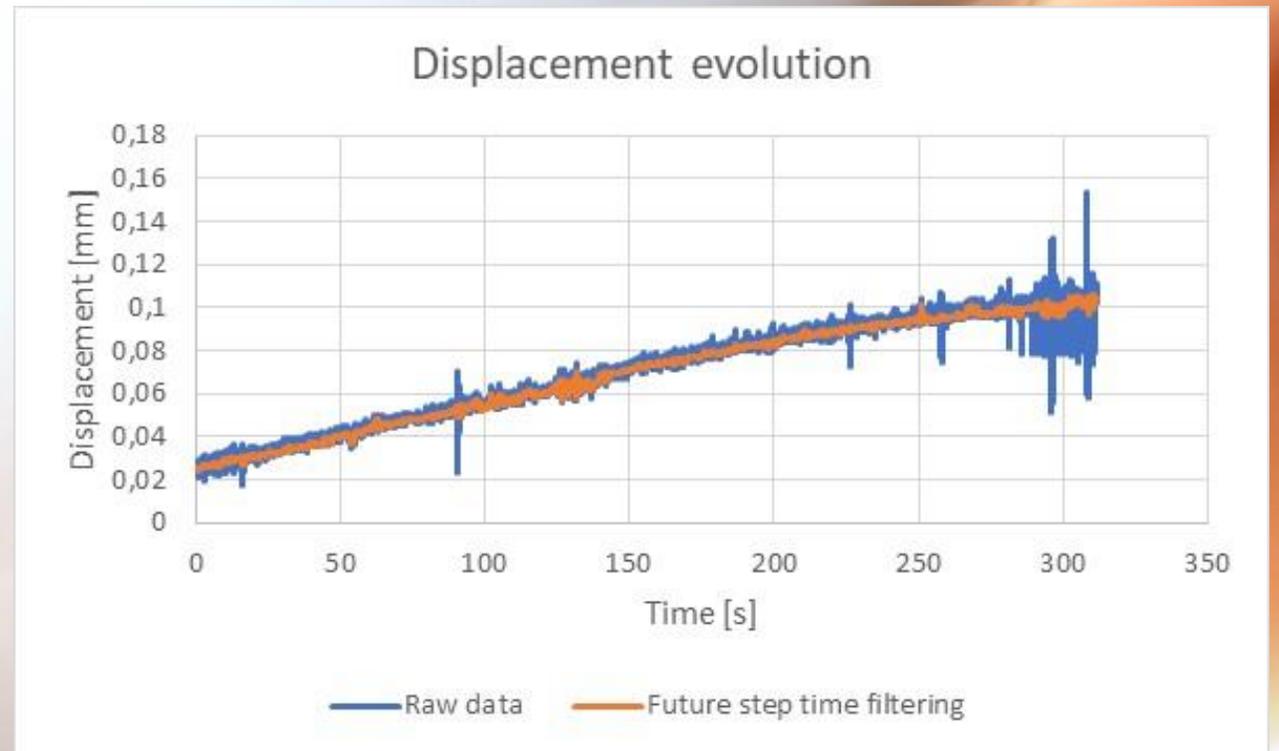
$g(x,t)$

# Mesure de déplacement par Laser

Dispositif expérimental

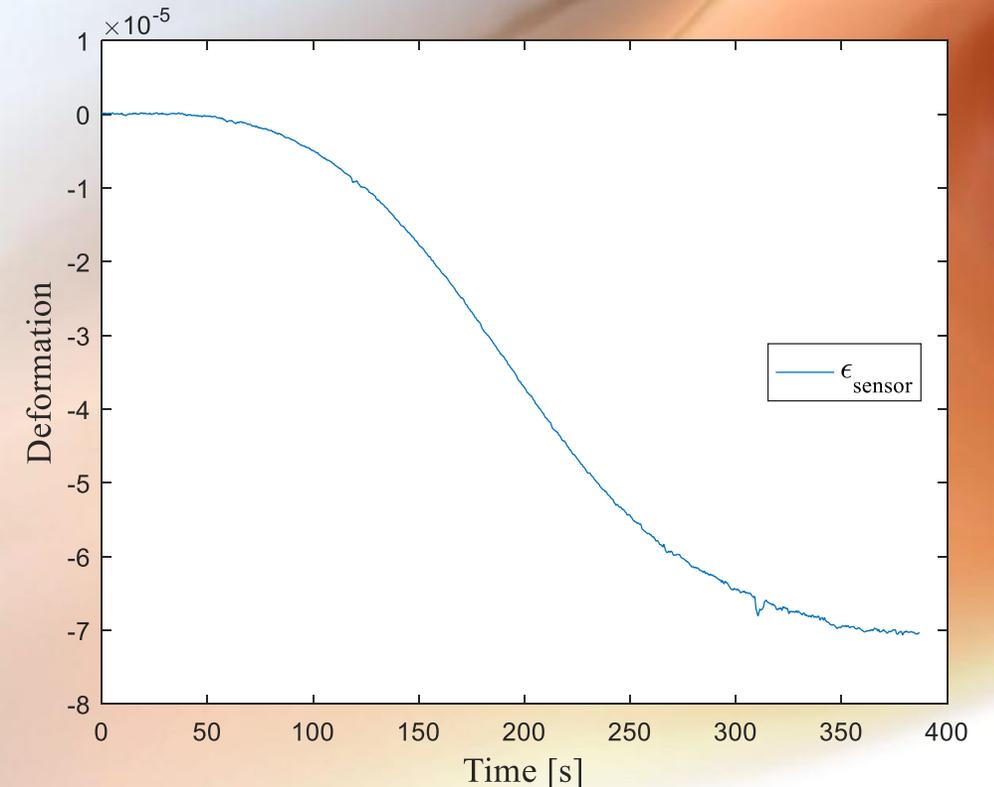
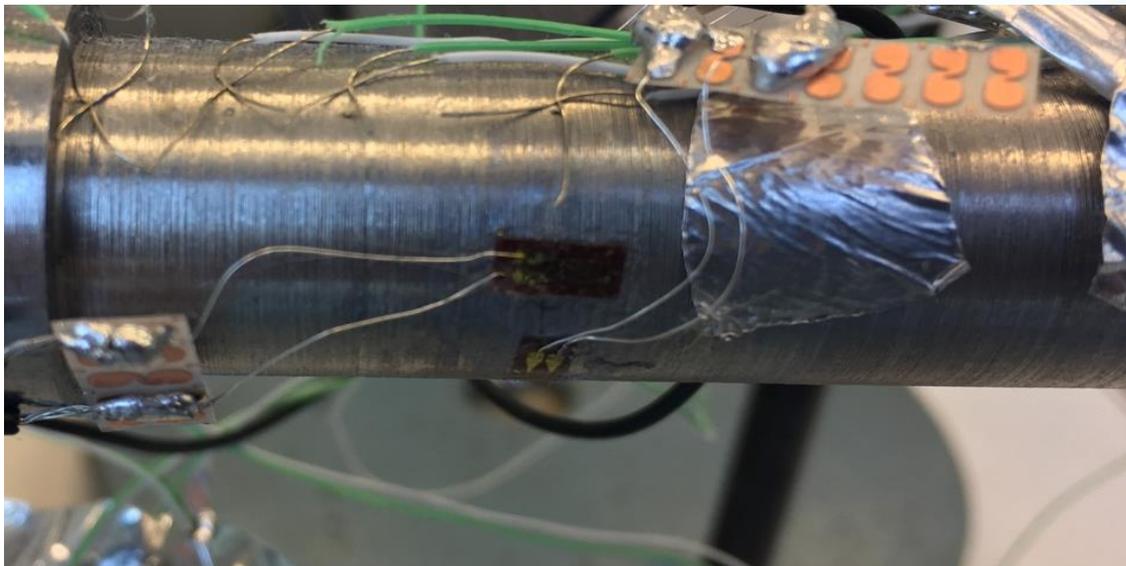
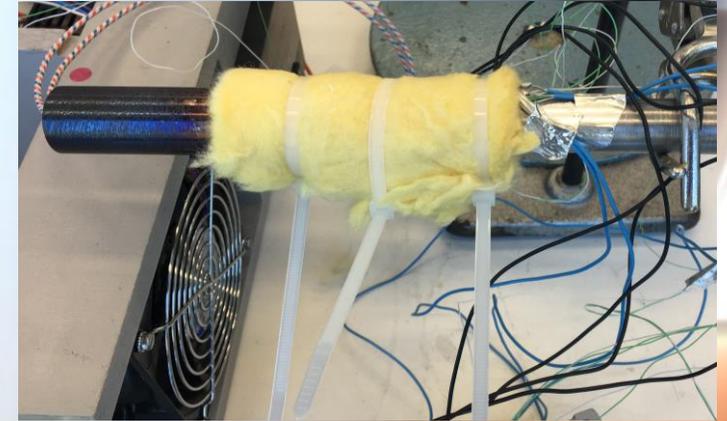


Courbe d'évolution de déplacement

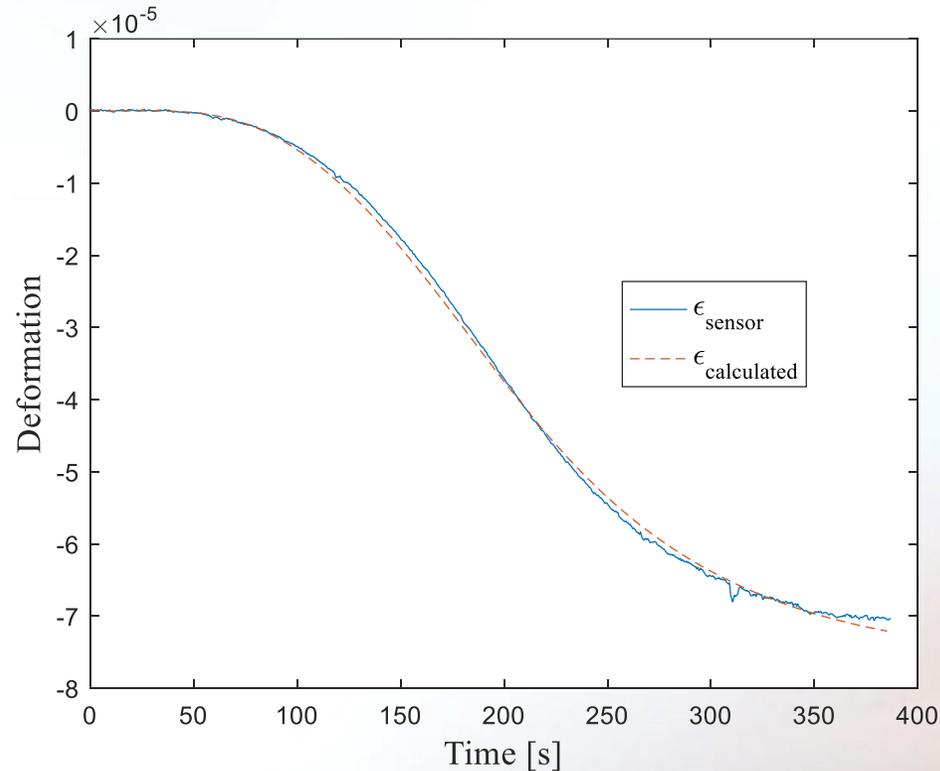


# Mesure de déformations par jauge

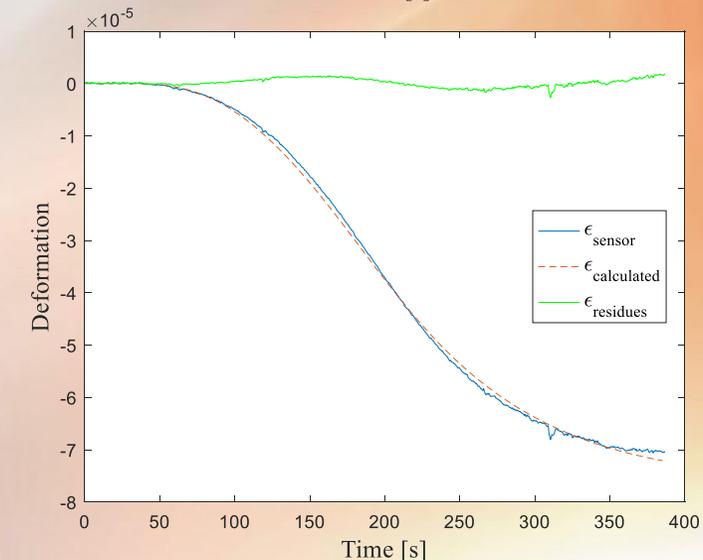
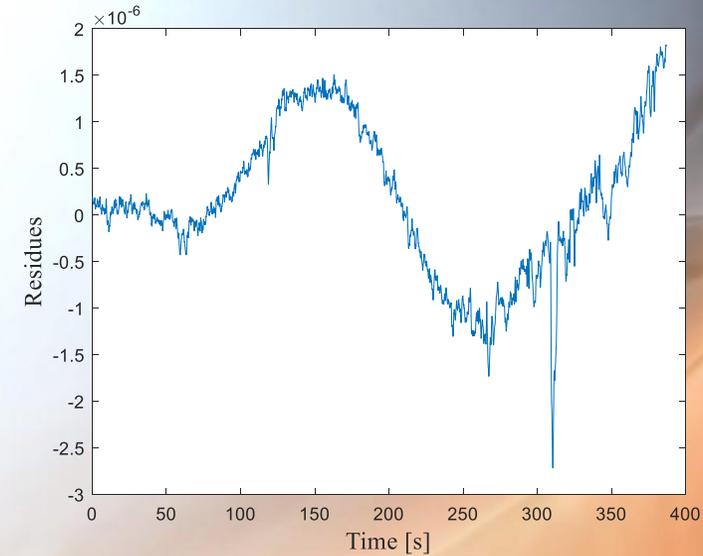
- Une jauge de déformation (contrainte) est collée sur le cylindre:



# Identification du coefficient de dilatation thermique



$$\hat{\alpha}_T = 10,97 \cdot 10^{-6} K^{-1}$$



# Problématique

- Mesure relative du coefficient (par rapport à celui de la jauge de contrainte).
  - Effet thermiques au niveau du capteur.
  - Dimension du capteur.
  - Fixation du capteur (impact de la colle).
  - Limitation en températures...
- Utilisation de la mesure en déplacement permet de s'affranchir de ces contraintes

# Identification de la température imposée en surface à partir de la mesure de la déplacement

- Retour à la température imposée par déconvolution de la réponse impulsionnelle et du déplacement

$$T_0(t) = \frac{1}{g(x,t)} * u(x,t)$$

- Expression numérique:

$$\underline{\hat{T}} = \underline{C}^{-1} \underline{u} \quad \text{soit} \quad \underline{\hat{T}} = \underline{V} \cdot \underline{D}^{-1} \underline{U}^T \underline{u}$$

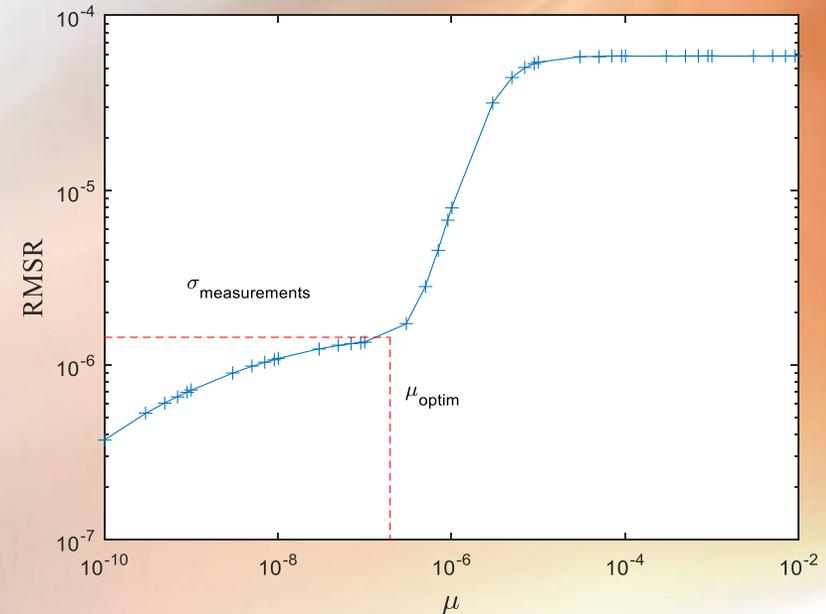
# Régularisation de l'inversion

- Méthode de Tikhonov

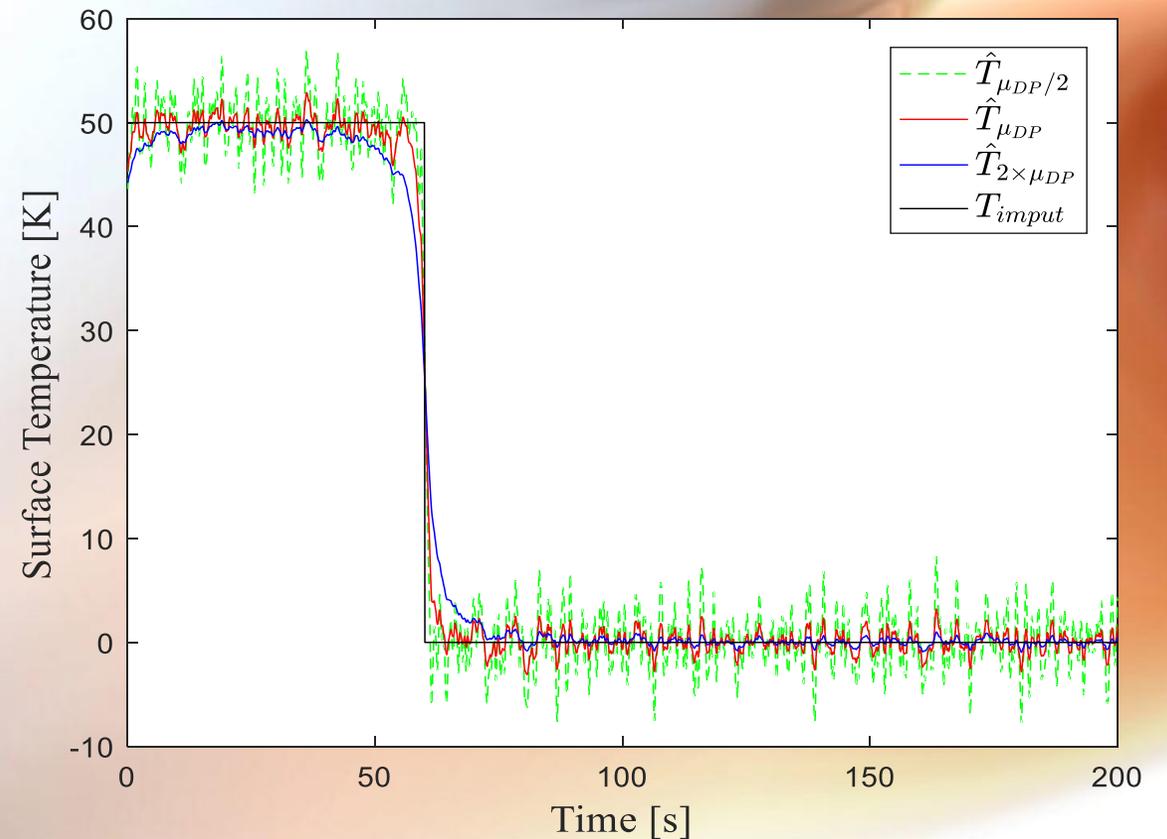
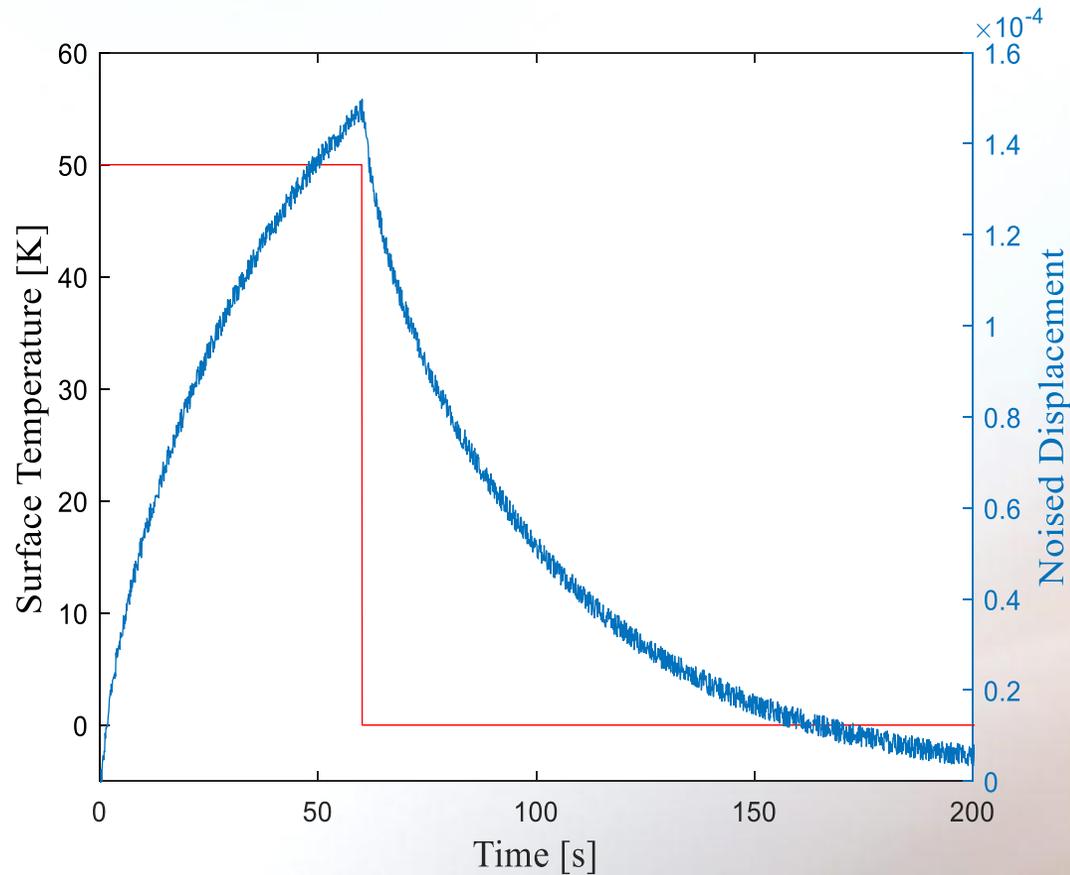
$$\hat{\underline{T}}_{\underline{\mu}} = \underline{V} \cdot \underline{D}_{\underline{\mu}}^{-1} \underline{U}^T \underline{u} \quad \text{avec} \quad \underline{D}_{\underline{\mu}}^{-1} = \text{diag} \left( \frac{D_1}{D_1^2 + \mu^2}, \frac{D_2}{D_2^2 + \mu^2}, \dots, \frac{D_{N_f}}{D_{N_f}^2 + \mu^2} \right)$$

$$RMSR \geq \sigma_m$$

$$RMSR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N_f} (u_i^{rec} - u_i)^2}{N_f - 1}}$$



# Identification de la température imposée en surface à partir de mesures de déplacement (simulés bruités)



# Identification expérimentale de température par mesure de déformation

