

# Simulations numériques du transfert de chaleur couplé conduction-rayonnement dans un milieu semi-transparent par la méthode des éléments finis

[LAZARD Myriam](#)

Email: [myriam.lazard@univ-poitiers.fr](mailto:myriam.lazard@univ-poitiers.fr)



Institut PPrime, CNRS-Université de Poitiers-ENSMA,  
Département Fluides Thermique Combustion,  
EnSIP, B25, Campus Sud, 2 rue Pierre Brousse,  
86022 Poitiers, France





# Plan

---

## Introduction

## Mise en équations

Equation de la chaleur et du transfert radiatif

Divergence du flux, luminance, flux radiatif

## Résolution par la méthode des éléments finis

Discrétisation, forme variationnelle, fonctions d'interpolation

Calcul intégral, matrice de rigidité et vecteurs sollicitations

## Quelques résultats de simulations

Cas 1D et 2D, régime permanent ou transitoire

## Conclusion



# Introduction

---

Etude et caractérisation de milieux semi-transparentes

à partir de thermogrammes expérimentaux

Modèle semi-analytique pour l'inversion, étude stochastique

Validation du modèle, détermination des limites de validité

Modèle plus complet, simulations numériques

## Equation de la chaleur et du transfert radiatif

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \right) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\varphi}_c + \vec{\varphi}_r) + P$$

$$\lambda \Delta T + P_r = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$P_r = -\text{div}(\vec{\varphi}_r)$$

Flux radiatif déterminé à partir de l'équation aux luminances

$$\frac{dL'}{ds} = -KL'(s) + KL_0(T)$$



# Divergence du flux radiatif

$$\vec{q}_r(s) = \int_{4\pi} L'(s) \cdot \vec{s} d\Omega$$

$$q_r = \vec{q}_r \cdot \vec{n} = \int_{4\pi} L' \cdot \vec{s} \cdot \vec{n} d\Omega$$

$$\bar{L} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} L' d\Omega$$

$$L_0 = \frac{n^2 \sigma T^4}{\pi}$$

$$\text{div}(\vec{q}_r) = -4\pi K \bar{L} + 4\pi K L_0 = 4\pi K (L_0 - \bar{L})$$

# Luminance et flux radiatif

## Flux radiatif

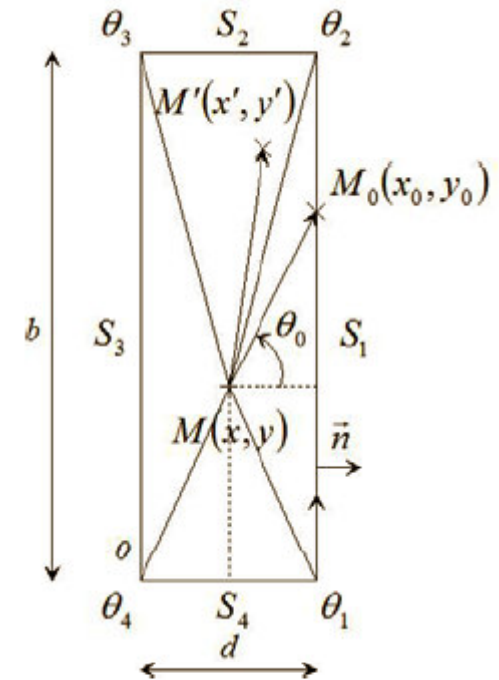
$$\bar{q}_r(\vec{r}) = \int_A L'(r_0) [\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)] \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^4} \exp(-K|\vec{r} - \vec{r}_0|) dA + K \int_V L'(r^*) \frac{\vec{r} - \vec{r}^*}{|\vec{r} - \vec{r}^*|^3} \exp(-K|\vec{r} - \vec{r}^*|) dV^*$$

## Luminance moyenne

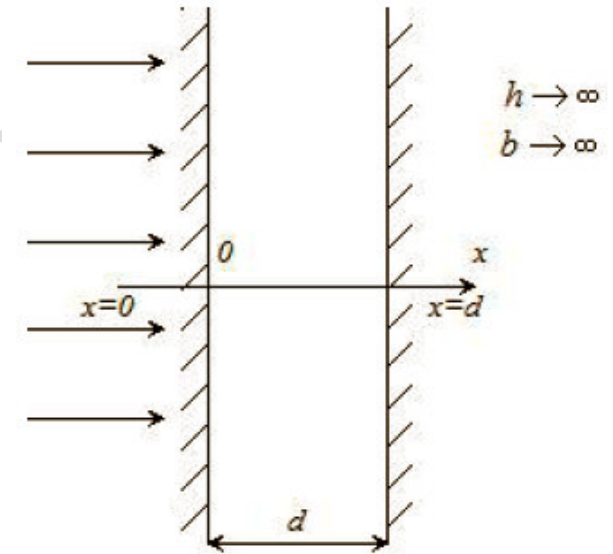
$$\bar{L}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_A L'(r_0) \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \exp(-K|\vec{r} - \vec{r}_0|) dA + \frac{K}{4\pi} \int_V L'(r^*) \frac{\exp(-K|\vec{r} - \vec{r}^*|)}{|\vec{r} - \vec{r}^*|^2} dV^*$$

$$I_v = \int_V L'(r^*) \left\{ \exp(-K|\vec{r} - \vec{r}^*|) / |\vec{r} - \vec{r}^*|^2 \right\} dV^*$$

$$I_s = \int_A L'(r_0) \left\{ \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \exp(-K|\vec{r} - \vec{r}_0|) / |\vec{r} - \vec{r}_0|^3 \right\} dA$$



## Cas 1D



$$I_v = 2\pi \int_{x^*=0}^d L'(x^*) \int_{\rho^*=0}^{\infty} \left\{ \exp(-K|\vec{r} - \vec{r}^*|) / |\vec{r} - \vec{r}^*|^2 \right\} \rho^* d\rho^* dx^*$$

Changement de variables  $\xi^* = \rho^* / |x - x^*|$   $t = (1 + \xi^{*2})^{1/2}$

$$I_v = 2\pi \int_{x^*=0}^d \left( n^2 \sigma T^4(x^*) / \pi \right) E_1(K|x - x^*|) dx^*$$

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^n} \exp(-xt) dt$$

$$I_s = \int_A L'(r_0) \left\{ \bar{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \exp(-K|\vec{r} - \vec{r}_0|) / |\vec{r} - \vec{r}_0|^3 \right\} 2\pi \rho_0 d\rho_0$$

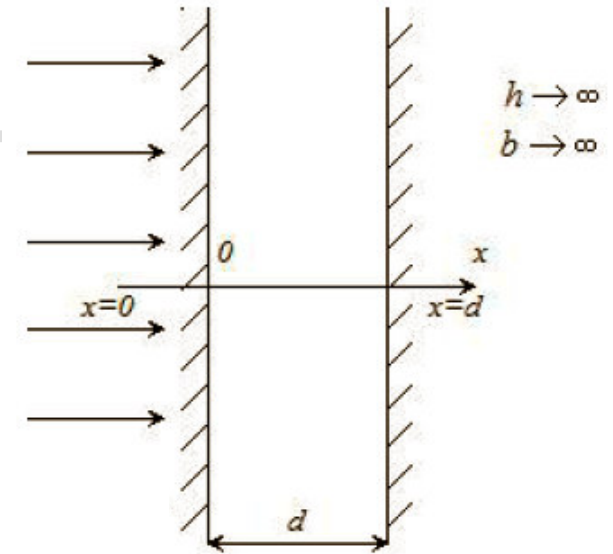
$$\xi_0^* = \rho_0^* / |x| \quad t_0 = (1 + \xi_0^{*2})^{1/2}$$



$$I_{s_1} = 2\pi L(0) E_2(Kx) = 2\pi (n^2 \sigma T(0)^4 / \pi) E_2(Kx)$$

$$I_{s_2} = 2\pi L(d) E_2(K(d-x)) = 2\pi (n^2 \sigma T(d)^4 / \pi) E_2(K(d-x))$$

## Cas 1D



### Luminance moyenne

$$4\pi\bar{L}(x) = 2n^2\sigma T(0)^4 E_2(Kx) + 2n^2\sigma T(d)^4 E_2(K(d-x)) \\ + 2Kn^2\sigma \int_{x^*=0}^d T^4(x^*) E_1(K|x-x^*|) dx^*$$

### Divergence du flux radiatif

$$\text{div}(\bar{q}_r) = 4Kn^2\sigma T^4(x) - \left( 2n^2\sigma T(0)^4 E_2(Kx) + 2n^2\sigma T(d)^4 E_2(K(d-x)) \right) \\ - 2Kn^2\sigma \int_{x^*=0}^d T^4(x^*) E_1(K|x-x^*|) dx^*$$

### Flux radiatif

$$\bar{q}_r(x) = 2n^2\sigma T^4(0)E_3(Kx) - 2n^2\sigma T^4(d)E_3(K(d-x)) \\ + 2Kn^2\sigma \left[ \int_{x^*=0}^x T^4(x^*) E_2(K|x-x^*|) dx^* - \int_{x^*=x}^d T^4(x^*) E_2(K|x^*-x|) dx^* \right]$$



## Cas 2D

$$I_v = 2 \int_{x^*=0}^d \int_{y^*=0}^b L'(x^*, y^*) \int_{z^*=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-K\left((x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 + (z-z^*)^2\right)^{1/2}\right)}{\left((x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 + (z-z^*)^2\right)^{1/2}} dz^* dy^* dx^*$$

Changement de variables  $\xi^* = z^* / \left( (x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 \right)^{1/2} = z^* / \rho^*$   $t^* = (1 + \xi^{*2})^{1/2}$

$$I_v = \int_{x^*=0}^d \int_{y^*=0}^b n^2 \sigma T^4(x^*, y^*) (S_1(K\rho^*) / \rho^*) dy^* dx^*$$

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\exp(-xt)}{t^n (t^2 - 1)^{1/2}} dt$$

$$I_{S_1} = \pi x \int_{y_0=0}^b L(0, y_0) S_2(K\rho_0) / \rho_0^2 dy_0 \quad \rho_0(0, y_0) = (x^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}$$

$$I_{S_2} = \pi(d-x) \int_{y_0=0}^b L(d, y_0) S_2(K\rho_0) / \rho_0^2 dy_0 \quad I_{S_3} = \pi(b-y) \int_{x_0=0}^d L(x_0, b) S_2(K\rho_0) / \rho_0^2 dx_0 \quad I_{S_4} = \pi y \int_{x_0=0}^d L(x_0, 0) S_2(K\rho_0) / \rho_0^2 dx_0$$

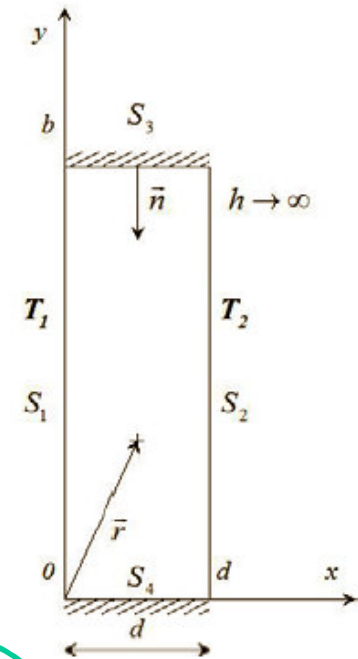
Luminance moyenne



$$4\pi\bar{L}(x, y) = I_{S_1} + I_{S_2} + I_{S_3} + I_{S_4} + KI_v$$

Divergence du flux radiatif

$$\text{div}(\vec{q}_r) = 4Kn^2 \sigma T^4(x, y) - 4\pi K\bar{L}$$



# Résolution par la méthode des éléments finis

## Equation différentielle **non linéaire**

$$\lambda \cdot \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(T)) - \text{div}(\bar{q}_r) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{div}(\bar{q}_r) = 4Kn^2 \sigma T^4(x, y) - 4\pi K\bar{L}$$



Résolution à chaque pas de temps avec une méthode itérative



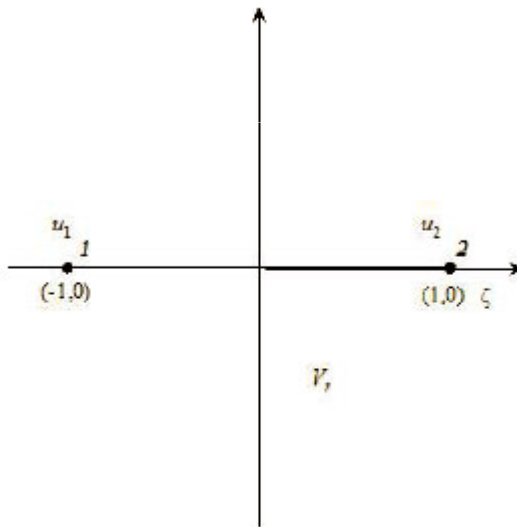
*Initialisation de la procédure :*

- *Solution du problème purement conductif*
- *Solution du problème couplé après linéarisation du terme radiatif*

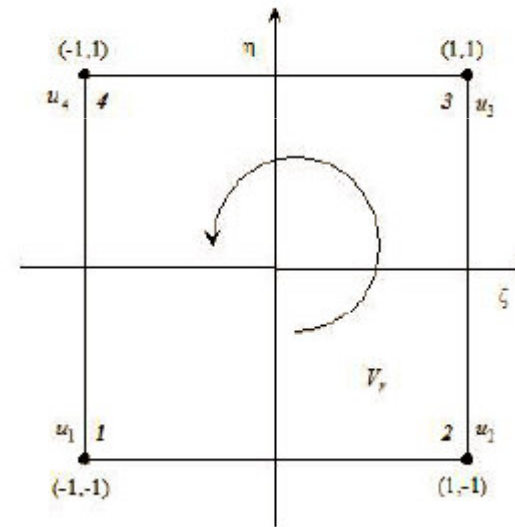
$$4Kn^2 \sigma T^4(x, y) = 4Kn^2 \sigma \bar{T}^3 T(x, y)$$

# Eléments finis : discrétisation

$$T^e(x, y) = \sum_{i=1}^{n_{nodes}} T_i^e N_i^e(x, y)$$



Elément 1D



Elément 2D



## Eléments finis : forme variationnelle

Produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \iiint_V f \cdot g \, dV$

$$\phi = \left\{ (N_1^1, N_2^1, N_3^1), (N_1^2, N_2^2, N_3^2), \dots, (N_1^e, N_2^e, N_3^e), \dots, (N_1^{n_{\text{elit}}}, N_2^{n_{\text{elit}}}, N_3^{n_{\text{elit}}}) \right\}$$

*Projection de l'équation différentielle sur chaque vecteur de la base*

*Divergence du flux radiatif composé de deux termes*



*Le premier est seulement fonction de la température*

*Traité comme la divergence du flux conductif*



*Le second contient la luminance*

*Fait intervenir toutes les températures du milieu et des limites*

## Eléments finis : forme variationnelle

$$\lambda \cdot \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)) - 4Kn^2 \sigma \bar{T}^3 \cdot T = F(x, y, \bar{T}) = 4\pi K\bar{L}$$



Projection sur la base des vecteurs orthogonaux :

$$\iint_V \lambda \cdot \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)) \cdot \phi \, dV - \iint_V 4Kn^2 \sigma \bar{T}^3 \cdot T \cdot \phi \, dV = \iint_V 4\pi K\bar{L} \cdot \phi \, dV$$



IPP du premier terme

$$\begin{aligned} & - \iint_V \lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi) \, dV + \int_S \lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) \cdot \vec{n} \cdot \phi \, dS - \iint_V 4Kn^2 \sigma \bar{T}^3 \cdot T \cdot \phi \, dV \\ & = \iint_V 4\pi K\bar{L} \cdot \phi \, dV \end{aligned}$$



Introduction de la condition de Neumann sur (S) via le second terme

$$\left( -\lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) + \vec{q}_r \right) \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow \lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) \cdot \vec{n} = \vec{q}_r \cdot \vec{n}$$

# Eléments finis : fonctions d'interpolation

## ● Cas 1D

$$\langle N \rangle_{(\xi)} = \frac{1}{2} \langle (1-\xi); (1+\xi) \rangle$$

$$[B]_{(\xi)} = \text{grad}(N)_{(\xi)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## ● Cas 2D

$$\langle N \rangle_{(\xi,\eta)} = \frac{1}{4} \langle (1-\xi)(1-\eta); (1+\xi)(1-\eta); (1+\xi)(1+\eta); (1-\xi)(1+\eta) \rangle$$

$$[B]_{(\xi,\eta)} = \text{grad}(N)_{(\xi,\eta)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ (-1+\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix}$$



## Eléments finis : calcul intégral

$$\iint_V \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) dV = \sum_{i=1}^{n_{\text{elt}}} \iint_{V_i^e} \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(N^e) dV_i^e$$

$$T^e(x, y) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nodes}}} N_i^e(x, y) \cdot T_i^e = \langle N^e \rangle_{(x,y)} \{ T^e \}$$

$$\iint_{V^e} \dots dV^e = \iint_{V^r} \dots \det(J) dV^r$$

# Eléments finis : calcul intégral

● Cas 1D  $[J] = \frac{(x_2 - x_1)}{2} = \frac{l}{2}$

● Cas 2D

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ (-1+\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \det(J) = ab$$


$$[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\iint_{V^e} f(x, y) dx dy = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 f(\xi, \eta) \det(J) d\xi d\eta$$




# Eléments finis : calcul intégral


## Matrice de rigidité et vecteur sollicitation


$$K_1^e = \lambda^e \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 [B]_{(\xi,\eta)}^t [j]^t [j] [B]_{(\xi,\eta)} \det(J) d\xi d\eta$$

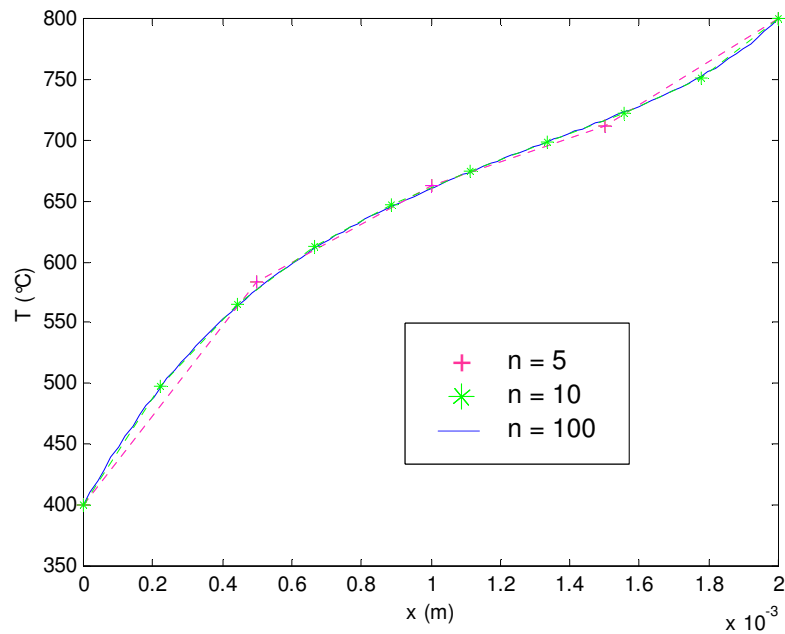
$$K_1^e = \frac{\lambda^e}{6(ab)} \begin{bmatrix} 2(a^2 + b^2) & a^2 - 2b^2 & -(a^2 + b^2) & -2a^2 + b^2 \\ - & 2(a^2 + b^2) & -2a^2 + b^2 & -(a^2 + b^2) \\ - & - & 2(a^2 + b^2) & a^2 - 2b^2 \\ - & - & - & 2(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$


$$K_2^e = 4Kn^2 \sigma \bar{T}^e \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \{N\}_{(\xi,\eta)} \langle N \rangle_{(\xi,\eta)} \det(J) d\xi d\eta$$

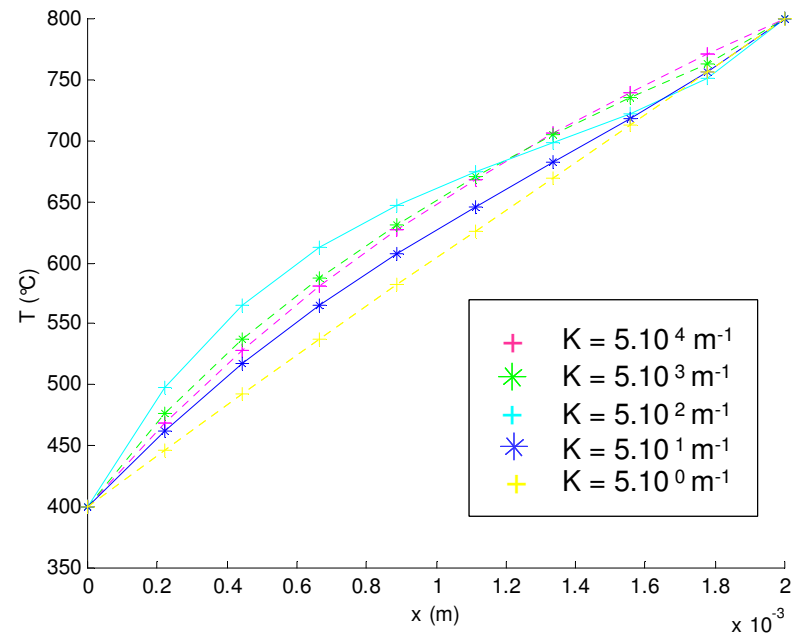
$$K_2^e = \frac{4Kn^2 \sigma \bar{T}^e}{9} (ab) \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ - & 4 & 2 & 1 \\ - & - & 4 & 2 \\ - & - & - & 4 \end{bmatrix}$$


$$F^e = \bar{F}^e \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \{N\}_{(\xi,\eta)} \det(J) d\xi d\eta \quad F^e = \bar{F}^e (ab) \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}^t$$

# Cas 1D permanent

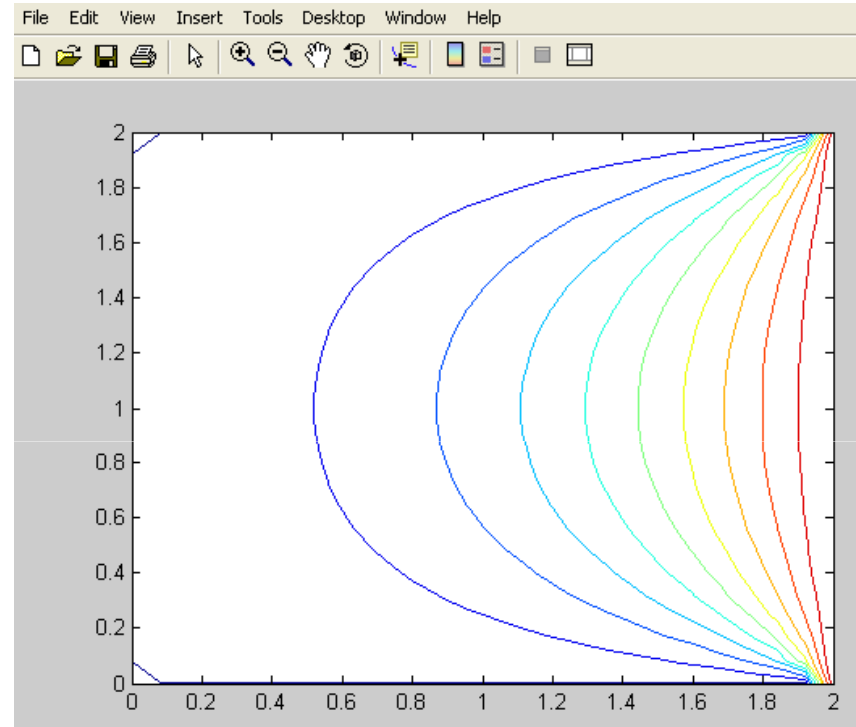
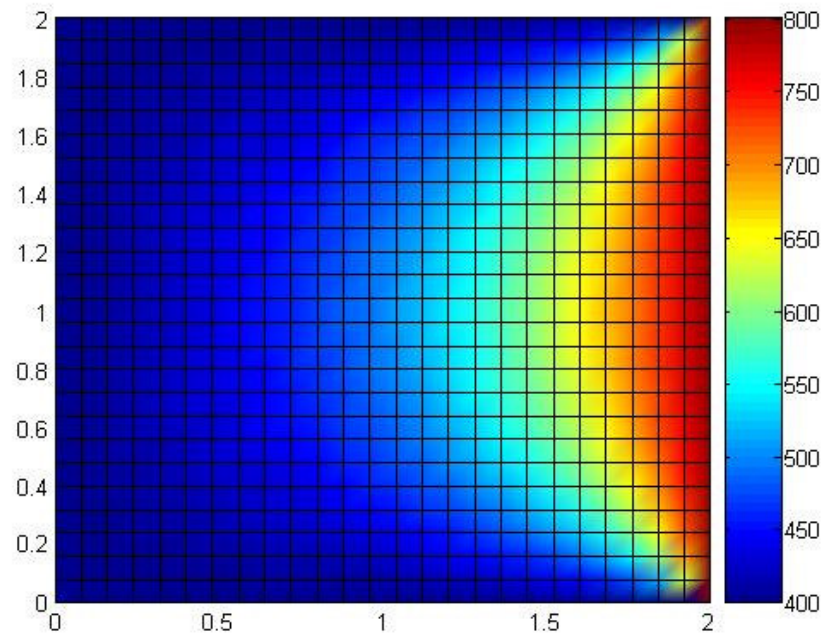


Influence du nombre de noeuds



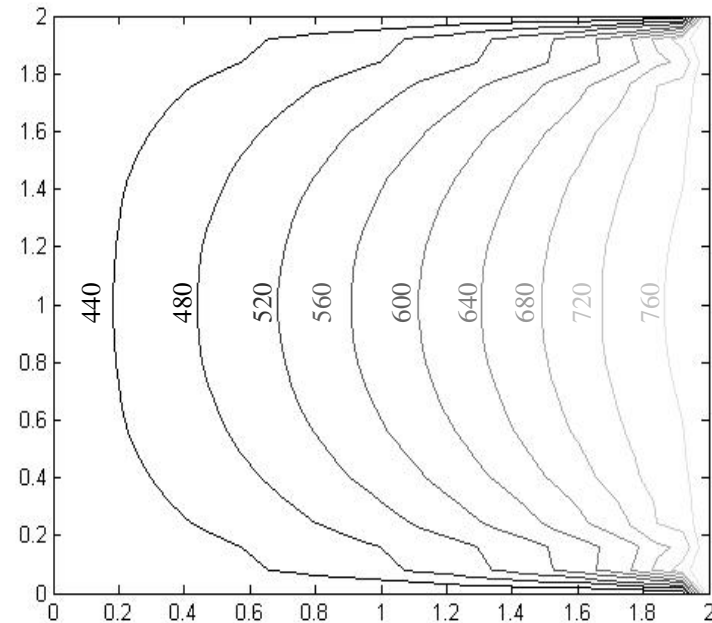
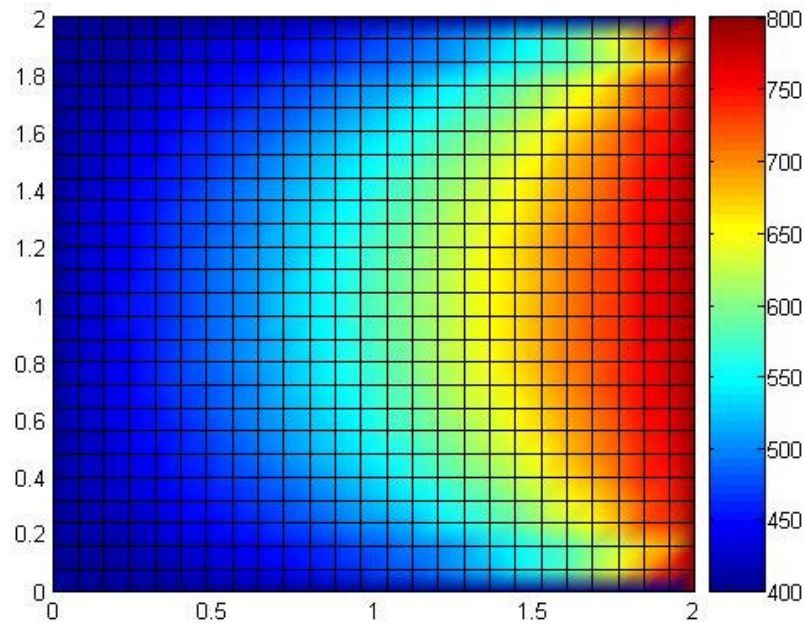
Influence du coefficient d'absorption

## Cas 2 D permanent



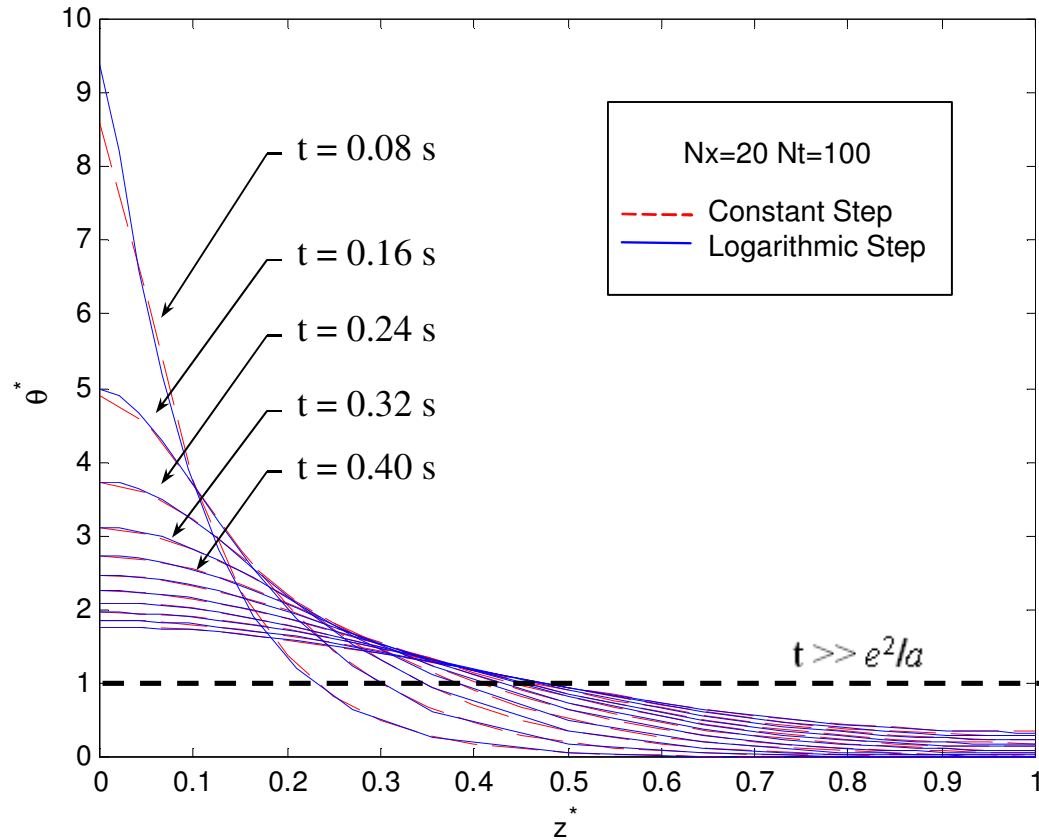
Temperature,  $n_x=n_y=25$ ,  $K=0 \text{ m}^{-1}$

## Cas 2D permanent



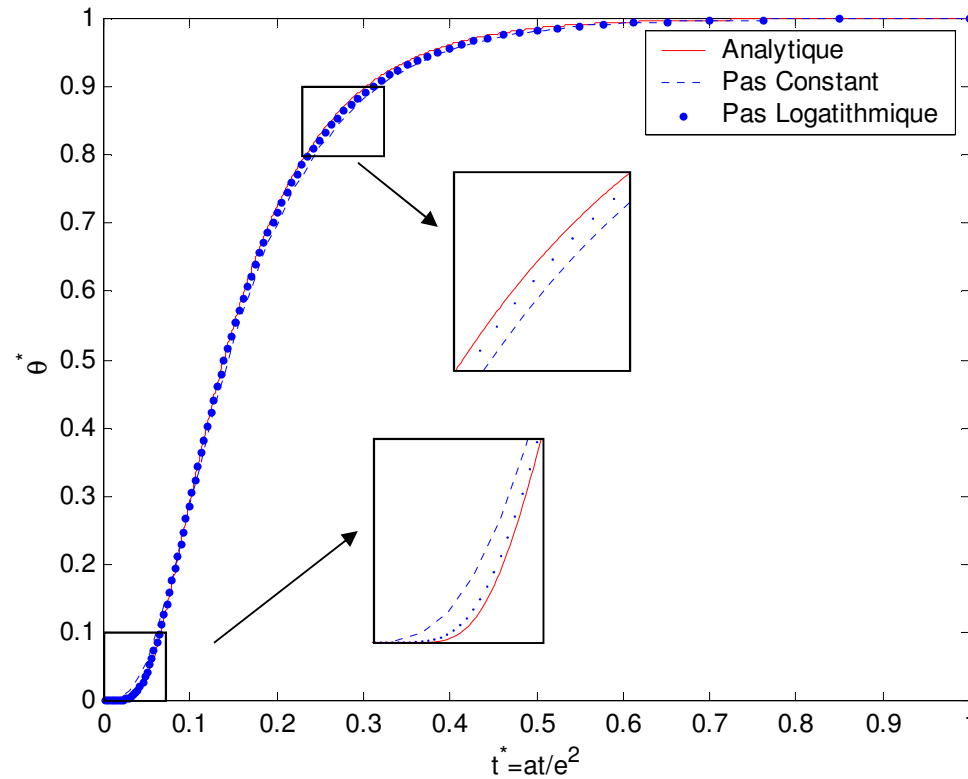
*Temperature,  $n_x=n_y=25$ ,  $K=5 \text{ m}^{-1}$*

# Cas 1D transitoire



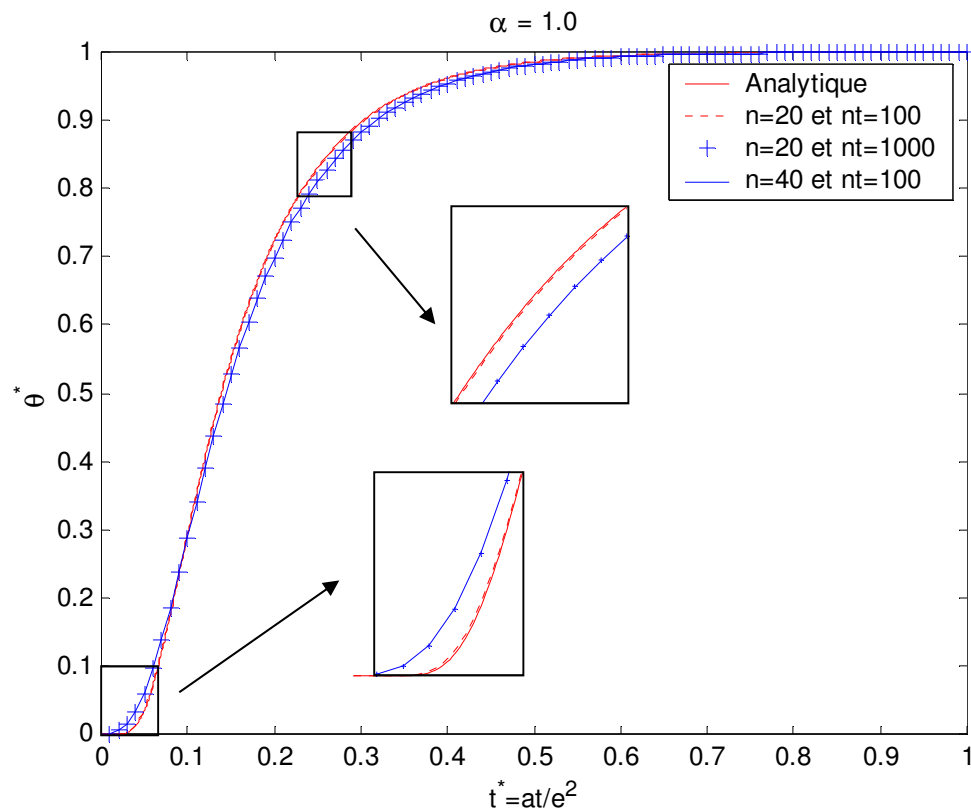
*Profil de température à différents instants*

# Cas 1D transitoire



*Thermogramme (influence de la nature du pas de temps)*

# Cas 1D transitoire



*Thermogramme (influence du nombre de noeuds)*



## Conclusion et perspectives

---



**Validation modèle semi-analytique**

**Notamment dans le cadre de la méthode Flash**



**Etape préliminaire et nécessaire à d'autres simulations**

**But : mise en place de X-FEM**