Modélisation du couplage conduction-rayonnement dans des milieux fibreux à fibres semi-transparentes

Y. Dauvois[1,2], D. Rochais[2], F. Enguehard[1], J. Taine[1]

[1] Laboratoire EM2C, UPR 288 CNRS, CentraleSupélec, Grande Voie des Vignes, 92295 Châtenay-Malabry
[2] Laboratoire DAM/DMAT/LMC, CEA Le Ripault, BP 16, 37260 Monts

Introduction

- **Les matériaux constitués de fibres de zircone ou d'alumine sont de plus en plus envisagés comme isolants thermiques à haute température** (au delà de 1000°C).

- Domaines d'application : utilisés comme barrières thermiques pour l'aéronautique, la rentrée atmosphérique, ou dans les réacteurs nucléaires.

- A haute température le transfert radiatif peut devenir prépondérant devant les autres modes de transfert.

- Objectif : **prédire par calcul les propriétés thermiques de tels milieux.**

- Améliorer et optimiser leur comportement en conditions d'utilisation, pour concevoir des systèmes les plus isolants et les plus légers possible.

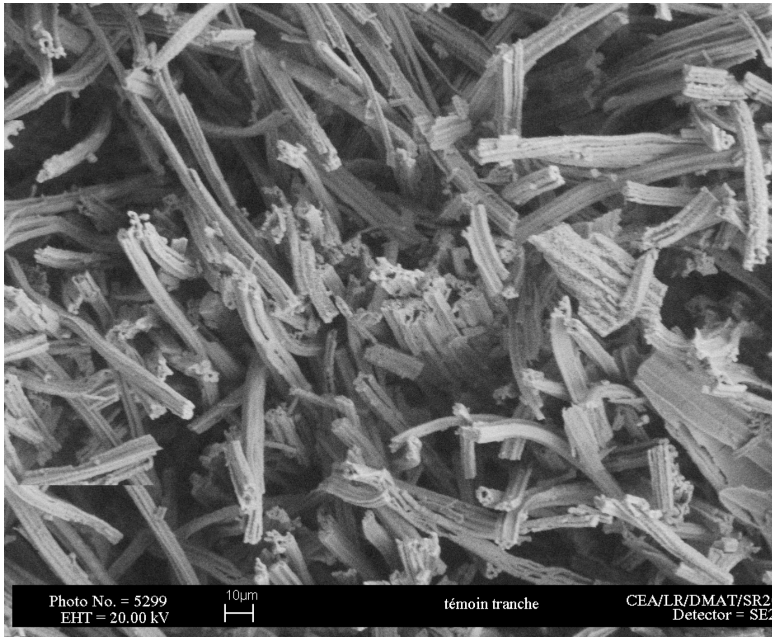
Sommaire

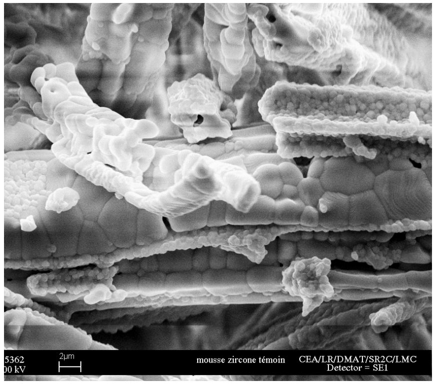
$1^{ère}$ partie

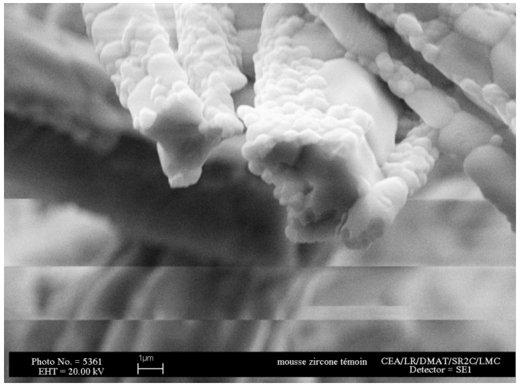
- **Résolution du problème radiatif dans les milieux fibreux**
  - Génération numérique d'un milieu fibreux
  - Caractérisation radiative d'un milieu poreux
  - Résolution

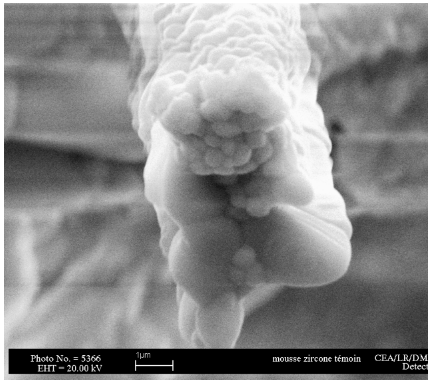
Zircar HD composé de fibres de zircone (70%)

Images obtenues au MEB





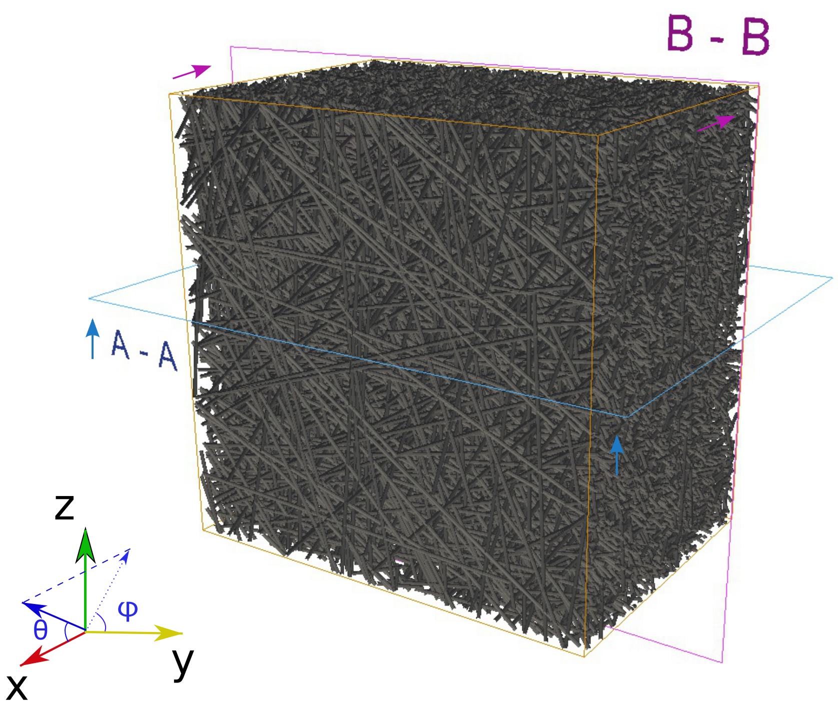




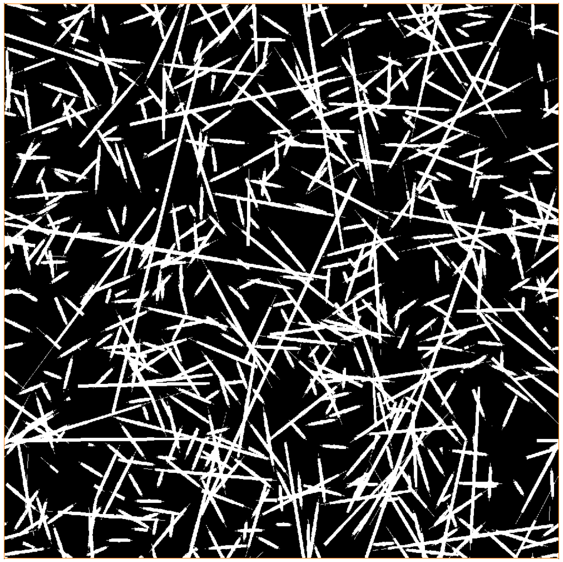
Génération numérique d'un milieu fibreux

Empilement de cylindres plongé dans le vide :

- Fibres semi-transparentes absorbantes plongées dans une phase transparente.
- Anisotrope : orientation préférentielle des fibres (plan yz)
- Porosité : 75%
- Allongement : 100



B - B



Notion de milieu non Beerien

Hypothèse du milieu Beerien :

- Loi de Beer-Lambert : Transmittivité :

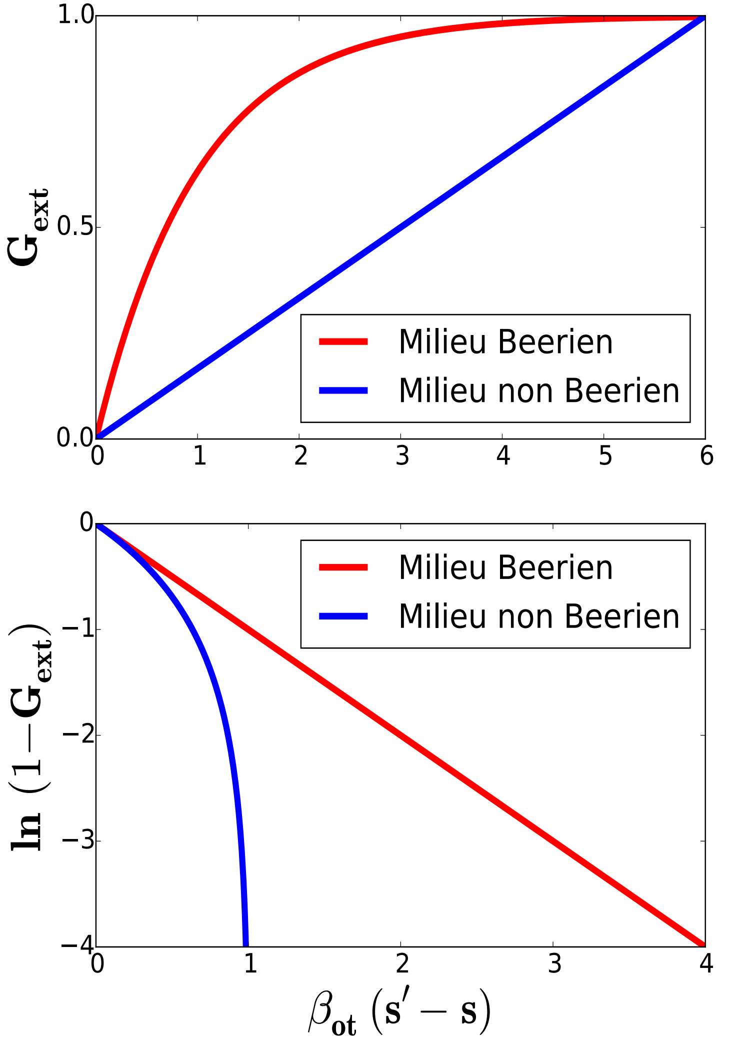
$$\tau' = \exp\left[\int_{\mathbf{s}}^{\mathbf{s}'} -\beta(\mathbf{s}'')\mathrm{d}\mathbf{s}''\right]$$

- Propriétés radiatives : $\beta_{\mathbf{ext}}$, $\kappa_{\mathbf{abs}}$, $\sigma_{\mathbf{diff}}$, $\mathbf{p}$
- ETR

Milieu non Beerien :

- On définit des fonctions de distributions cumulées
  - ➢ **G_{ext} , P_a , P_{sc} , p**

- La transmittivité : $\tau' = \mathbf{1} - \mathbf{G}_{\mathbf{ext}}(\mathbf{s}' - \mathbf{s}, \mathbf{u})$
- ETRG



Caractérisation radiative d'un milieu poreux

- **Dans le cas général :**

- **Extinction : G_{ext} (s' - s, u) =** Probabilité qu'un rayon issu d'un point M(**s**) qui se propage dans une direction **u** soit éteint sur une distance (**s' – s**).
- **Absorption : P_a (s' - s, u)**
- **Diffusion en volume : P^v_{sc} (s' - s, u)**
- **Diffusion par réflexion : P^r_{sc} (s' - s, u)**
- **Diffusion par transmission : P^t_{sc} (s' - s, u)**

- **Fonction de phase : p (u, u') =** Fonction de distribution des directions diffusées lorsque le phénomène de diffusion a lieu.

- Avec la propriété :

$$\mathbf{G_{ext}}(\mathbf{s},\mathbf{u}) = \mathbf{P_a}(\mathbf{s},\mathbf{u}) + \mathbf{P^v_{sc}}(\mathbf{s},\mathbf{u}) + \mathbf{P^r_{sc}}(\mathbf{s},\mathbf{u}) + \mathbf{P^t_{sc}}(\mathbf{s},\mathbf{u})$$

Caractérisation radiative d'un milieu poreux

- **Pour un milieu optiquement épais** (κL>>1) **:** Le problème ne dépend que des coefficients généralisés définis à l'équilibre :

Milieu Beerien

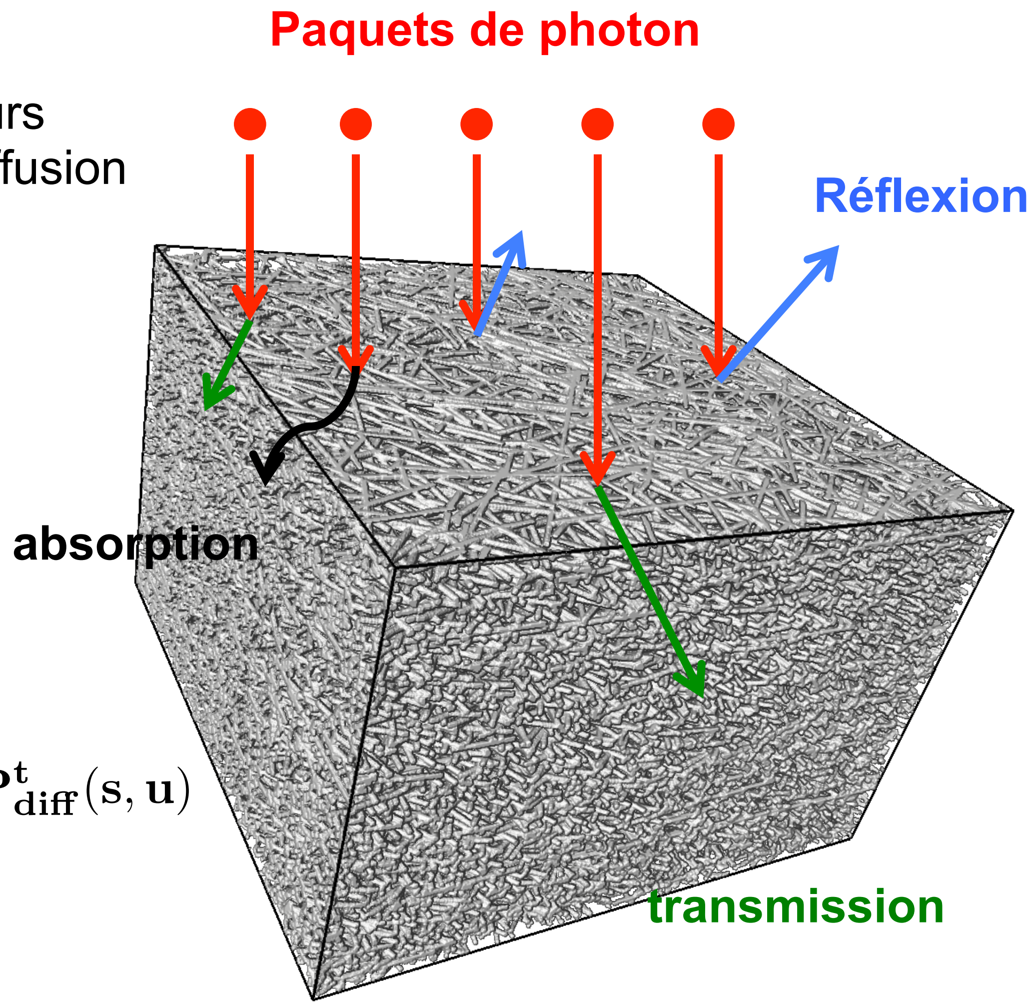
- **Extinction :** $\mathrm{B}(\mathbf{u}) = \dfrac{\mathbf{1}}{\int_{\mathbf{0}}^{\infty} [\mathbf{1} - \mathbf{G_{ext}}(\mathbf{s},\mathbf{u})]\,\mathrm{d}\mathbf{s}}$ $\longrightarrow$ $\beta(\mathbf{u})$
- **Absorption** : $\mathbf{K}(\mathbf{u}) = \mathbf{P_a}(\infty,\mathbf{u})\,\mathbf{B}(\mathbf{u})$ $\longrightarrow$ $\kappa(\mathbf{u})$
- **Diffusion :** $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{P_{sc}}(\infty,\mathbf{u})\,\mathbf{B}(\mathbf{u})$ $\longrightarrow$ $\sigma(\mathbf{u})$

Caractérisation radiative d'un milieu poreux

Méthode de Monte Carlo :

- On simule un très grand nombre de phénomènes radiatifs dans le milieu étudié.
- $\mathbf{G_{ext}}$, $\mathbf{P_a}$, $\mathbf{P_{diff}}$: Cumul des longueurs d'**extinction**, d'**absorption** et de diffusion (**réflexion** et **transmission**)
- Réflexion spéculaire (balistique)
- On a la propriété :

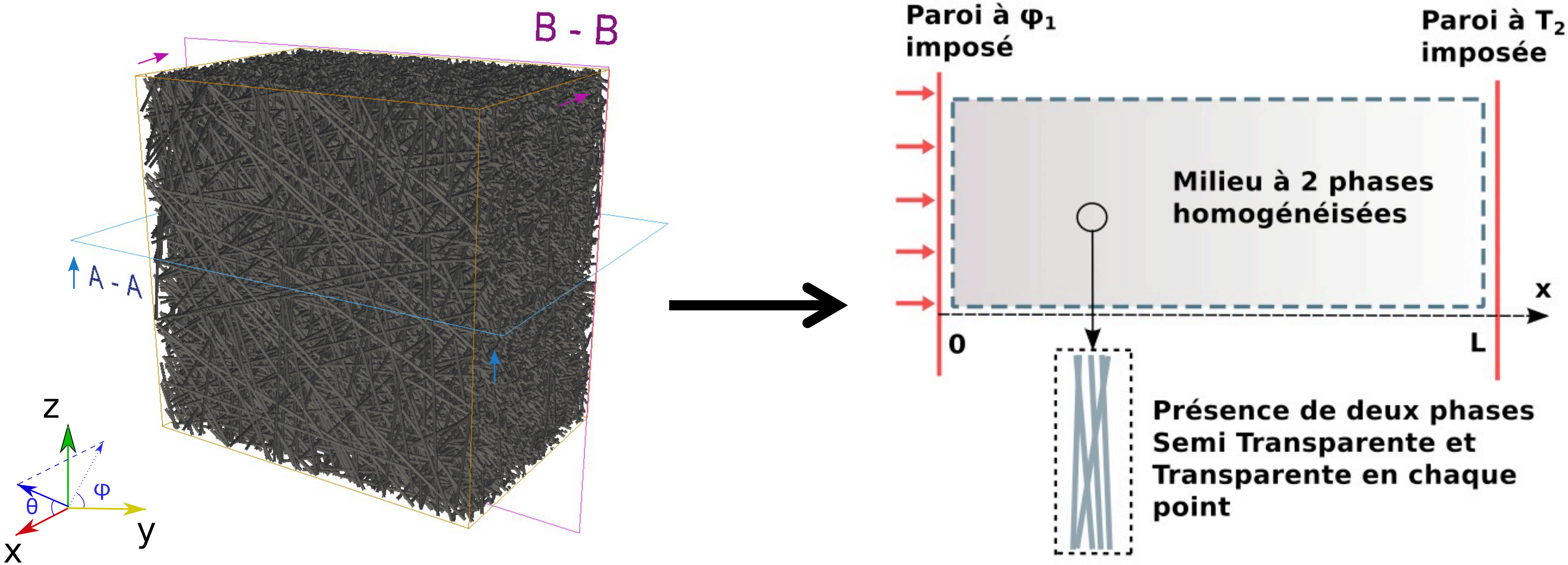
$$\mathbf{G_{ext}}(\mathbf{s},\mathbf{u}) = \mathbf{P_a}(\mathbf{s},\mathbf{u}) + \mathbf{P^r_{diff}}(\mathbf{s},\mathbf{u}) + \mathbf{P^t_{diff}}(\mathbf{s},\mathbf{u})$$



Problème thermique

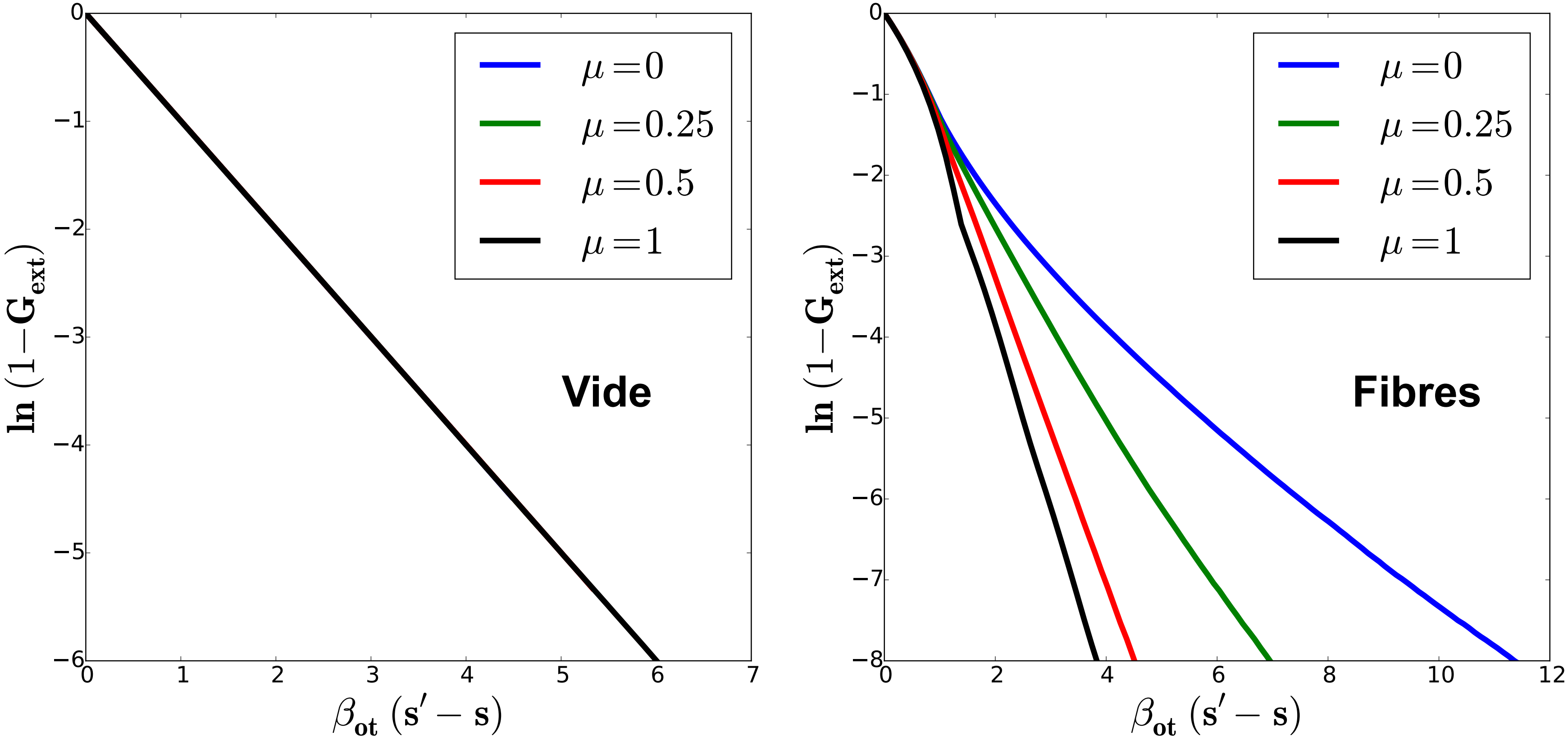
Problème radiatif :

- Homogénéisation du milieu poreux.
- En chaque point du milieu homogénéisé on connaît :
  - La probabilité de présence de chaque phase (**porosité**).
  - Caractérisée par leurs fonctions statistiques radiatives ($\mathbf{G_{ext}}$, $\mathbf{P_a}$, $\mathbf{P_{diff}}$, **p**).



Propriétés radiatives

Propriétés radiatives d'un milieu fibreux :

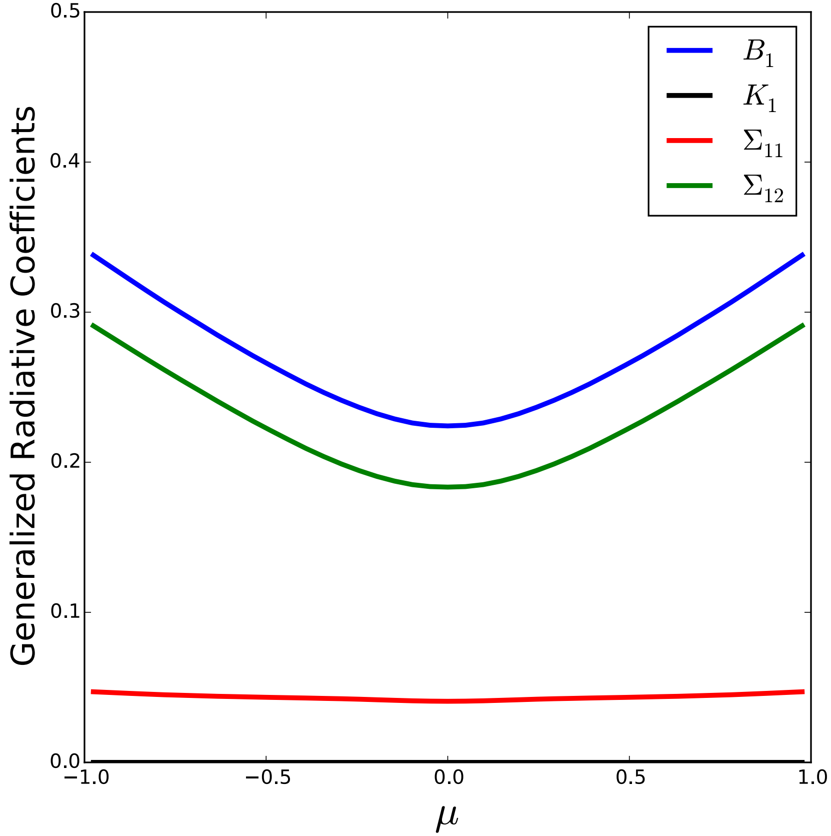


Milieu Beerien :
β_{ext} , κ_a , σ_{diff} , p + ETR

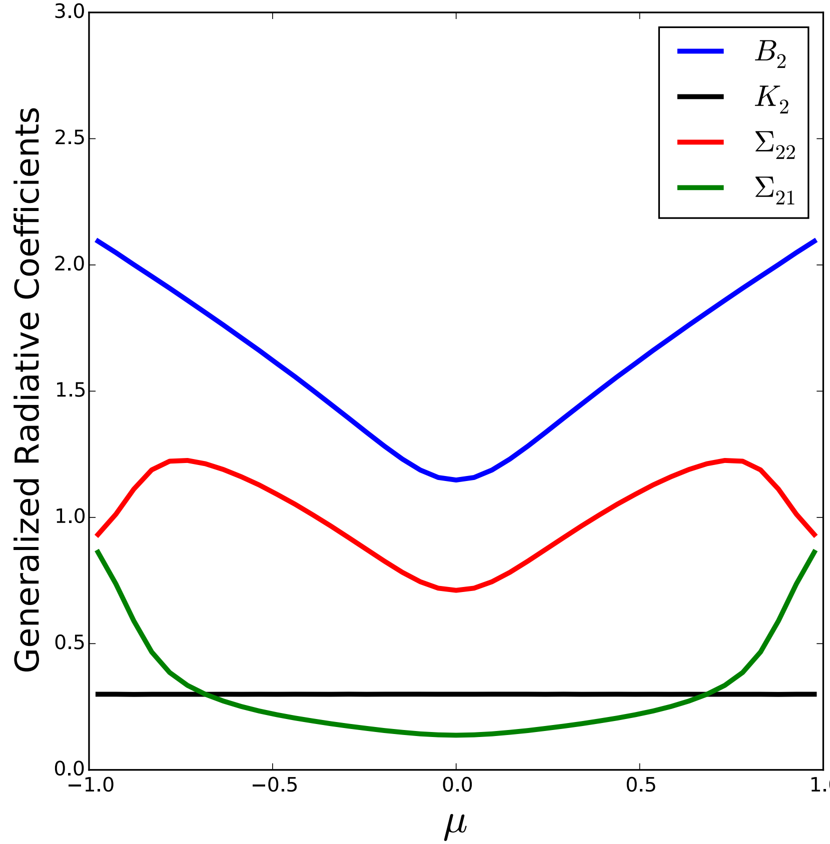
Milieu non Beerien :
G_{ext} , P_a , P_{diff} , p + ETRG

Propriétés radiatives

Vide



Fibres



Propriétés radiatives

Fonctions de phase :

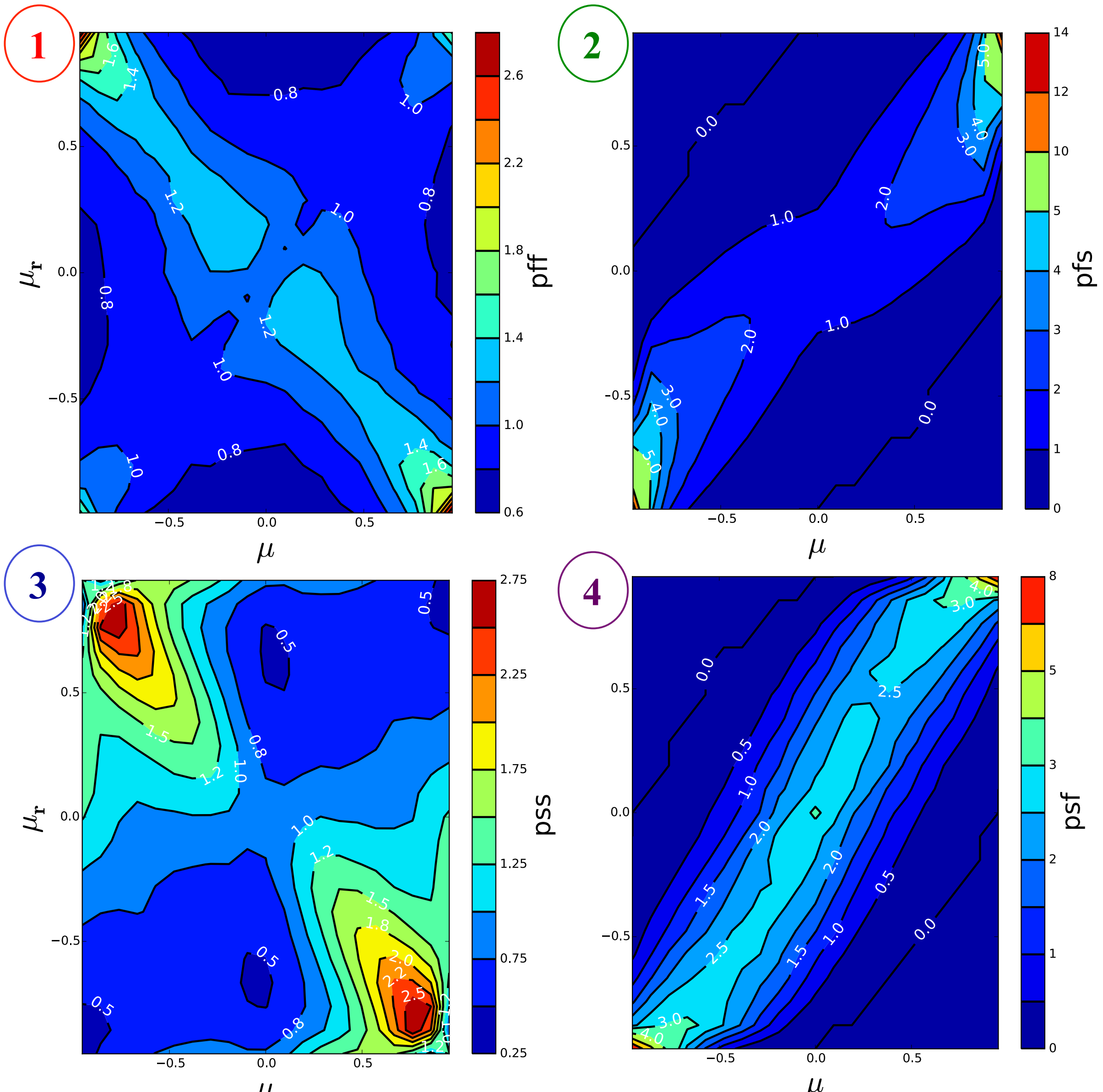
- 2 phases : 4 Fonctions de phase, réflexion spéculaire, $n_{fibres} / n_{vide} = 2$

1 **Réflexion dans le vide**

2 **Transmission vide vers fibres**

3 **Réflexion dans les fibres**

4 **Transmission fibres vers vide**



Equation de transfert + milieu optiquement épais

Vide = Milieu Beerien : ETR

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L_1'(s,u)}_{Terme\ de\ transport} = \underbrace{\kappa_1\, L_\nu^\circ[T_1(s)]}_{émission} - \underbrace{\beta_1\, L_1'(s,u)}_{extinction}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{4\pi}\left[\int_{4\pi} \sigma_{11}^r(u')\, p_{11}^r(u' \to u)\, L_1'(s,u')\, \mathrm{d}\Omega'\right.}_{diffusion\ constructive\ réfléchie} + \underbrace{\left.\frac{\Pi_2}{\Pi_1}\int_{4\pi} \Sigma_{21}^t(u')\, p_{21}^t(u' \to u)\, L_2'(s,u')\, \mathrm{d}\Omega'\right]}_{diffusion\ constructive\ transmise}$$

Fibres = Milieu non Beerien : ETRG + hypothèse du milieu optiquement épais (κL>>1 + loin des bords) : B_v (G_{ext}), K_v (P_a), Σ_v (P_{diff})

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L_2'(s,u)}_{Terme\ de\ transport} = \underbrace{K_2\, L_\nu^\circ[T_2(s)]}_{émission} - \underbrace{B_2\, L_2'(s,u)}_{extinction}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{4\pi}\left[\int_{4\pi} \Sigma_{22}^r(u')\, p_{22}^r(u' \to u)\, L_2'(s,u')\, \mathrm{d}\Omega'\right.}_{diffusion\ constructive\ réfléchie} + \underbrace{\left.\frac{\Pi_1}{\Pi_2}\int_{4\pi} \sigma_{12}^t(u')\, p_{12}^t(u' \to u)\, L_1'(s,u')\, \mathrm{d}\Omega'\right]}_{diffusion\ constructive\ transmise}$$

Equation de transfert + milieu optiquement épais

Vide = Milieu Beerien : ETR

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L_1'(s,u)}_{Terme\ de\ transport} = \underbrace{\kappa_1\, L_\nu^\circ[T_1(s)]}_{émission} - \underbrace{\beta_1\, L_1'(s,u)}_{extinction}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{4\pi}\left[\int_{4\pi} \sigma_{11}^r(u')\, p_{11}^r(u'\to u)\, L_1'(s,u')\,\mathrm{d}\Omega'\right.}_{diffusion\ constructive\ réfléchie} + \underbrace{\left.\frac{\Pi_2}{\Pi_1}\int_{4\pi} \Sigma_{21}^t(u')\, p_{21}^t(u'\to u)\, L_2'(s,u')\,\mathrm{d}\Omega'\right]}_{diffusion\ constructive\ transmise}$$

Résolution par une méthode de perturbation ➡ loi de Fourier

Fibres = Milieu non Beerien : ETRG + hypothèse du milieu optiquement épais ($\kappa L \gg 1$ + loin des bords) : B_v (G_{ext}), K_v (P_a), Σ_v (P_{diff})

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L_2'(s,u)}_{Terme\ de\ transport} = \underbrace{K_2\, L_\nu^\circ[T_2(s)]}_{émission} - \underbrace{B_2\, L_2'(s,u)}_{extinction}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{4\pi}\left[\int_{4\pi} \Sigma_{22}^r(u')\, p_{22}^r(u'\to u)\, L_2'(s,u')\,\mathrm{d}\Omega'\right.}_{diffusion\ constructive\ réfléchie} + \underbrace{\left.\frac{\Pi_1}{\Pi_2}\int_{4\pi} \sigma_{12}^t(u')\, p_{12}^t(u'\to u)\, L_1'(s,u')\,\mathrm{d}\Omega'\right]}_{diffusion\ constructive\ transmise}$$

➡ **Conductivité radiative**

Equation de transfert

Vide = Milieu Beerien : ETR

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L_1'(s,u)}_{Terme\ de\ transport} = \underbrace{\kappa_1\, L_\nu^\circ[T_1(s)]}_{émission} - \underbrace{\beta_1\, L_1'(s,u)}_{extinction}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{4\pi}\left[\int_{4\pi} \sigma_{11}^r(u')\, p_{11}^r(u' \to u)\, L_1'(s,u')\, \mathrm{d}\Omega'\right.}_{diffusion\ constructive\ réfléchie} + \underbrace{S_{21}^{sc}(s,u)}_{diffusion\ constructive\ transmise}$$

Fibres = Milieu non Beerien : ETRG

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L_2'(s,u)}_{Terme\ de\ transport} = S_2(s,u) \underbrace{- \int_{s_b}^{s} S_2(s',u) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G_{ext\,2}(s-s')\, \mathrm{d}s'}_{Terme\ d'extinction} \underbrace{- L_2^b(s_b,u)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G_{ext\,2}(s-s_b)}_{Effets\ de\ bord}$$

$$S_2(s,u) = \underbrace{S_2^e(s)}_{émission} + \underbrace{S_{22}^{sc}(s,u) + S_{12}^{sc}(s,u)}_{diffusion\ constructive}$$

Equation de transfert

Vide = Milieu Beerien : ETR

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L'_1(s,u)}_{Terme\ de\ transport} = \underbrace{\kappa_1\, L^\circ_\nu[T_1(s)]}_{\acute{e}mission} - \underbrace{\beta_1\, L'_1(s,u)}_{extinction}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{4\pi}\left[\int_{4\pi} \sigma^r_{11}(u')\, p^r_{11}(u' \to u)\, L'_1(s,u')\, \mathrm{d}\Omega' +\right.}_{diffusion\ constructive\ r\acute{e}fl\acute{e}chie} \quad \underbrace{S^{sc}_{21}(s,u)}_{diffusion\ constructive\ transmise}$$

Résolution par une méthode de Monte Carlo

Fibres = Milieu non Beerien : ETRG

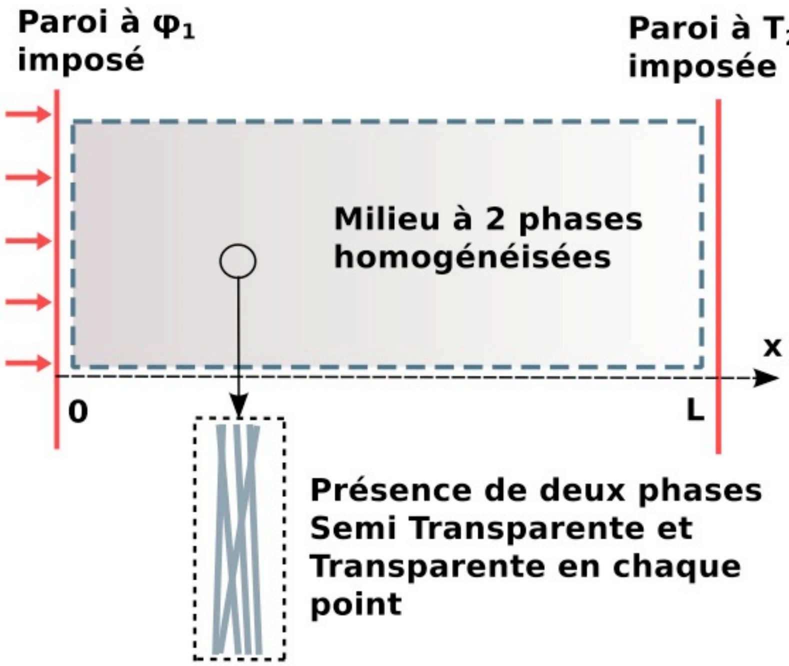
$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L'_2(s,u)}_{Terme\ de\ transport} = S_2(s,u) - \underbrace{\int_{s_b}^{s} S_2(s',u) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G_{ext\,2}(s-s')\, \mathrm{d}s'}_{Terme\ d'extinction} - \underbrace{L^b_2(s_b,u)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G_{ext\,2}(s-s_b)}_{Effets\ de\ bord}$$

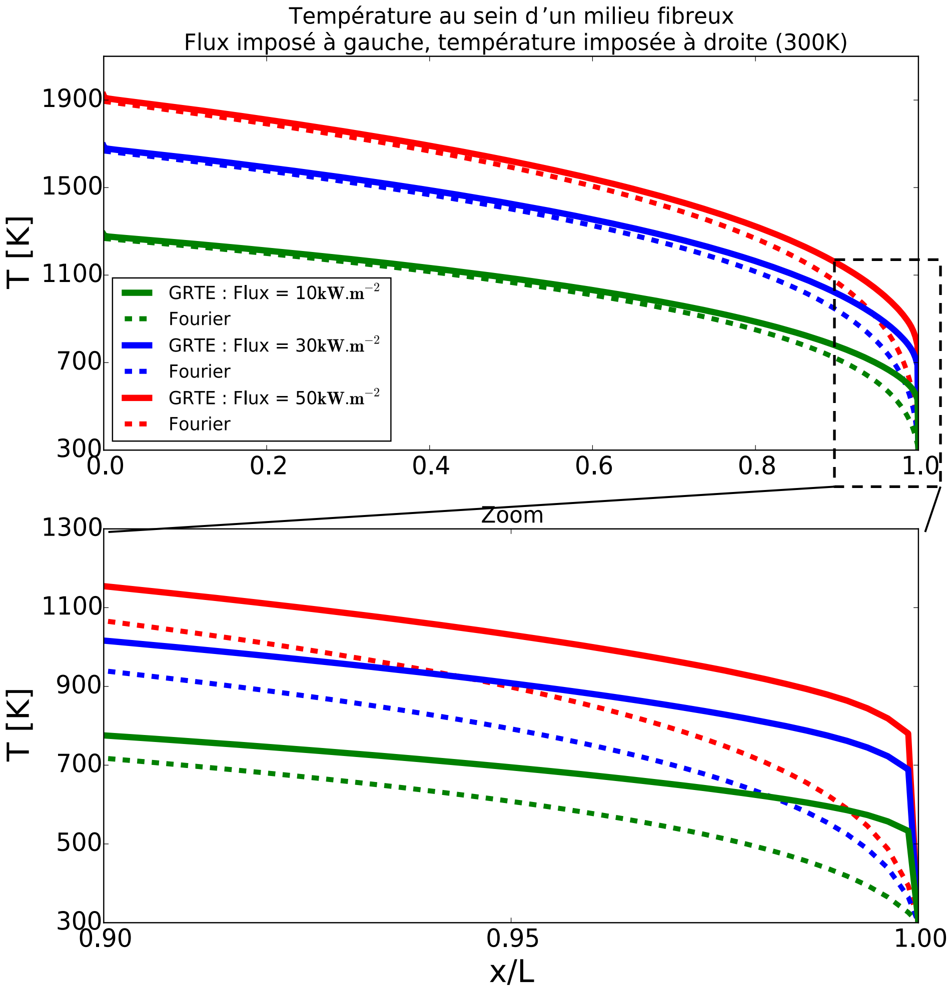
$$S_2(s,u) = \underbrace{S^e_2(s)}_{\acute{e}mission} + \underbrace{S^{sc}_{22}(s,u) + S^{sc}_{12}(s,u)}_{diffusion\ constructive}$$

Application à un milieu fibreux

Prise en compte des effets de bord :

- Résolution par une méthode de Monte Carlo similaire à une méthode classique de résolution de l'ETR.



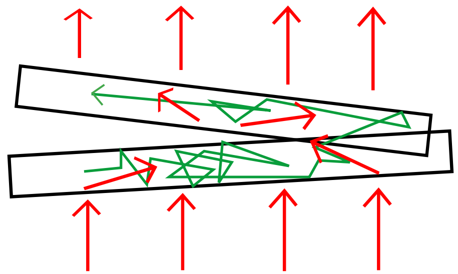


2nd Partie

- **Couplage avec la conduction thermique dans les fibres**
  - Résolution stochastique
  - Couplage avec le rayonnement
  - Un exemple

Résolution stochastique

- **Problème thermique dans les fibres :**



$$\lambda \mathbf{\Delta T(s)} = -\mathbf{P(s)}$$

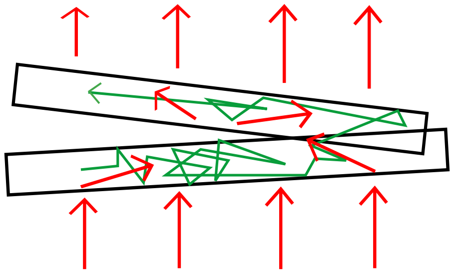
- **Processus de diffusion :**
  - L'équation régissant le mouvement d'une particule dans un milieu dont les propriétés physiques peuvent varier s'écrit :

$$\mathrm{d}\mathbf{X}(t) = \underbrace{\mathbf{a}[\mathbf{X}(t)]\,\mathrm{d}t}_{\text{dérive / terme advectif}} + \underbrace{\mathbf{b}[\mathbf{X}(t)]\,\mathrm{d}\mathbf{B}(t)}_{\text{diffusion}}$$

  - On appelle X(t) processus statistique de diffusion Itô et B(t) Mouvement Brownien. a est la matrice de déplacement, b la matrice de diffusion.

Résolution stochastique

- **Problème thermique dans les fibres :**



$$\lambda \boldsymbol{\Delta} \mathbf{T}(\mathbf{s}) = -\mathbf{P}(\mathbf{s})$$

- **Processus de diffusion :**
  - L'équation régissant le mouvement d'une particule dans un milieu dont les propriétés physiques peuvent varier s'écrit :

$$\mathrm{d}\mathbf{X}(t) = \underset{0}{\cancel{\mathbf{a}[\mathbf{X}(t)]}}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\mathbf{b}[\mathbf{X}(t)]}_{1}\,\mathrm{d}\mathbf{B}(t)$$

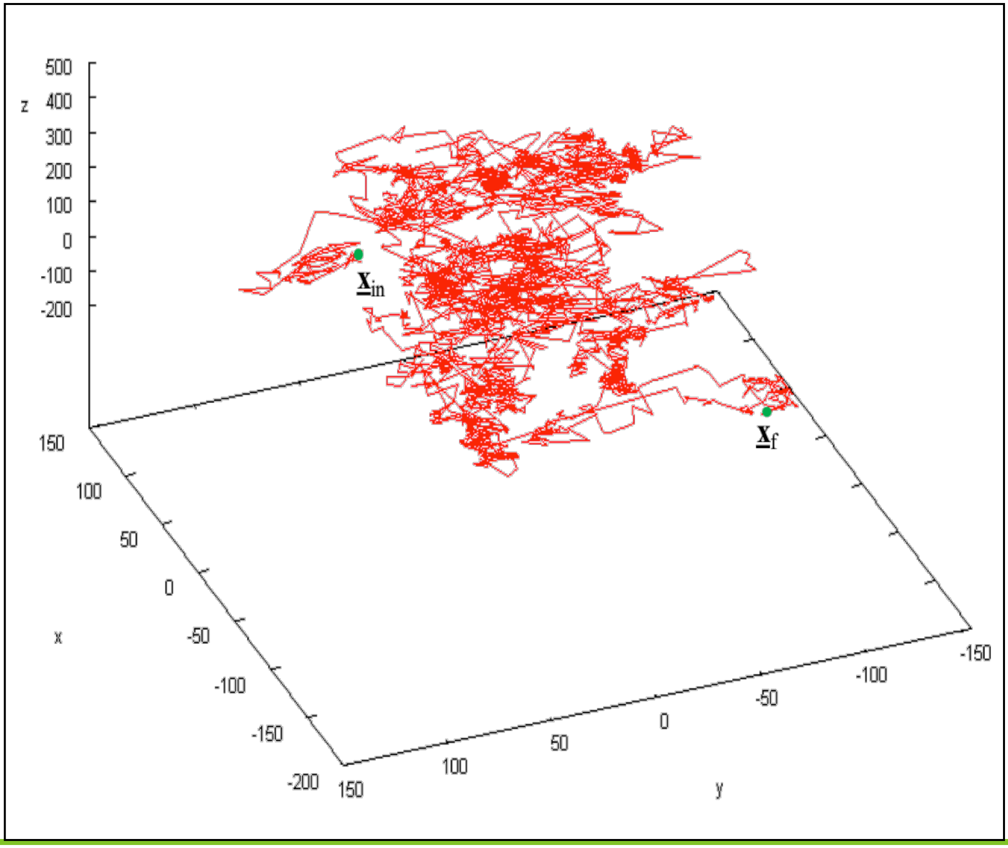
Conductivité isotrope

  -

$$\mathrm{d}\mathbf{X}(t) = \mathrm{d}\mathbf{B}(t)$$

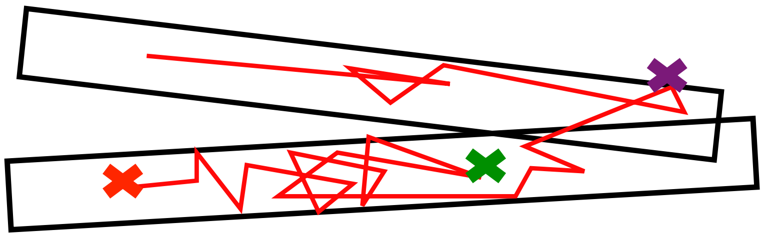
Mouvement Brownien

- **L'accroissement B(t+dt) – B(t) est indépendant**
- **Cet accroissement est une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance dt**



Résolution stochastique

- **Marche aléatoire à l'échelle de la fibre :**

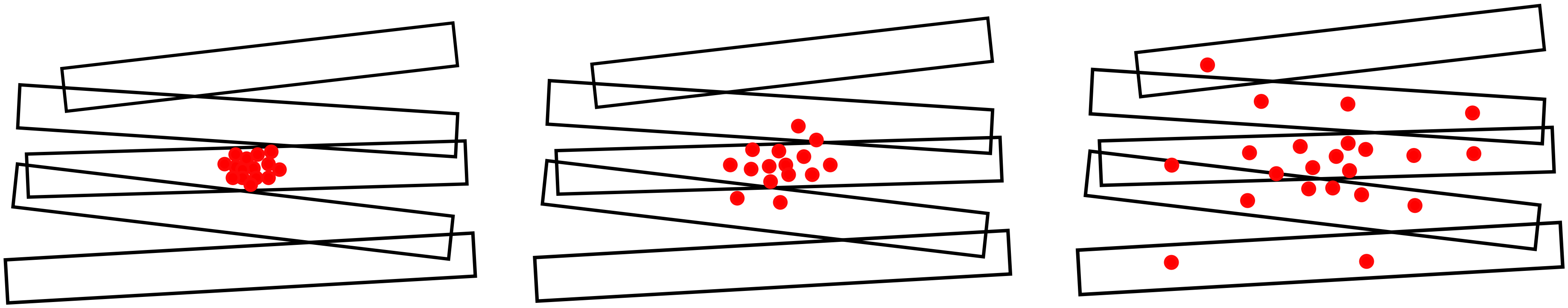


1. **Initialisation du marcheur :**
Tirage aléatoire de la position et de la direction + tirage d'un libre parcours

2. **Diffusion :**
Tirage aléatoire d'une direction isotrope + tirage d'un nouveau libre parcours

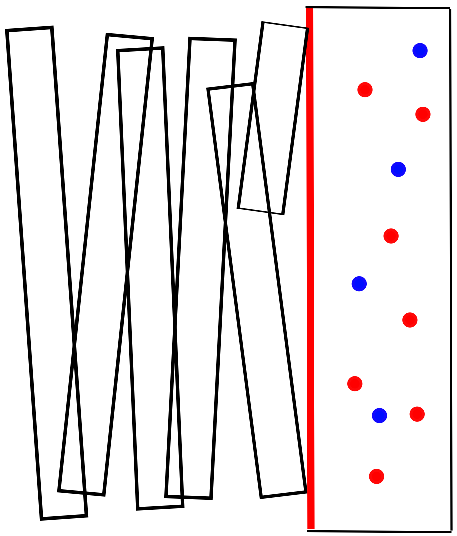
3. **Collision sans changement de phase :**
Tirage aléatoire d'une direction suivant une loi de paroi + tirage d'un nouveau libre parcours

- **à l'échelle du matériau :** chaque marcheur possède une énergie Δh qui va se répartir



Résolution stochastique

- **Conditions aux limites :**
  - Température imposée :

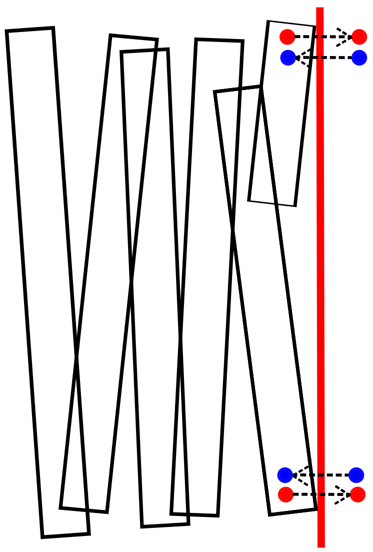


Réservoir avec un régulateur :

A intervalles de temps réguliers :

- Si le nombre de marcheur est trop important on en tue.
- Si le nombre de marcheur est trop faible on en crée.

  - Flux imposé :

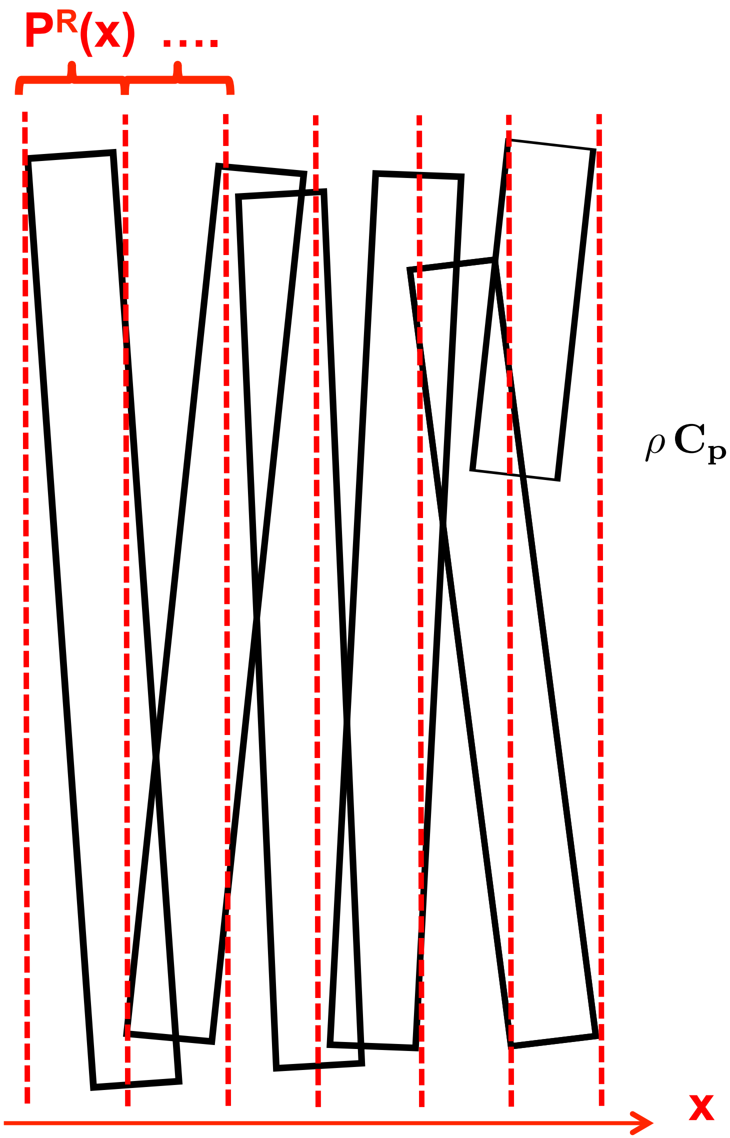


Frontière avec un régulateur :

A intervalles de temps réguliers :

- Si le nombre de marcheur sortant est trop important on les fait rebondir vers l'intérieur.
- Si le nombre de marcheur est trop faible on en fait rentrer.

Couplage avec le rayonnement



Régulation volumique de l'énergie :

A intervalles de temps réguliers :

- On crée des marcheurs si la puissance entraine une montée trop importante de température.
- On en tue dans le cas contraire.

$$\rho\, \mathbf{C_p} \left[\mathbf{T}(\mathbf{t_w} + \mathbf{dt_w}) - \mathbf{T}(\mathbf{t_w})\right] \mathbf{dV} = \mathbf{P}\, \mathbf{dV}\, \mathbf{dt_w} - \mathbf{dt_w} \sum_{\mathbf{S}} \vec{q}.\vec{dS}$$

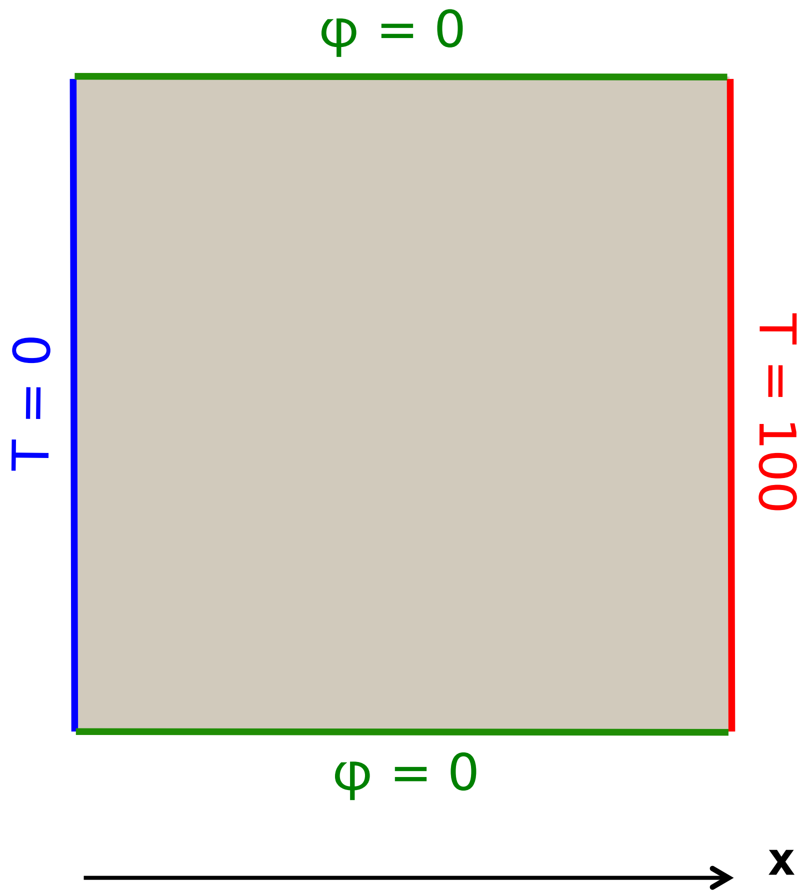
Limitation :

- Puissance 1D, on néglige les variations de température dans chaque tranche
- Impose une taille des tranches

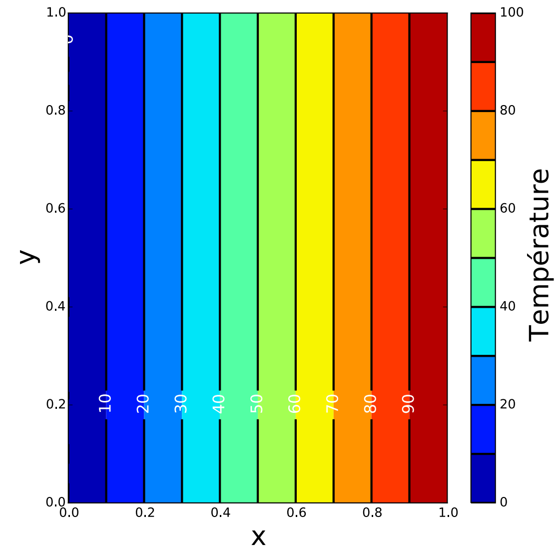
Intérêts

- **Pourquoi les marches aléatoires ?**
  - Résolution sans maillage, ne nécessite que la connaissance de l'interface et des propriétés des phases en présence.
  - Ne demande que très peu de mémoire à la différence de la méthode des éléments finis.
  - Parallélisation très facile.
  - Gestion souple des conditions limites.

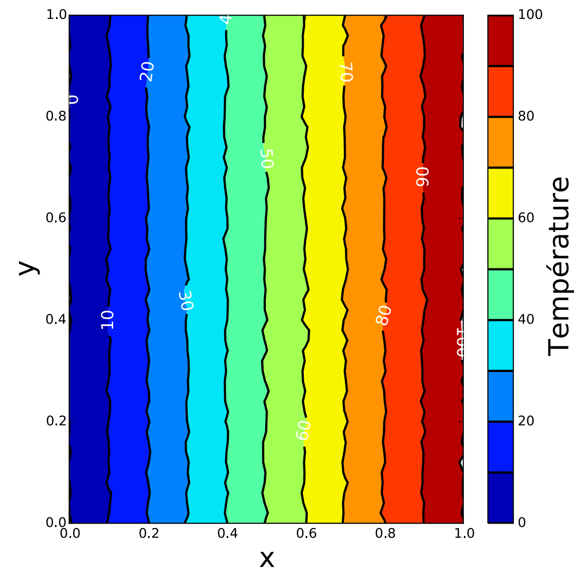
Un exemple



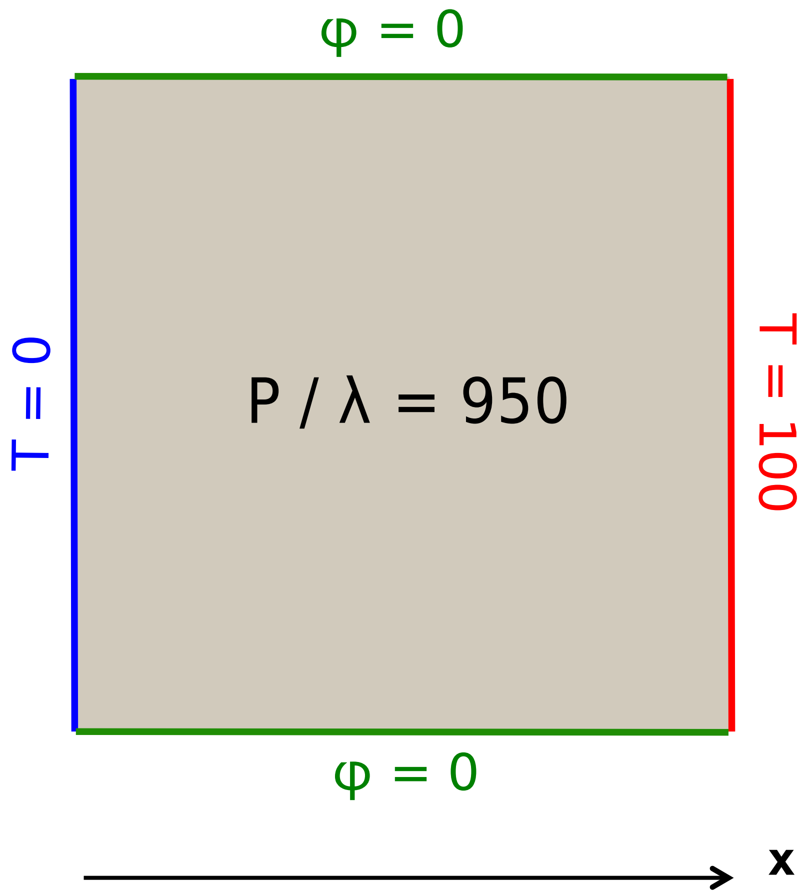
Eléments finis



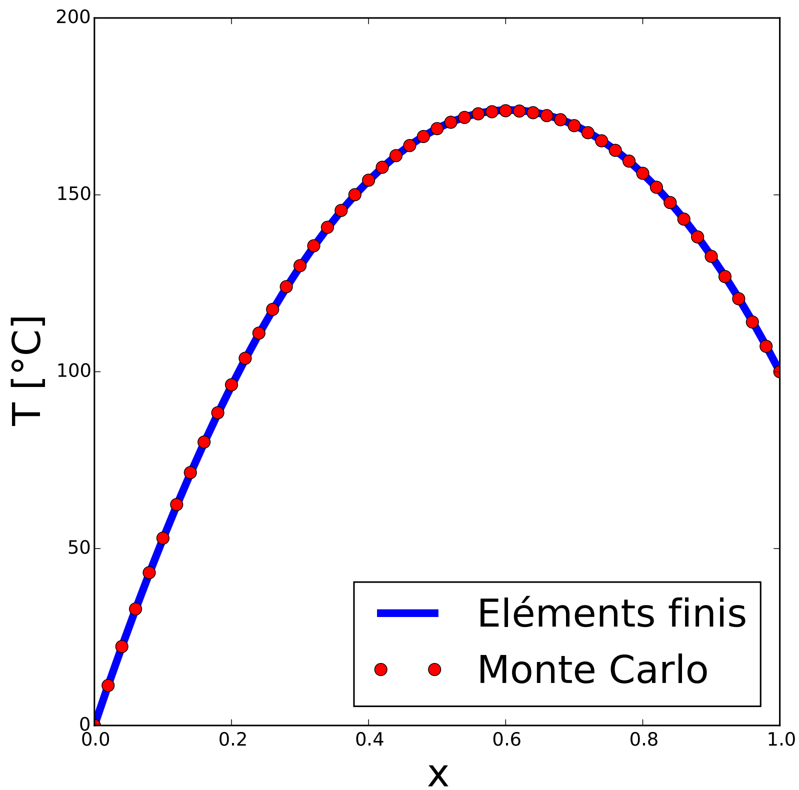
Monte Carlo



Un exemple



φ = 0
T = 0
P / λ = 950
T = 100
φ = 0
x



200
150
100
50
0
T [°C]
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x
Eléments finis
Monte Carlo

Conclusion et perspectives

- **Modélisation du transfert radiatif et conductif :**
  - A travers un matériau comportant plusieurs phases pouvant être de nature non Beeriennes et proche d'une paroi.
  - Ne nécessite pas de maillage.
  - Connaissance des interfaces entre chaque phase.
  - Propriétés de la matière à une échelle inférieure à celle des pores (indice optique, réflectivité, absorptivité, conductivité).
  - Hypothèses du transfert thermique macroscopique, taille des pores plus grand que la longueur d'onde, le phénomène de diffraction est négligé.

- **Perspectives : Faire varier les paramètres**
  - Changer la configuration du milieu fibreux (Porosité, allongement, dispersion), les propriétés des fibres et du gaz.
  - Comparer avec les résultats issus d'autres codes et avec ceux obtenus expérimentalement.

Merci pour votre attention

Propriétés radiatives

- **Normalisation de la fonction de phase :**
  - Conservation de l'énergie :

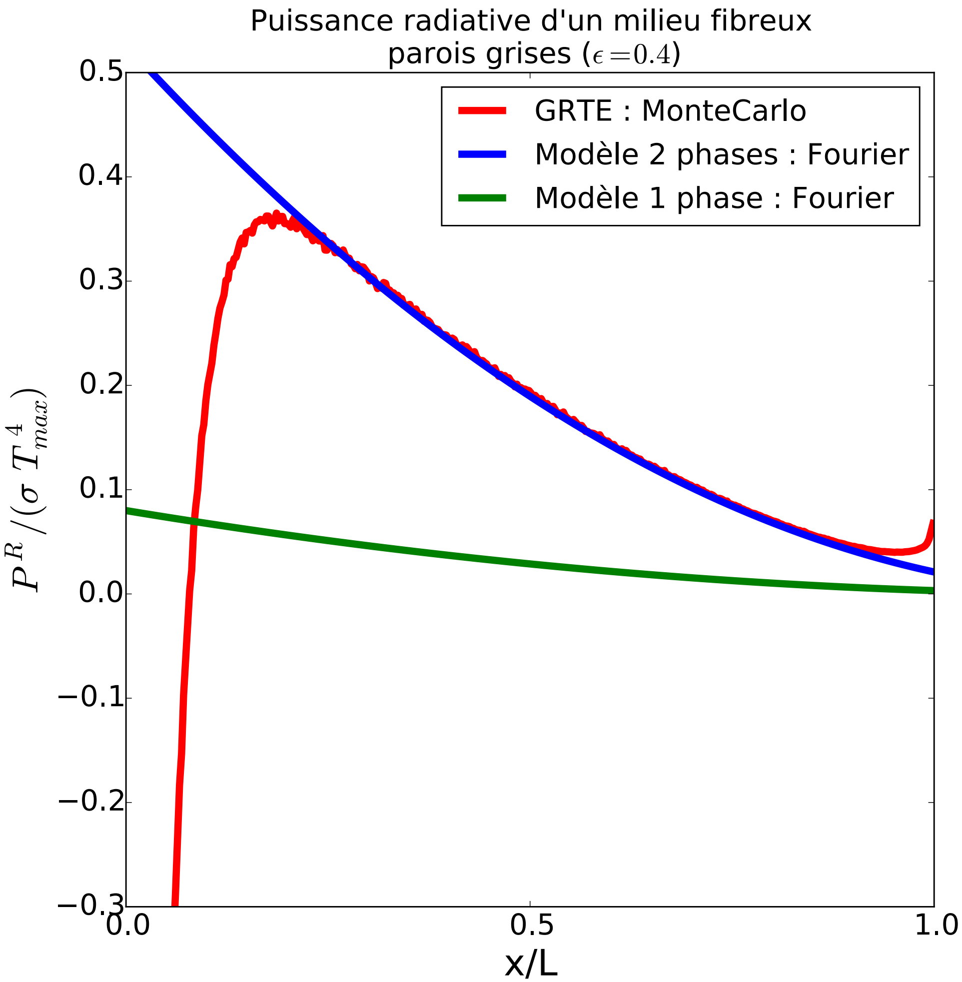
$$\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} p(u,u')\,\mathrm{d}\Omega' = 1$$

  - Respect du théorème de réciprocité :

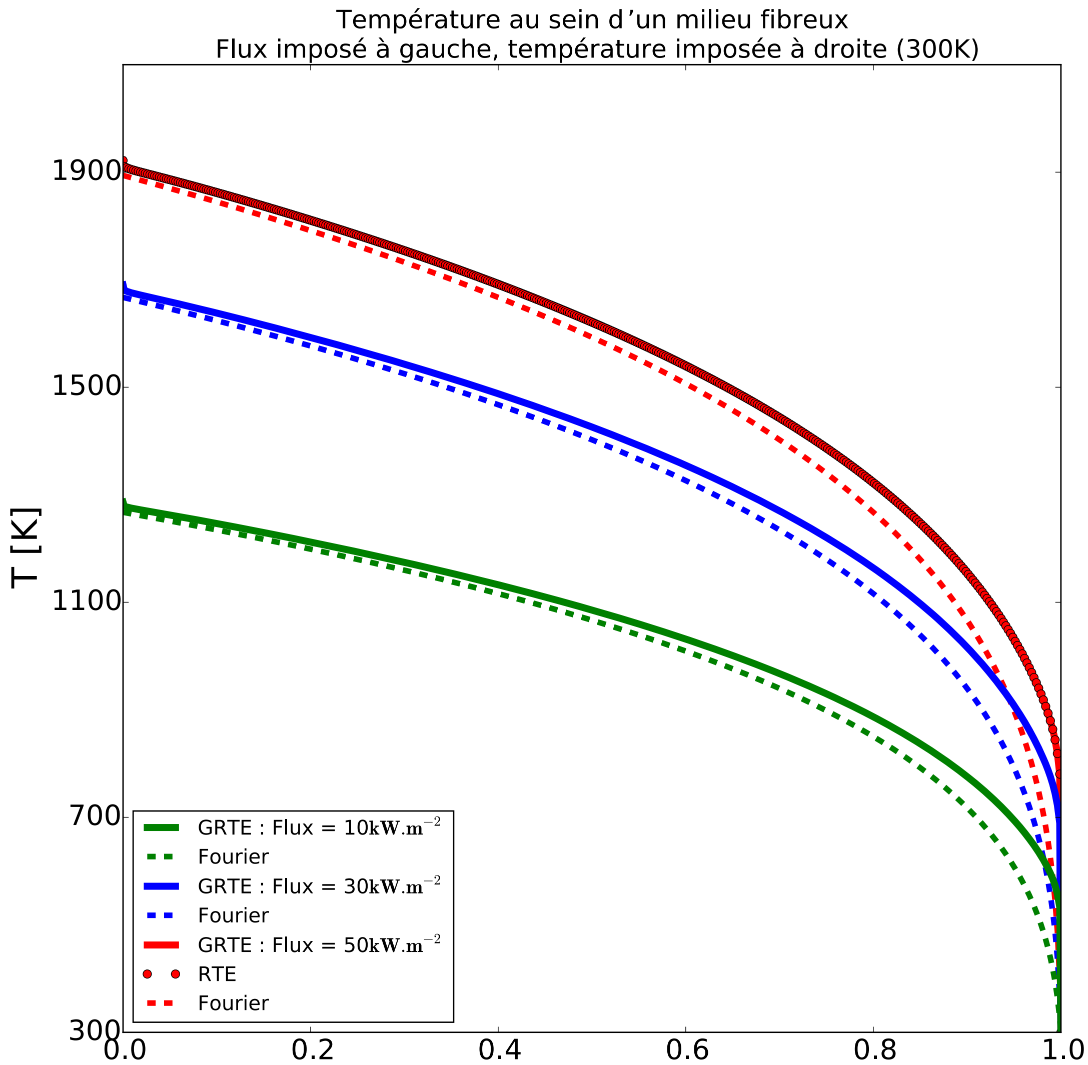
$$\Sigma(u_1)\,p(u_1,u_2) = \Sigma(-u_2)\,p(-u_2,-u_1)$$

Puissances radiatives GRTE / Fourier

- **En imposant un profil de température linéaire (T1/T2 = 5) :**



RTE / GRTE



Température au sein d'un milieu fibreux
Flux imposé à gauche, température imposée à droite (300K)
T [K]
1900
1500
1100
700
300
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
GRTE : Flux = 10$\mathbf{kW.m^{-2}}$
Fourier
GRTE : Flux = 30$\mathbf{kW.m^{-2}}$
Fourier
GRTE : Flux = 50$\mathbf{kW.m^{-2}}$
RTE
Fourier