

Journées 2012 de la Société Française de Thermique

Guillaume TERRÉE (RAPSODEE)

Mouna EL-HAFI (RAPSODEE)

Stéphane BLANCO (LAPLACE)

Richard FOURNIER (LAPLACE)

Pierre MARÉCHAL (IMT)

**Application de l'approximation de diffusion aux
statistiques de premier retour
dans les milieux diffusants d'épaisseur optique
intermédiaire**

PLAN

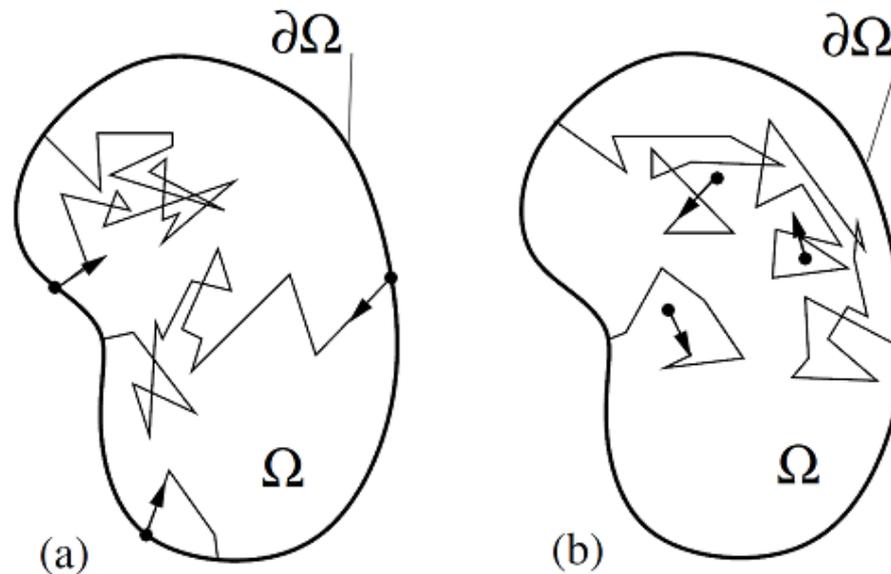
- I. Problèmes de premier retour et approximation de diffusion
- II. Développement de Hilbert
- III. Liens entre premier retour et premier passage
- IV. Applications aux statistiques de premier retour
 - I. Résultats simples
 - II. Extension en épaisseurs optiques intermédiaires

PLAN

- I. **Problèmes de premier retour et approximation de diffusion**
- II. Développement de Hilbert
- III. Liens entre premier retour et premier passage
- IV. Applications aux statistiques de premier retour
 - I. Résultats simples
 - II. Extension en épaisseurs optiques intermédiaires

Problèmes de premier retour : définition

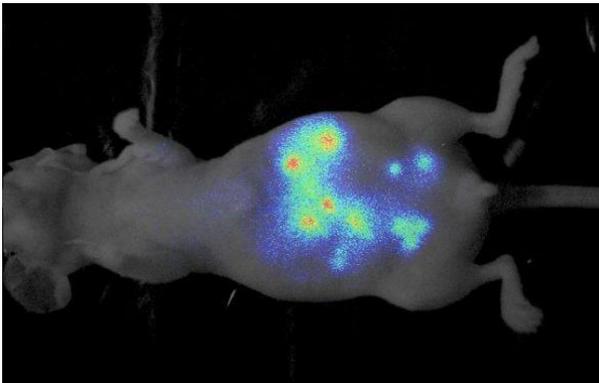
- **Problème de premier retour (a)** : problème de transport corpusculaire où on essaie de déterminer le délai, la longueur parcourue, ou le nombre d'« événements » avant premier retour à la frontière du domaine d'une particule partant depuis la frontière
- **Problème de premier passage (b)** : idem, mais la particule part depuis l'intérieur du domaine



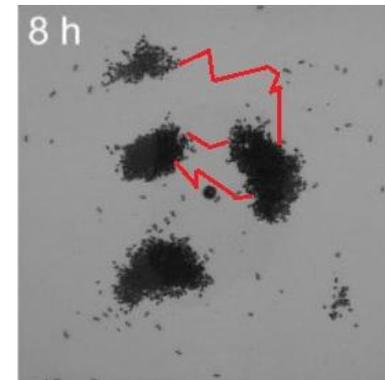
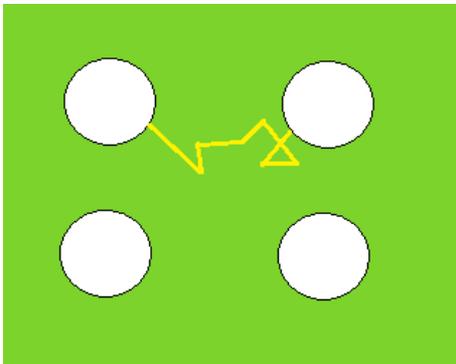
Problèmes de premier retour : contexte

Problèmes de premier retour (avec diffusion) en pratique :

- **Tomographie optique diffuse** : technique d'imagerie médicale consistant à observer des tissus vivants en proche infrarouge et à retrouver les propriétés optiques internes par inversion → nécessité d'un modèle direct
- **Photobioréacteurs** : cuve de production d'algues microscopiques, alimentée en lumière par des fibres optiques : modélisation ?



Problèmes de premier retour : contexte



- **Biologie** : Le transport corpusculaire est une façon de modéliser les processus d'agrégation et de construction chez les insectes sociaux.

Contexte du travail

- Suite de la thèse de Julien-Yves ROLLAND : « *Étude statistique des chemins de premier retour aux nombres de Knudsen intermédiaires : De la simulation par méthode de Monte Carlo à l'utilisation de l'approximation de diffusion* », 2009
- Parallèle aux travaux de Mazzolo, Bénichou,...
- Résultats pour l'instant théoriques

Milieux diffusants : modèles

Méthodes et modélisations déjà utilisées pour le transport corpusculaire en milieu diffusant :

- Méthodes de Monte-Carlo
- Méthodes aux ordonnées discrètes
- **Approximation de diffusion**
- ...

Approximation de diffusion

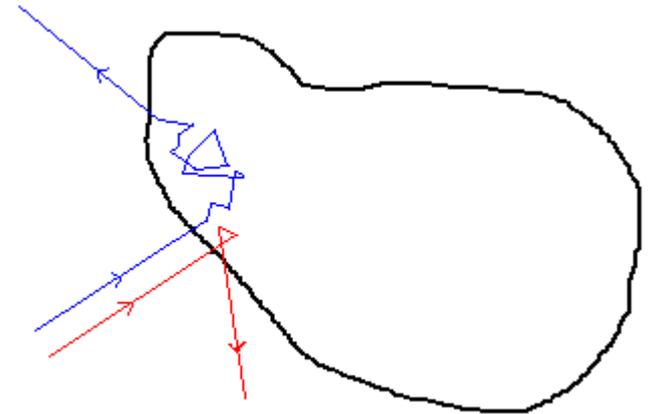
- Utilisée pour modéliser le transport corpusculaire en milieu très diffusant
- Basée sur l'approximation P1, d'où on a retiré les effets du transport balistique des photons

$$\text{Approximation P1 : } L(\mathbf{P}; \vec{\omega}; t) = \frac{c}{4\pi} u(\mathbf{P}; t) + \frac{3}{4\pi} \vec{j}(\mathbf{P}; t) \cdot \vec{\omega}$$

- La modélisation se fait sur l'espace-temps ordinaire et non sur l'espace des phases.
- La propagation de la lumière devient un phénomène diffusif.

Approximation de diffusion et premier retour : difficultés

- Approximation P1 invalide près des frontières
- Une portion des photons entrants n'obéit pas à l'approximation de diffusion.
- Comment représenter un Dirac de flux entrant ?



PLAN

- I. Problèmes de premier retour et approximation de diffusion
- II. Développement de Hilbert**
- III. Liens entre premier retour et premier passage
- IV. Applications aux statistiques de premier retour
 - I. Résultats simples
 - II. Extension en épaisseurs optiques intermédiaires

Développement de Hilbert : principe

Problème : diffusion pure dans un milieu borné

Approche : développement limité de L selon Kn

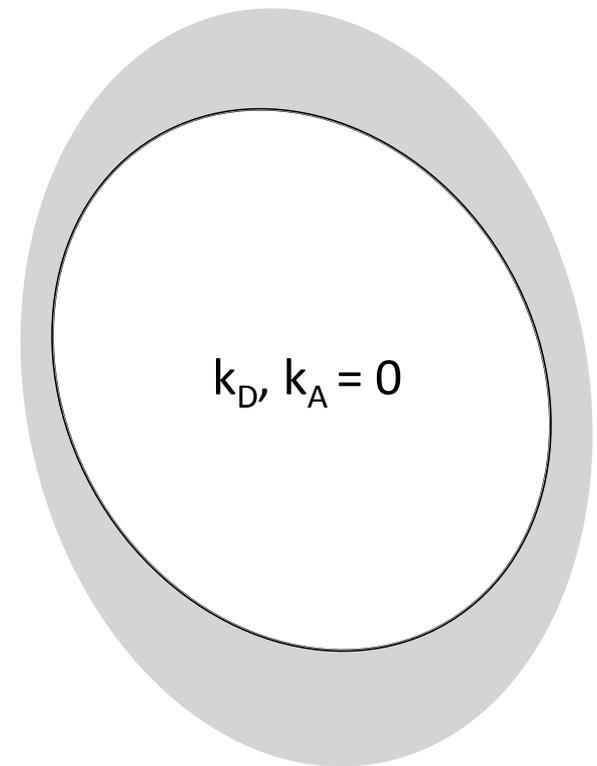
$$L = L(P; \vec{\omega}; t; k_D)$$

$$Kn = 1/k_D H \quad \tau = Kn t$$

$$L = L(P; \vec{\omega}; \tau; Kn)$$

$$L(P; \vec{\omega}; \tau; Kn) = \sum_{i=0}^{+\infty} L_i(P; \vec{\omega}; \tau) Kn^i$$

$$\tilde{L}_1(P; \vec{\omega}; \tau; Kn) = \sum_{j=0}^i L_j(P; \vec{\omega}; \tau) Kn^j$$



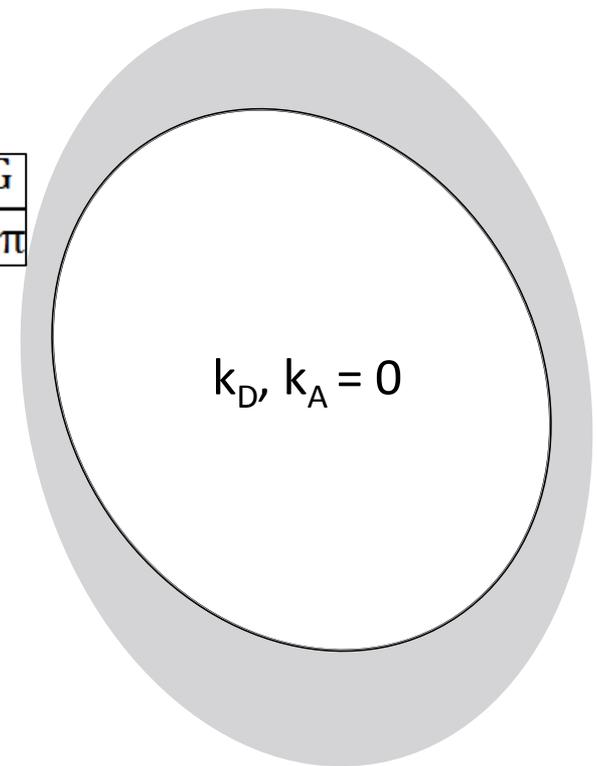
Développement de Hilbert : situation

ETR en milieu diffusant uniforme et isotrope,
avec diffusion isotrope, et sans entrée aux frontières :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \partial_t L + \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_p(L) = -k_D(L - cu) \\ \vec{\omega} \cdot \vec{n}_s < 0 \Rightarrow L = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{sur } \Omega \\ \text{sur } \partial\Omega \end{array} \quad \boxed{cu = \frac{G}{4\pi}}$$

Réécriture de l'équation à l'intérieur :

$$\frac{Kn^2}{c} \partial_\tau L + Kn \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_p(L) = -\frac{1}{H} (L - cu)$$



Développement de Hilbert : résultats

Poussé à l'ordre 1, le DL rend l'approximation de diffusion, mais avec des CF rigoureusement définies :

- Intérieur : $\partial_t \widetilde{u}_{0-1} = \frac{c}{3 k_D} \Delta \widetilde{u}_{0-1}$ sur Ω
- Conditions Frontières : $\widetilde{u}_0 = 0$ sur $\partial\Omega$
 $\widetilde{u}_1 = -\frac{0.7104}{k_D} \overrightarrow{\text{grad}}_p(\widetilde{u}_1) \cdot \overrightarrow{n}_S$

On décrit ainsi les grandeurs macroscopiques (u et j), jusqu'à l'ordre 1 en Knudsen.

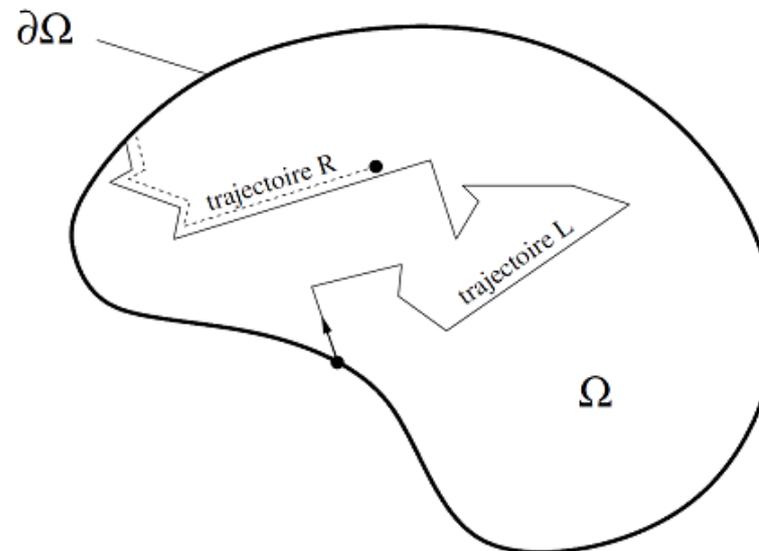
On peut donc traiter avec cette précision les problèmes de 1^o passage.

PLAN

- I. Problèmes de premier retour et approximation de diffusion
- II. Développement de Hilbert
- III. Liens entre premier retour et premier passage**
- IV. Applications aux statistiques de premier retour
 - I. Résultats simples
 - II. Extension en épaisseurs optiques intermédiaires

Problématique

- On est capable de traiter les problèmes de premier passage par l'approximation de diffusion.
- Y a-t-il un moyen d'étendre cette capacité de traitement aux problèmes de premier retour ?



1° retour / 1° passage : Notations

Soit un milieu purement diffusant borné, aux propriétés optiques fixées :

- **L** : variable aléatoire : longueur avant premier retour à la frontière d'un photon partant de la frontière avec une densité de probabilité uniforme et lambertienne
- **R** : variable aléatoire : longueur avant premier passage à la frontière d'un photon partant de l'intérieur avec une densité de probabilité uniforme et isotrope

Liens 1^o retour / 1^o passage avec éclairage à l'équilibre

Quelques résultats sont déjà connus au sujet des statistiques de L et R :

- $\langle L \rangle = \frac{4V}{S}$ (Blanco & Fournier, 2003)

- $p_L = -\langle L \rangle p_R'$ (Mazzolo, 2004)

- $\langle f(L) \rangle = \langle L \rangle \langle f'(R) \rangle + f(0) + \langle L \rangle \lim_{l \rightarrow +\infty} p_R(l) f(l)$ } (Blanco & Fournier, 2006)
- $p_R(0) = \frac{1}{\langle L \rangle}$

Liens L / R à l'équilibre : justification

Imaginons notre milieu entouré d'une paroi noire, le milieu est uniformément absorbant selon un coef k_A , le tout est isotherme.

$$\Phi_{\partial\Omega \rightarrow \Omega} = \Phi_{\Omega \rightarrow \partial\Omega}$$

$$\pi S L_{\text{eq}} \langle 1 - \exp(-k_A L) \rangle = 4\pi V L_{\text{eq}} k_A \langle \exp(-k_A R) \rangle$$

$$S \langle 1 - \exp(-k_A L) \rangle = 4V k_A \langle \exp(-k_A R) \rangle$$

Limite mince : $\langle L \rangle = \frac{4V}{S}$

Valable pour tout k_A : $p_L = -\langle L \rangle p_R'$

Liens L / R hors équilibre

Soit le même milieu diffusant, recevant à l'instant initial un flash d'énergie lumineuse par les bords. Le problème s'écrit ainsi :

$$\frac{1}{c} \partial_t L + \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_P(L) = -k_D(L - cu) \quad \text{sur } \Omega$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{n}_s < 0 \Rightarrow L = L_I(P; \vec{\omega}) \delta(t) \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$L = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus \partial\Omega \quad \text{à } t = 0$$

Liens L / R hors équilibre

On pose $\hat{L}(P; \vec{\omega}; t) = \int_t^{+\infty} L(P; \vec{\omega}; t') \cdot dt'$

On a alors :

- à $t > 0$:
$$\frac{1}{c} \partial_t \hat{L} + \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_P(\hat{L}) = -k_D(\hat{L} - c\hat{u}) \quad \text{sur } \Omega$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{n}_s < 0 \Rightarrow \hat{L} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$
- à $t = 0$:
$$\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_P(\hat{L}) = -k_D(\hat{L} - c\hat{u}) \quad \text{sur } \Omega$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{n}_s < 0 \Rightarrow \hat{L} = L_I(P; \vec{\omega}) \quad \text{sur } \partial\Omega$$

La condition initiale est donnée par la résolution d'un problème stationnaire.

Liens L / R hors équilibre

L longueur de 1° retour dans le problème original

R longueur de 1° passage, dans le problème sur $\hat{\mathbf{L}}$

Résultats :

- $\langle f(L) \rangle = \langle L \rangle \langle f'(R) \rangle + f(0) + \langle L \rangle \lim_{l \rightarrow +\infty} p_R(l) f(l)$
- $p_R(0) = \frac{1}{\langle L \rangle}$

PLAN

- I. Problèmes de premier retour et approximation de diffusion
- II. Développement de Hilbert
- III. Liens entre premier retour et premier passage
- IV. **Applications aux statistiques de premier retour**
 - I. Résultats simples
 - II. Extension en épaisseurs optiques intermédiaires

Application aux moments d'ordre n

On se place dans le cas d'un éclairage uniforme et isotrope (à l'équilibre, donc), et on veut déterminer les moments de la distribution des longueurs de chemins de premier retour.

On a vu que : $\langle f(L) \rangle = \langle L \rangle \langle f'(R) \rangle + f(0) + \lim_{l \rightarrow +\infty} p_R(l)f(l)$

Donc :

$$\begin{aligned} \langle L^n \rangle &= \langle L \rangle^n \langle R^{n-1} \rangle \\ &= \frac{|_{K_n \rightarrow 0} \langle L \rangle^n \langle R_{\text{diff}}^{n-1} \rangle}{=} \\ &= \alpha_n k_D^{n-1} \end{aligned}$$

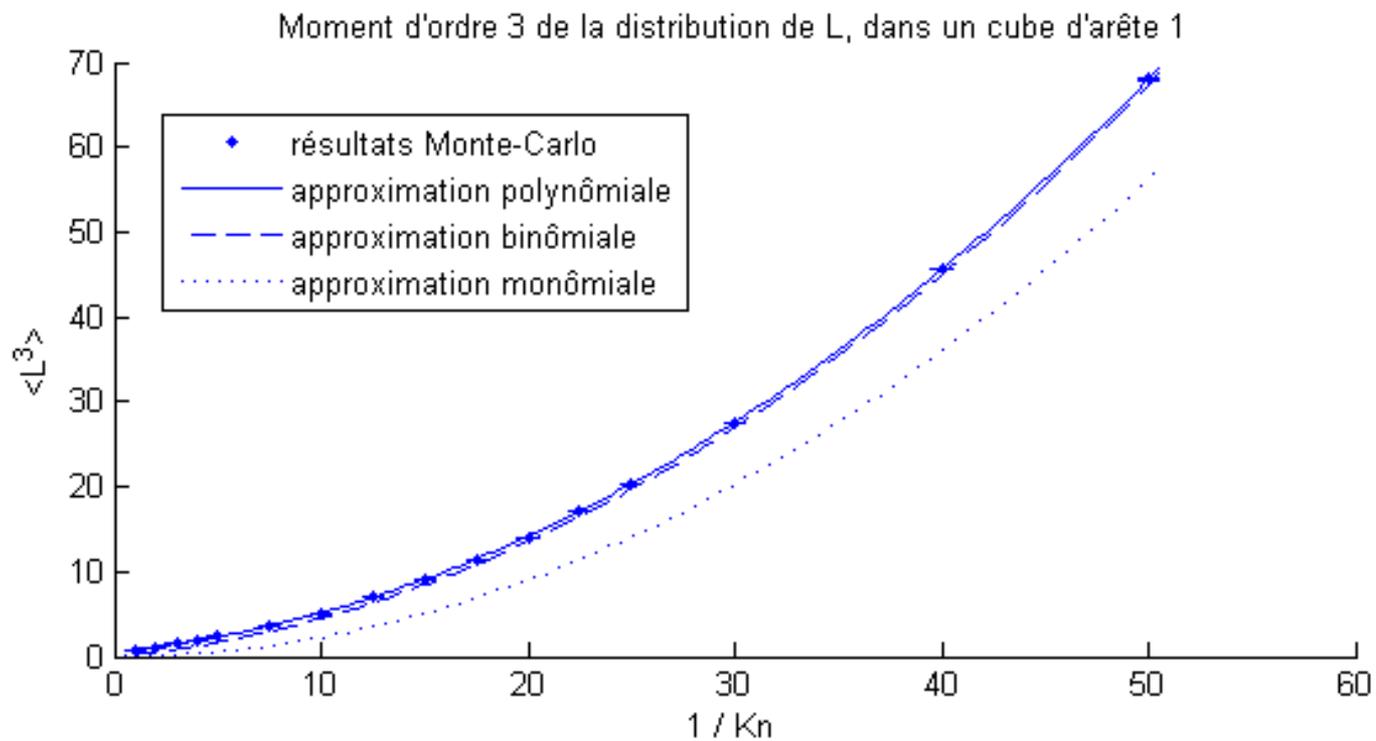
Application aux moments d'ordre n

Idée supplémentaire : On a effectué un DL de la luminance quand Kn tend vers 0. $\langle R^{n-1} \rangle$ est une intégrale de la luminance, donc on doit pouvoir développer $\langle L^n \rangle$ aussi selon Knudsen.

$$\langle L^n \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\beta_{i,n}}{Kn^i} + O(Kn)$$

Les 2 premiers coefficients $\beta_{n-1,n}$ et $\beta_{n-2,n}$ seront calculables grâce à l'approximation de diffusion.

Application aux moments d'ordre n : résultats



Application aux moments d'ordre n : résultats

Précision	1%			10%		
Moment	$\langle L^2 \rangle$	$\langle L^3 \rangle$	$\langle L^4 \rangle$	$\langle L^2 \rangle$	$\langle L^3 \rangle$	$\langle L^4 \rangle$
ligne, monôme	594	988	1.39e3	54	88.0	130
ligne, binôme	0	39.8	66.2	0	9.32	15.6
ligne, polynôme	0	0	0	0	0	0
slab, monôme	4.2e2	7.1e2	9.9e2	38	66	93
slab, binôme	12	37	57	2.1	9.4	15
slab, polynôme	12	7.8	6.0	2.1	2.3	2.3
cube, monôme	7.0e2	9.9e2	1.3e3	64	92	1.2e2
cube, binôme	10	48	70	0	12	18
cube, polynôme	10	4.9	0	0	0	0

Valeurs de $1/Kn$ nécessaires pour obtenir une certaine précision, avec plusieurs approximations des moments $\langle L^n \rangle$

**MERCI DE VOTRE
ATTENTION !**