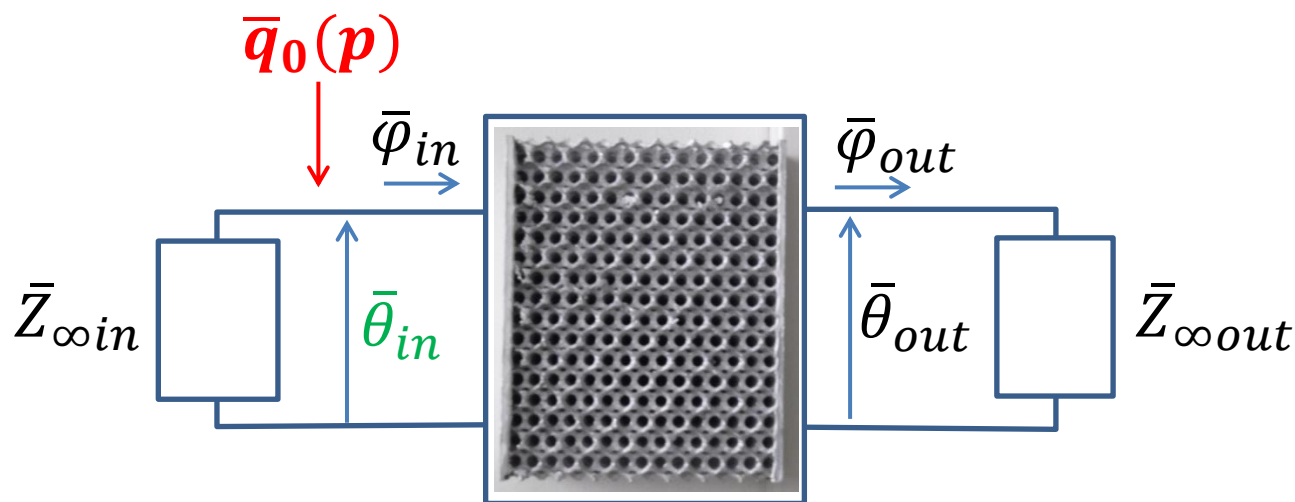


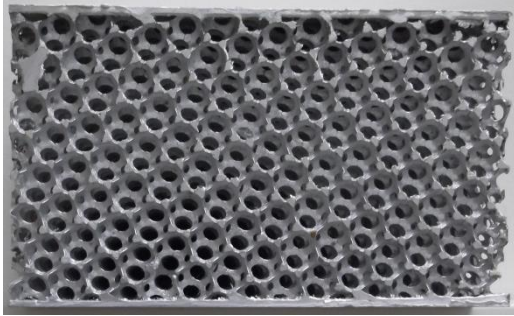
***Intérêts de la prise en compte du thermogramme en face  
avant pour la caractérisation thermophysique  
instationnaire en face arrière de mousses métalliques***



Fabrice Rigollet, Jean-Laurent Gardarein, Frédéric Topin, Nathalie Ehret  
**IUSTI, UMR CNRS – AMU, Marseille**

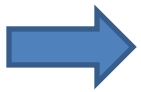


Projet ANR FOAM (Mars 2011 + 48 mois)  
piloté par le CTIF (Centre Technique Industries Fonderie)



- Mousse d'aluminium de fonderie coulé autour de billes de sable régulièrement empilées → Structure régulière
- Pores de 14mm ou 10 mm, droits ou inclinés ( $10^\circ$ )
- porosité voisine de 0,84
- Mousse en sandwich entre deux semelles (2mm) d'aluminium, coulées également

**A quel(s) paramètre(s) thermophysique(s) d'une telle mousse métallique à forte porosité une expérience instationnaire pourrait permettre d'accéder ?**



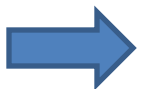
Concevoir une expérience de thermique instationnaire : quel type de chauffage, à quel endroit, combien de temps, quelle durée d'expérience?



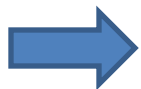
Quelle(s) mesure(s)? A quel(s) endroit(s)? A quelle fréquence?



Quel modèle thermique? Quelles hypothèses (1D?, linéaire?, homogène?)



Quels paramètres estimer, supposer connus?



Quelle confiance accorder aux paramètres estimés?

**A - La caractérisation par convolution avant arrière**

**B- Le matériau mousse et l'expérience instationnaire**

**C - Modèle et stratégie d'estimation**

**D - Résultats des estimations**

**E - Peut-on identifier le flux entrant en face avant?**

**F - Résumé**

**Annexes : expérience en transmittance avec pertes effusives réalisées sur des sables de fonderie**

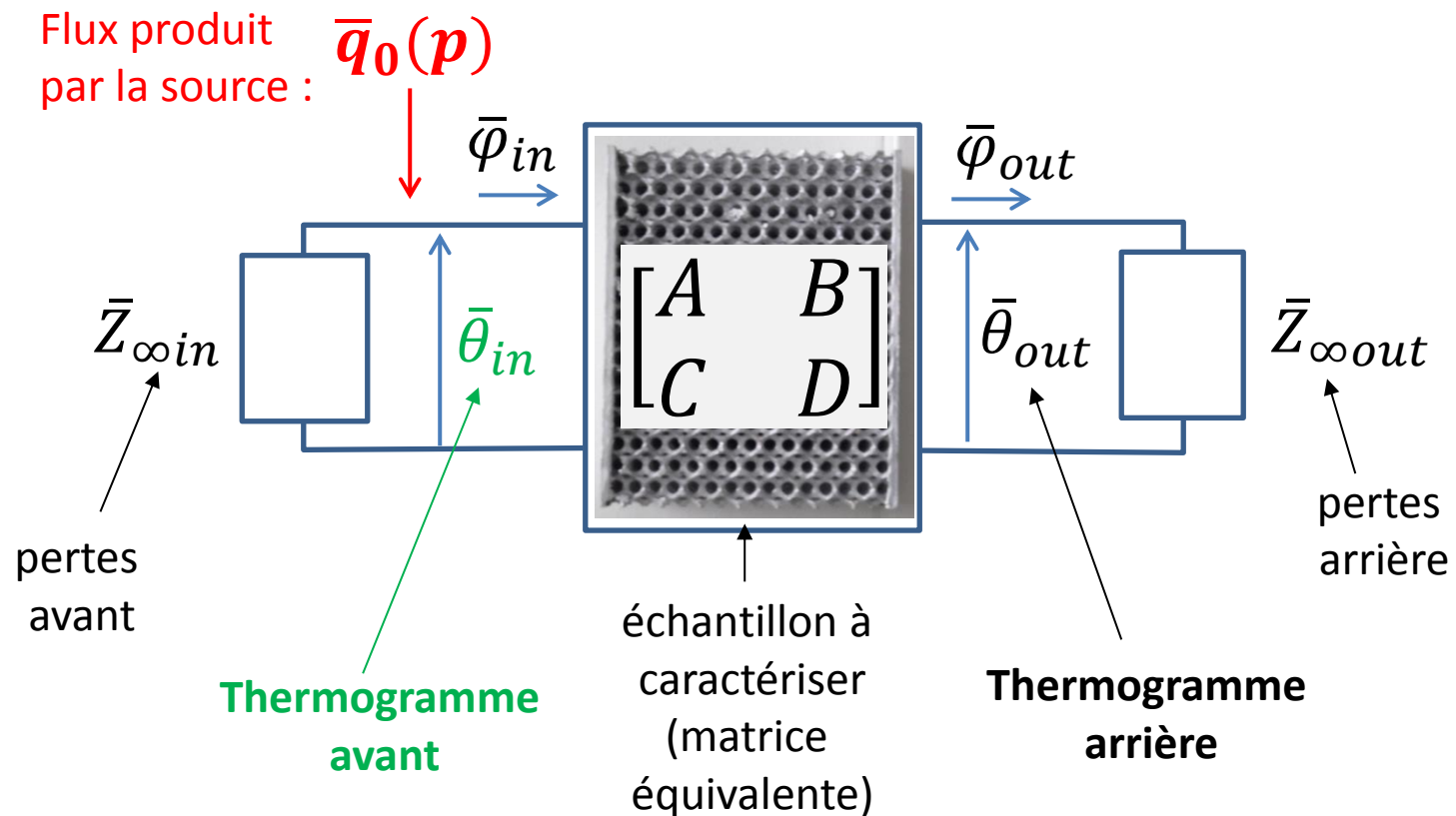
# A – Caractérisation d'un échantillon par méthode instationnaire, méthode convolutive

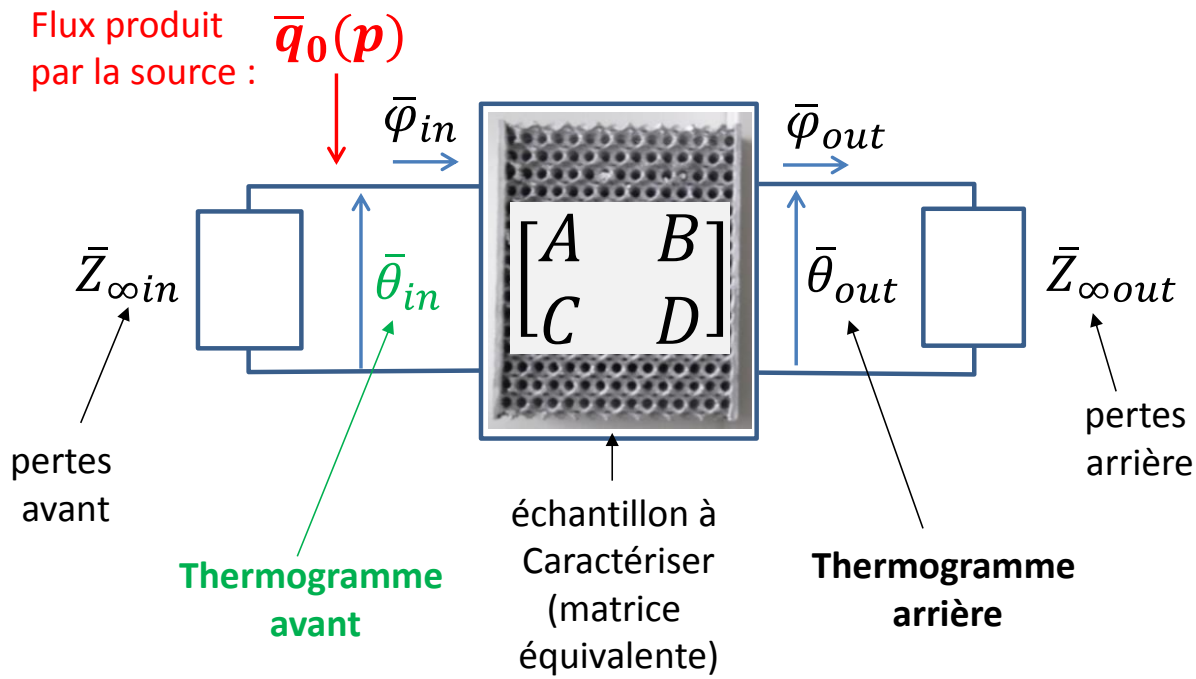
Le problème posé : caractérisation d'un échantillon

- Initialement à température ambiante
- Chauffé en face avant par une source (radiative, plan chaud,...) qui délivre  $\mathbf{q}_0(t)$  (W/m<sup>2</sup>)
- Siège d'un transfert 1D instationnaire entre la face avant et la face arrière
- Avec de possibles pertes (convectives ou effusives) sur chaque face

Schéma quadripolaire général

(dans l'espace de Laplace, grandeurs fonction de  $p(s^{-1})$ )





NB : les pertes symbolisées par un dipôle d'impédance  $\bar{Z}_{\infty}$  peuvent aussi bien représenter

- Des pertes vers un milieu solide initialement à l'ambiante, semi-infini d'effusivité  $b_{\infty}$  tel que :

$$\bar{Z}_{\infty} = \frac{1}{b_{\infty}\sqrt{p}}$$

- Des pertes vers un fluide initialement à l'ambiante, avec un coefficient d'échange  $h$  tel que :

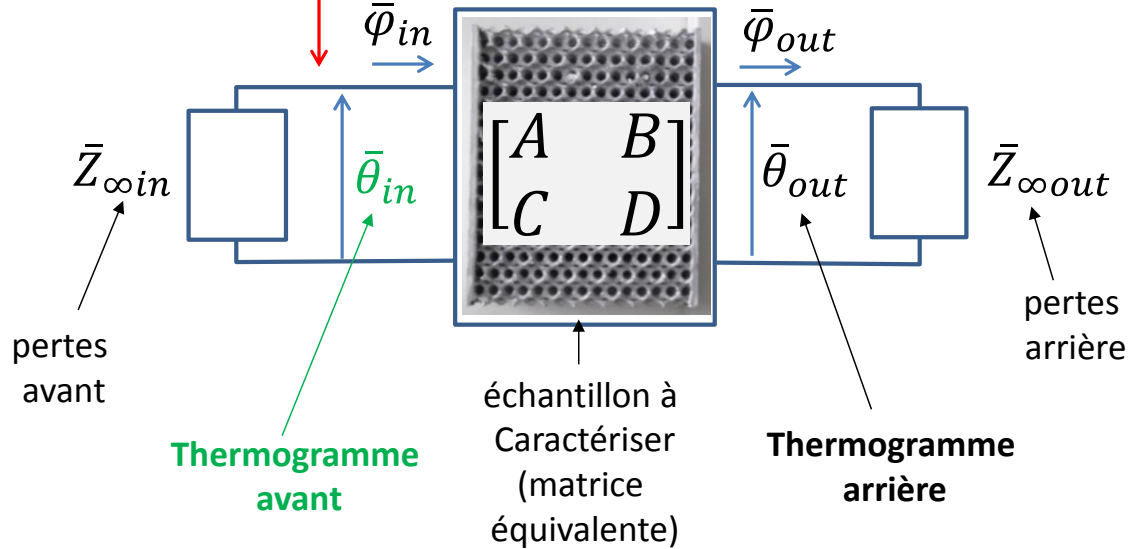
$$\bar{Z}_{\infty} = \frac{1}{h}$$

Vers un  
**'coefficient d'échange effusif'**

$$h_{eff}(p) = b_{\infty}\sqrt{p}$$

qui baisse au cours du temps (quand  $p \searrow$ ) ?...

Flux produit par la source :  $\bar{q}_0(p)$



NB :  $\bar{\varphi}_{in}$  est le flux net entrant dans l'échantillon, égal à  $\bar{q}_0 - \text{pertes}$

Il pourra aussi faire l'objet d'une estimation en fin de processus

Ecriture en impédance : le thermogramme arrière est relié à la source en face avant

$$\bar{\theta}_{out} = \underbrace{\bar{Z}_{out-in}(p)}_{\substack{\text{Dépend de données 'in'} \\ \text{(avant) et 'out' (arrière)}}} \bar{q}_0(p) \quad \text{avec} \quad \bar{Z}_{out-in}(p) = \frac{1}{C + A \left( \frac{1}{\bar{Z}_{\infty in}} + \frac{1}{\bar{Z}_{\infty out}} \right) + B \frac{1}{\bar{Z}_{\infty in} \bar{Z}_{\infty out}}}$$

Ecriture en transmittance : le thermogramme arrière est relié au thermogramme en face avant

$$\bar{\theta}_{out} = \underbrace{\bar{W}_{out}(p)}_{\substack{\text{Dépend de données} \\ \text{'out' (arrière)}}} \bar{\theta}_{in}(p) \quad \text{avec} \quad \bar{W}_{out}(p) = \frac{1}{A + B \frac{1}{\bar{Z}_{\infty out}}}$$

Ecriture en impédance : le thermogramme arrière est relié à la source en face avant

$$\bar{\theta}_{out} = \bar{Z}_{out-in}(p) \bar{q}_0(p)$$

Conséquence en face arrière  
(mesurée)

Cause en face avant, non mesurée en général,  
mais de forme temporelle connue (Dirac,  
Echelon, Créneau, sinus) à une constante  
énergétique près :  $\bar{q}_0(p) = q_0 \bar{g}(p)$ ,  
 $q_0$  en J/m<sup>2</sup> ou W/m<sup>2</sup> selon la situation

Ecriture en transmittance : le thermogramme arrière est relié au thermogramme en face avant

$$\bar{\theta}_{out} = \bar{W}_{out}(p) \bar{\theta}_{in}(p)$$

Conséquence en face arrière  
(mesurée)

'Cause' en face avant (mesurée), elle-même  
conséquence du flux en face avant (voir ci-dessous)

*Relations températures-flux en face avant*

Relation thermogramme-source

$\bar{q}_0(p)$  en face avant

$$\bar{\theta}_{in}(p) = \frac{\bar{Z}_{out-in}(p)}{\bar{W}_{out}(p)} \bar{q}_0(p)$$

Relation thermogramme-flux entrant  $\bar{\varphi}_{in}$  en face avant

$$\bar{\theta}_{in}(p) = \frac{\bar{Z}_{out}(p)}{\bar{W}_{out}(p)} \bar{\varphi}_{in} = \bar{Z}_{in}(p) \bar{\varphi}_{in} \quad \text{avec}$$

$$\bar{Z}_{out}(p) = \frac{1}{C + D \frac{1}{\bar{Z}_{\infty out}}} \quad \text{telle que} \quad \bar{\theta}_{out}(p) = \bar{Z}_{out}(p) \bar{\varphi}_{in}$$

Ecriture en **impédance** : le thermogramme arrière est relié à **la source** en face avant

$$\bar{\theta}_{out} = \bar{Z}_{out-in}(p) \bar{q}_0(p) \quad , \text{ avec } \quad \bar{Z}_{out-in}(p) = f(A, B, C, \bar{Z}_{\infty in}, \bar{Z}_{\infty out}) \quad , \text{ dépend :}$$

- de caractéristiques de l'échantillon (via A, B et C),
- de la nature des échanges en face arrière (via  $\bar{Z}_{\infty out}$ ) ET en face avant (via  $\bar{Z}_{\infty in}$ )
- de caractéristiques de la source (forme temporelle  $\bar{g}(p)$  et constante énergétique  $q_0$ )

Exemple : chauffage par un créneau de flux radiatif de puissance  $q_0$  (W/m<sup>2</sup>) en face avant pendant  $t_c$  avec pertes convecto-radiatives en face avant ( $h$ ) et effusives en face arrière ( $b_\infty$ ), pour un monocouche d'épaisseur  $e$ , diffusivité  $a$ , effusivité  $b$ , conductivité  $k$

$$\bar{\theta}_{out} = f\left(\frac{q_0}{b}, \frac{e^2}{a}, \frac{h}{b}, \frac{b_\infty}{b}, t_c\right) \quad \text{ou bien} \quad \bar{\theta}_{out} = f\left(\frac{q_0 e}{k}, \frac{e^2}{a}, \frac{h e}{k}, \frac{b_\infty e}{k}, t_c\right) \quad \text{ou autre...}$$

Soient **4 groupes de paramètres** + une donnée sur la forme temporelle, supposée connue

Ecriture en **transmittance** : le thermogramme arrière est relié au **thermogramme** en face avant

$$\bar{\theta}_{out} = \bar{W}_{out}(p) \bar{\theta}_{in}(p) \quad \text{avec} \quad \bar{W}_{out}(p) = f(A, B, \bar{Z}_{\infty out})$$

**Ne dépend explicitement d'aucune donnée sur la source ni les pertes en face avant, donc moins de paramètres. La donnée supposée connue est le thermogramme en face avant.**

Exemple : dans la même situation, si on a pu mesurer la température en face avant

$$\bar{\theta}_{out} = f\left(\frac{e^2}{a}, \frac{b_\infty}{b}, \bar{\theta}_{in}(p)\right) \quad \text{ou bien} \quad \bar{\theta}_{out} = f\left(\frac{e^2}{a}, \frac{b_\infty e}{k}, \bar{\theta}_{in}(p)\right) \quad \text{ou autre...}$$

Soient **2 groupes de paramètres** et le thermogramme face avant, supposé connu (mesure)



## Fonctions de Transfert et Produits de convolution

L'impédance  $\bar{Z}_{out-in}(p)$  peut être vue comme la réponse en face arrière à une source  $\bar{q}_0(p) = 1$  en face avant, c'est-à-dire un **Dirac temporel de flux**

→ Impédance  $\bar{Z}_{out-in}(p) =$  **fonction de transfert en flux** de la face arrière  
Impédance  $Z_{out-in}(t) = L^{-1}\{\bar{Z}_{out-in}(p)\} =$  **réponse impulsionnelle en flux** de la face arrière

De plus, au produit simple dans l'espace transformé de Laplace correspond le produit de convolution (noté  $\otimes$ ) dans l'espace original temporel, donc :

$$\bar{\theta}_{out} = \bar{Z}_{out-in}(p)\bar{q}_0(p) \Leftrightarrow \boxed{\Delta T_{out}(t) = Z_{out-in}(t) \otimes q_0(t)}$$
$$= \int_{\tau=0}^t Z_{out-in}(t) q_0(t - \tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t Z_{out-in}(t - \tau) q_0(\tau) d\tau$$

La transmittance  $\bar{W}_{out}(p)$  peut être vue comme la réponse en face arrière à un échauffement  $\bar{\theta}_{in}(p)=1$  en face avant, c'est-à-dire un **Dirac temporel d'échauffement**

→ Transmittance  $\bar{W}_{out}(p) =$  **fonction de transfert en échauffement** de la face arrière  
Transmittance  $W_{out}(t) = L^{-1}\{\bar{W}_{out}(p)\} =$  **réponse impulsionnelle en échauffement** de la face arrière

$$\bar{\theta}_{out}(p) = \bar{W}_{out}(p)\bar{\theta}_{in}(p) \Leftrightarrow \boxed{\Delta T_{out}(t) = W_{out}(t) \otimes \Delta T_{in}(t)}$$

## Convolution de signaux discrets – Application en transmittance

$$\begin{aligned}\Delta T_{out}(t) &= W_{out}(t) \otimes \Delta T_{in} = \Delta T_{in} \otimes W_{out}(t) \\ &= \int_{\tau=0}^t W_{out}(t) \Delta T_{in}(t - \tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t W_{out}(t - \tau) \Delta T_{in}(\tau) d\tau\end{aligned}$$

En appliquant cette convolution sur les  $m$  valeurs temporelle discrètes de  $W_{out-in}(t)$  et  $\Delta T_{in}(t)$

$$k = 1 \text{ à } m, \quad t_k = k\Delta t$$

$\Delta T_{in,k} = \Delta T_{in}(t_k)$ , composante du vecteur thermogramme avant  $\Delta \mathbf{T}_{in} = (\Delta T_{in,1} \dots \Delta T_{in,m})^t$

$W_i = W_{out}(t_k)$ , composantes du vecteur transmittance  $\mathbf{W} = (W_1 \dots W_m)^t$

$\Delta T_{out,k} = \Delta T_{out}(t_k)$ , composante du thermogramme arrière  $\Delta \mathbf{T}_{out} = (\Delta T_{out,1} \dots \Delta T_{out,m})^t$

$$\Delta T_{out,k} \approx \Delta t \sum_{i=1}^m W_i \Delta T_{in,k-i+1} = \Delta t \sum_{i=1}^m W_{k-i+1} \Delta T_{in,i}$$

Ou en écriture matricielle à l'aide de matrices de Toeplitz  $\mathbf{M}$ :

$$\Delta \mathbf{T}_{out}(x) = \mathbf{M}(\mathbf{W}(x)) \Delta \mathbf{T}_{in} \Delta t = \mathbf{M}(\Delta \mathbf{T}_{in}) \mathbf{W}(x) \Delta t$$

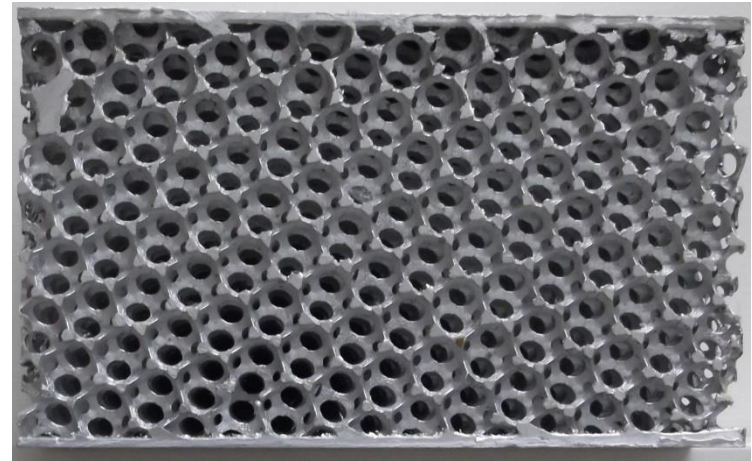
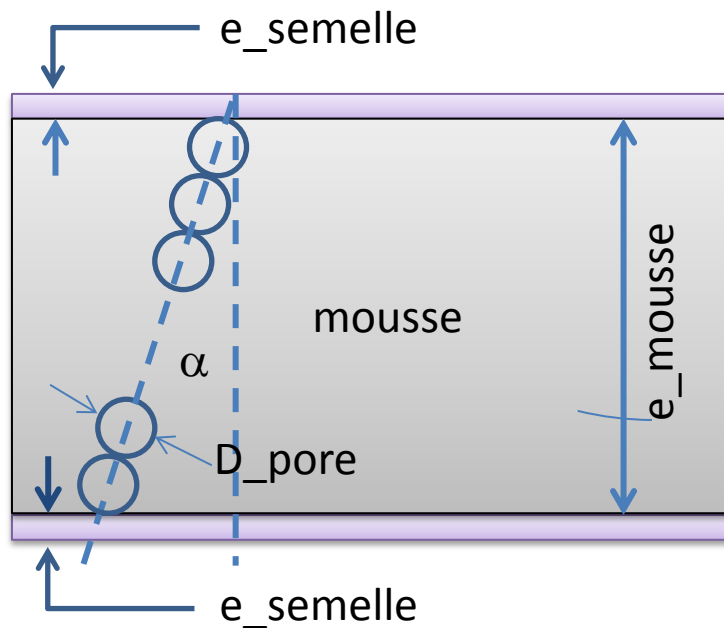
Écriture matricielle de la convolution entre  
le thermogramme avant et la transmittance

$$\mathbf{M}(v) = \begin{bmatrix} v_1 & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ v_2 & v_1 & \dots & \dots & \vdots \\ v_3 & v_2 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 \\ v_m & v_{m-1} & \dots & \dots & v_1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_v$$

**Modèle direct fonction des paramètres  $x$  du matériau  
et du thermogramme face avant**

$$\forall v = (v_1 \dots v_m)^t, \quad v_k = v(t_k)$$

## B – Le matériau mousse et l'expérience instationnaire



Nom mousse	Taille pores	Inclinaison des pores	Epaisseur mousse (entre semelles)	Epaisseur externe	Epaisseur semelles (supposées identiques)	Porosité (morpho)
	D_pore	$\alpha$	e_mousse	e_totale	e_semelle	$\epsilon$
	mm	degrés	mm	mm	mm	
MR1SR (*)	14	0	103.4	109.3	2.95	0.845
MR2SR	10	10	95.4	100	2.3	0.825
MR3SR	14	10	95.5	100	2.25	0.85
MR4SR	10	0	102.7	107.9	2.6	0.84

(\*) : Mousse Regulière i Sans Résine

L'espace non métallique sera rempli d'air ou de résine. Résultats présentés en air ici.

## Valeurs nominales des différents paramètres utiles

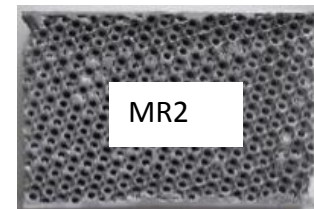
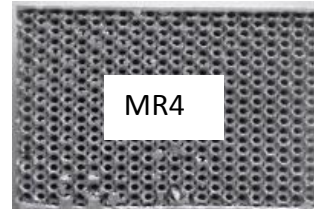
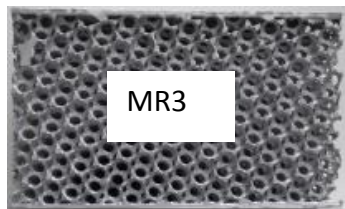
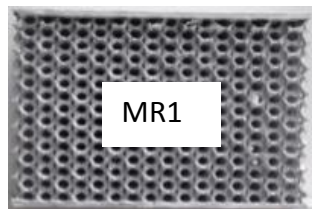
Hypothèse pour le calcul de conductivité : les phases (alu et air) ou (alu et résine) sont en //

nom sample	taille pores	inclinaison	H (mm), hauteur totale mousse+semelles	épaisseur moyenne des semelles (mm)	porosité de la mousse	(Rho.Cp) métal Alu(J/m <sup>3</sup> K)	rho fluide à 20°C (kg/m <sup>3</sup> )	Cp fluide à 20°C (J/KgK)	(Rho*Cp) fluide à 20°C (J/m <sup>3</sup> K)	rho_mousse*Cp_mousse	e_mousse entre les semelles (mm)	Conductivité théorique mousse // (W/mK)	Effusivité isolant (Ws <sup>0.5</sup> /m <sup>2</sup> K)
MR1	gros 14mm	droit	109.3	3	0.845	2.39E+06	1.161	1004	1.17E+03	3.71E+05	103.4	34.1	706
MR3	gros	incliné	100	2.3	0.85	2.39E+06	1.161	1004	1.17E+03	3.59E+05	95.5	33.0	706
MR4	petit	droit	107.9	2.6	0.84	2.39E+06	1.161	1004	1.17E+03	3.83E+05	102.7	35.2	706
MR2	petit 10mm	incliné	100	2.3	0.825	2.39E+06	1.161	1004	1.17E+03	4.19E+05	95.4	38.5	706

Avec AIR

MR1	gros 14mm	droit	109.3	3	0.845	2.39E+06	1800	1180	2.12E+06	2.16E+06	103.4	34.9	706
MR3	gros	incliné	100	2.3	0.85	2.39E+06	1800	1180	2.12E+06	2.16E+06	95.5	33.8	706
MR4	petit	droit	107.9	2.6	0.84	2.39E+06	1800	1180	2.12E+06	2.17E+06	102.7	36.0	706
MR2	petit 10mm	incliné	100	2.3	0.825	2.39E+06	1800	1180	2.12E+06	2.17E+06	95.4	39.3	706

Avec RESINE



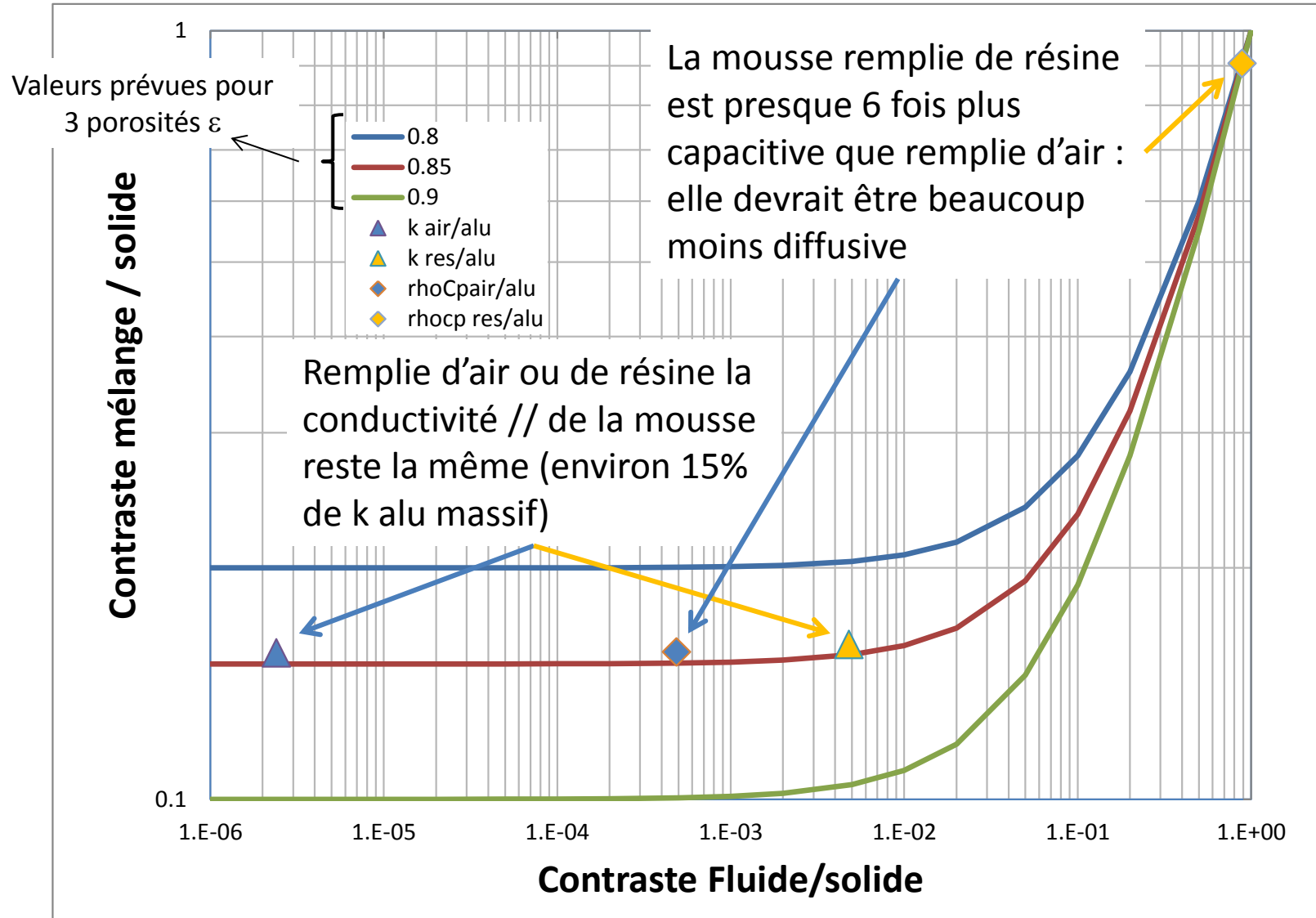
Si le modèle de **conductivités parallèles** est le bon (phases (alu et air) ou (alu et résine) en //)

$$(k)_{//} = \varepsilon(k)_{fluide} + (1 - \varepsilon)(k)_{alu}$$

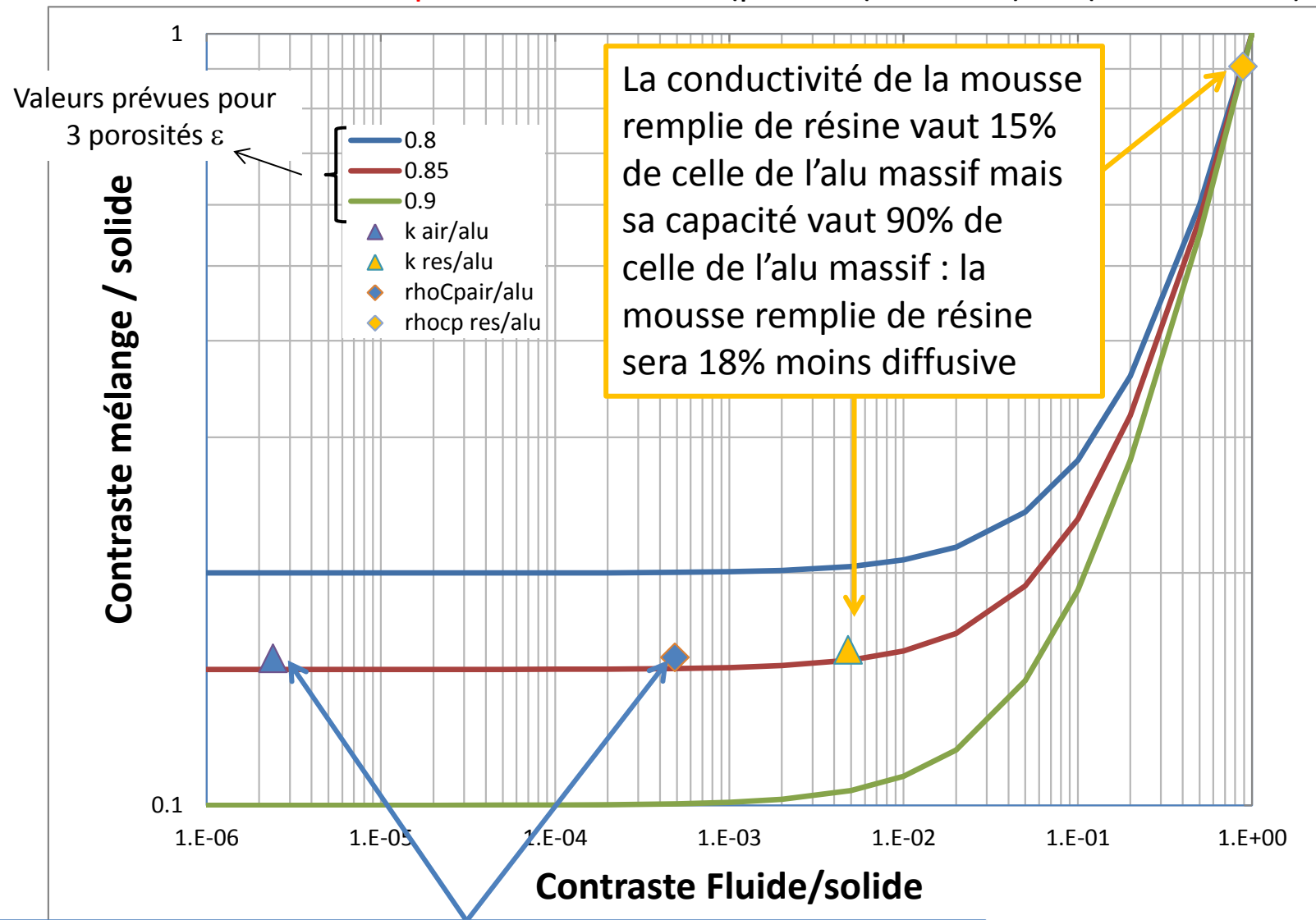
Avec

$$(\rho C_p)_{mélange} = \varepsilon(\rho C_p)_{fluide} + (1 - \varepsilon)(\rho C_p)_{alu}$$

porosité  $\varepsilon$ =volume 'fluide'/volume total



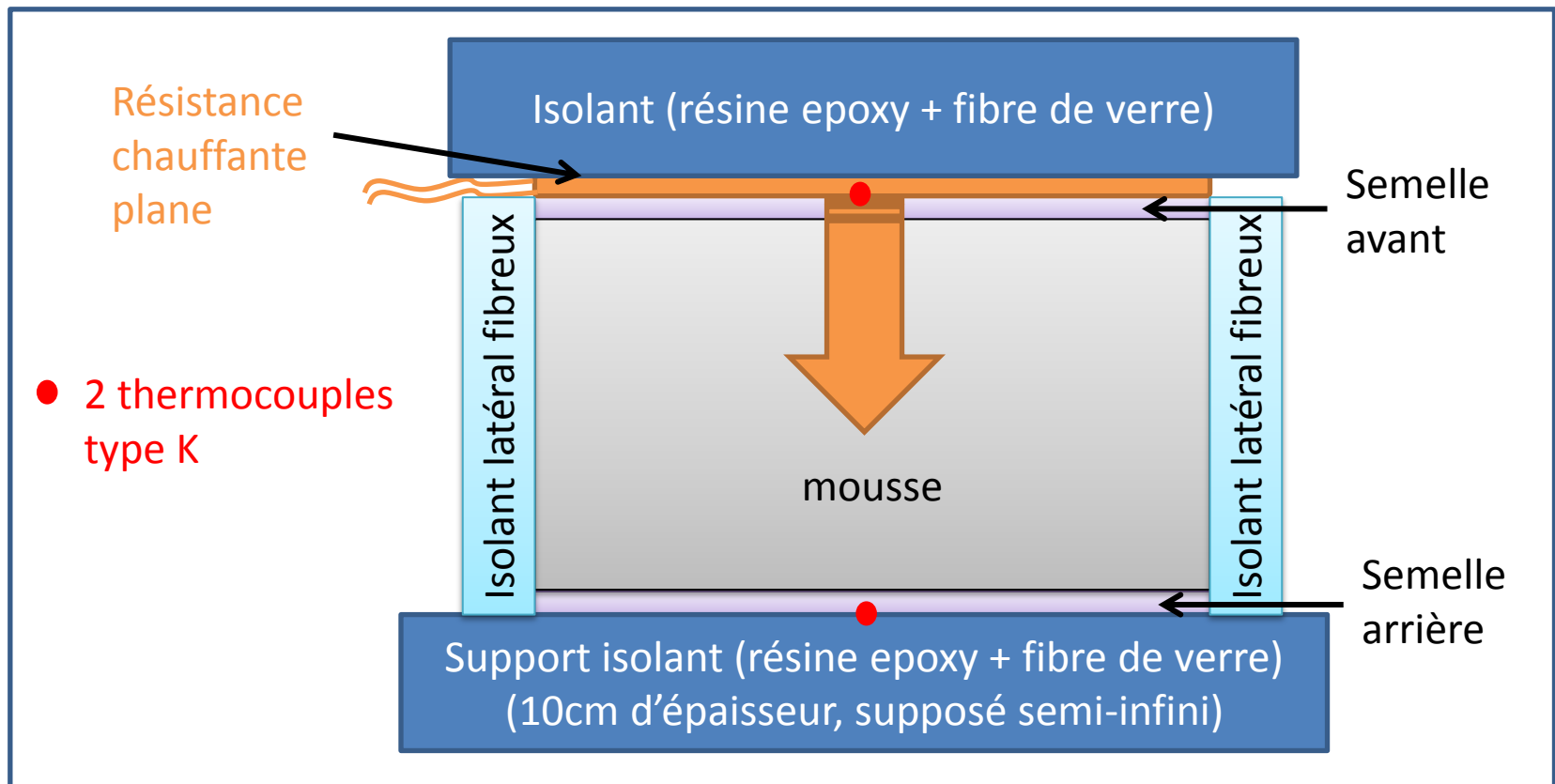
Si le modèle de **conductivité parallèle** est le bon (phases (alu et air) ou (alu et résine) en //)

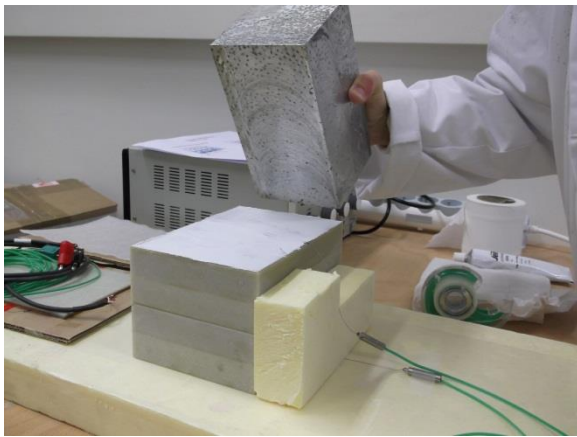


Conductivité // et Capacité de la mousse remplie d'air sont des fractions quasi égales des conductivités et capacités de l'alu massif : la diffusivité de la mousse d'alu devrait être proche de celles de l'alu massif

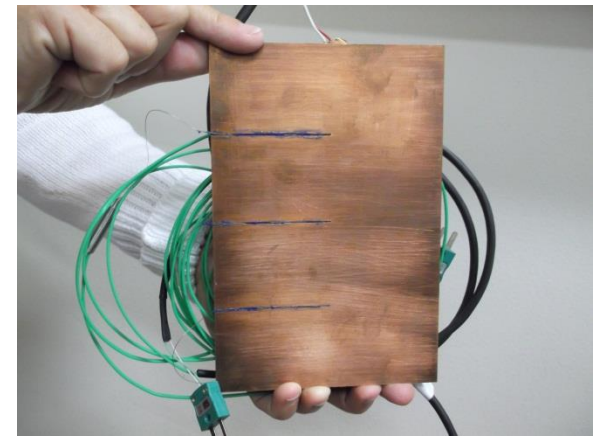
# L'expérience instationnaire : Chauffage Créneau

- Mousse horizontale, chauffée sur sa face supérieure (face 'avant') par une semelle chauffante (résistance plane en sandwich entre deux plaques de cuivre, délivre environ  $500\text{W/m}^2$  sur chaque face)
- Chauffage pendant un temps donné de l'ordre du temps de diffusion entre les deux semelles (environ 250 s pour les mousses en air). Durée totale 500s.
- Pertes effusives en face inférieure (face 'arrière')
- Isolation latérale (isolant fibreux)

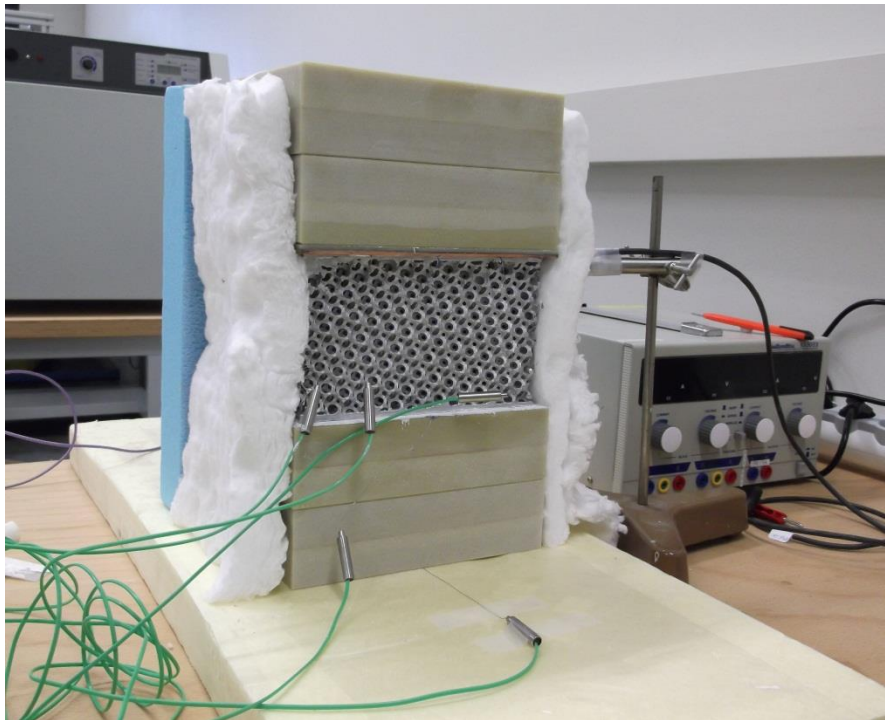




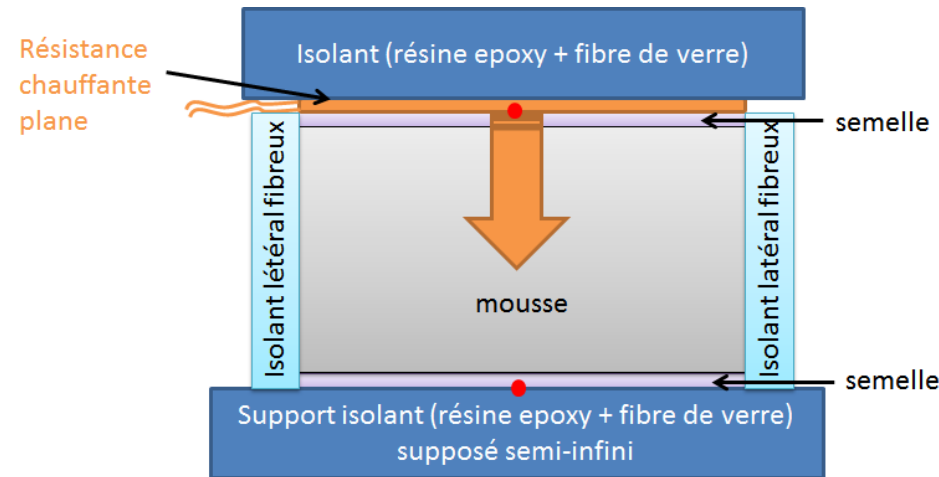
Graisse conductrice entre échantillon et isolant arrière



Semelle chauffante en cuivre instrumentée



Isolation latérale (enlevée en partie pour la photo)



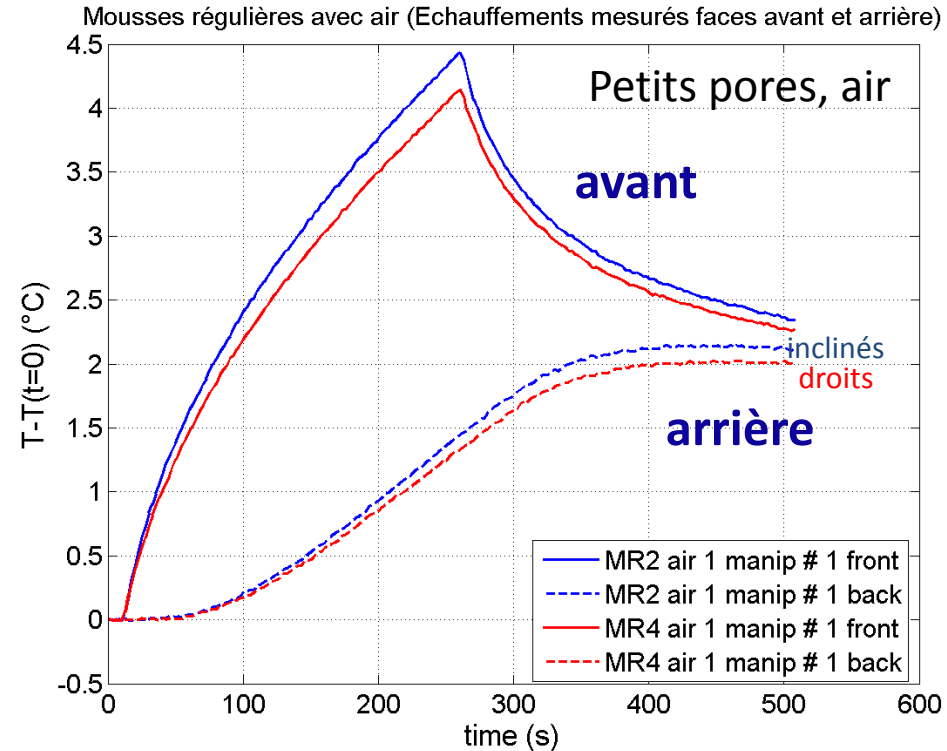
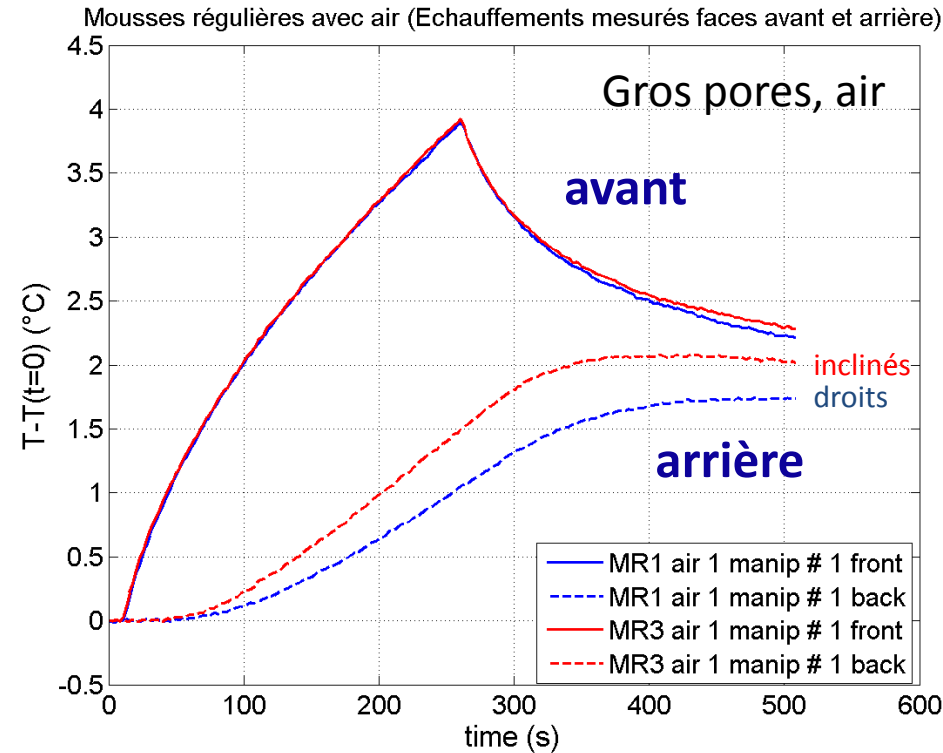
2 thermocouples exploités : un au centre de chaque face



# Signaux typiques obtenus sur mousses remplies d'air (chauffe 250s)

- Faible bruit de mesure enregistré avant l'expérience d'écart type  $\sigma_{\text{bruit}} = 0,0045^\circ\text{C}$  sur les deux thermogrammes

→ Mesure des échauffements avec 4 chiffres significatifs (millième incertain)



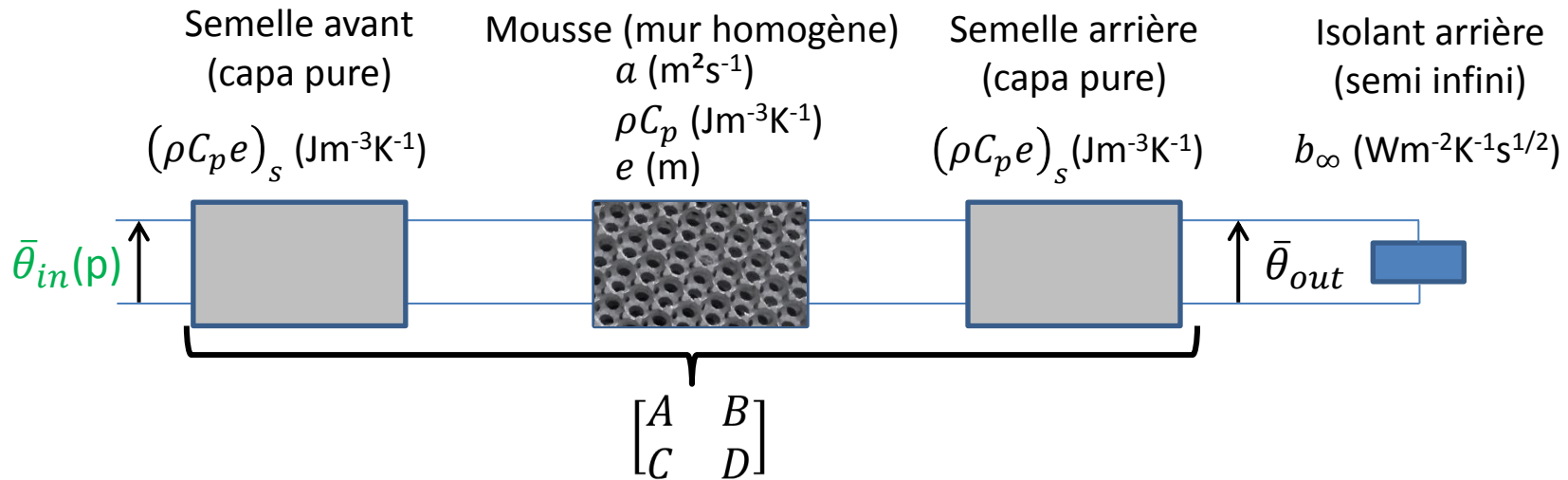
- Echauffement avant maximum de l'ordre de 4°C et arrière de 2°C
- Vecteur des mesures à m composantes (m=500 typiquement), pas de temps  $\Delta t=0.5s$

$$\mathbf{y} = [y_1 \dots y_i \dots y_m]^t : \text{thermogramme arrière}$$



Quel modèle pour prévoir l'échauffement arrière conséquence de l'échauffement avant?

## C – Modèle et stratégie d'estimation



$$\bar{\theta}_{out}(x, p, \bar{\theta}_{in}(p)) = \bar{W}_{out}(x, p) \bar{\theta}_{in}(p) \quad \text{avec}$$

$$\bar{W}_{out}(x, p) = \frac{1}{A + B b_\infty \sqrt{p}} = \frac{1}{ch(\sqrt{x_1 p}) + sh(\sqrt{x_1 p}) [x_3 \sqrt{x_1 p} + x_2 \sqrt{x_1}]} = \bar{\theta}_{out}(x, p, \bar{\theta}_{in}(p) = 1)$$

Vecteur des paramètres  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ , n=3 composantes

Paramètres $\mathbf{x}$	Unité	Description
$x_1 = \frac{e^2}{a}$	s	Temps diffusif de la mousse
$x_2 = \frac{b_\infty}{\rho C_p e}$	s <sup>-1/2</sup>	Rapport entre perte à l'arrière et stockage dans la mousse
$x_3 = \frac{(\rho C_p e)_s}{\rho C_p e}$	/	Ratio des capacités semelle/mousse

Retour dans l'espace temporel  
(Transformée inverse de De Hoog)

$$W_{out}(\mathbf{x}, t) = L^{-1}\{\bar{W}_{out}(\mathbf{x}, p)\}$$

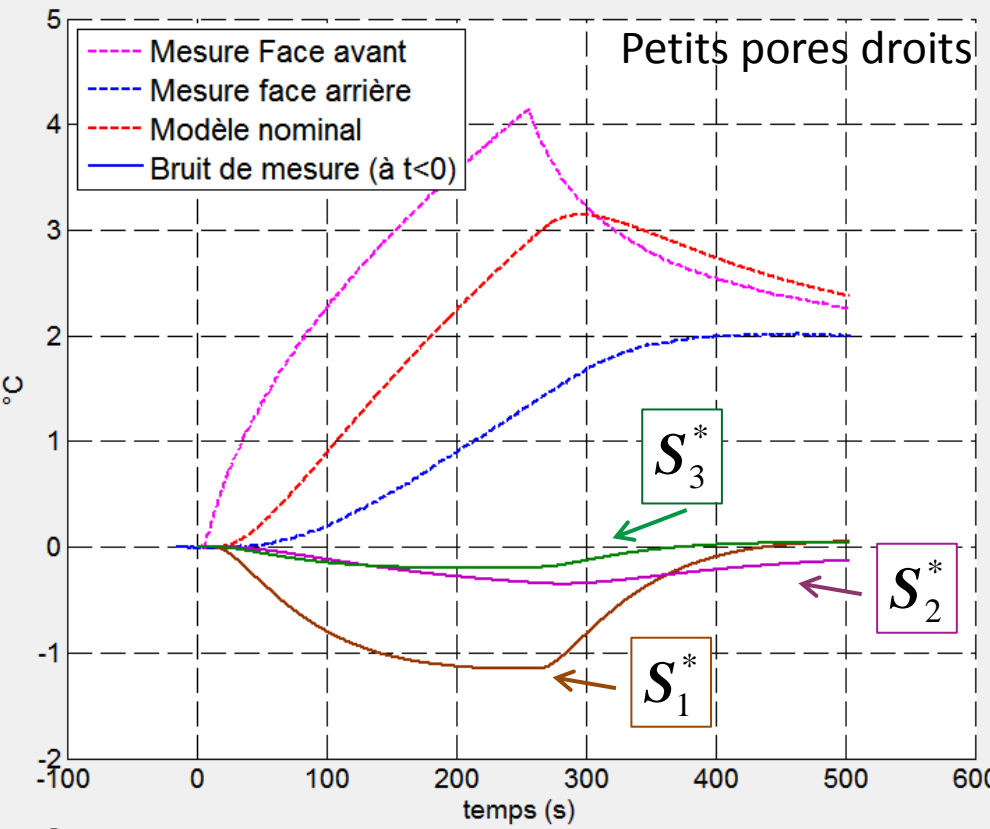
Puis convolution temporelle :

$$\mathbf{y}_{mo}(\mathbf{x}) = \Delta T_{out}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}(W_{out}(\mathbf{x})) \Delta T_{in} \Delta t$$

$$\text{où } \mathbf{y}_{mo}(\mathbf{x}) = [y_{mo,1}(\mathbf{x}) \dots y_{mo,m}(\mathbf{x})]^t$$

est le vecteur modèle

# Analyse des sensibilités réduites $S^*(t, x_{nom})$ pour les valeurs nominales de $x$



$$x_{1,nom} = \frac{e^2}{a}$$

$$x_{2,nom} = \frac{b_{\infty}}{\rho C_p e}$$

$$x_{3,nom} = \frac{(\rho C_p e)_s}{\rho C_p e}$$

Par. direct 1

nominal absolu: 1.1488, 114.8753

x (nominal): 0.01

t\_diff: 100 % 114.8753 (circled in red)

ini./nom.: Initial

opt./nom.: 0 optimal

---

Par. direct 2

nominal absolu: 0.0001795, 0.01795

x (nominal): 0.01

binf / (rho\*Cp\*e): 100 % 0.01795 (circled in purple)

ini./nom.: Initial

opt./nom.: 0 optimal

---

Par. direct 3

nominal absolu: 0.0015782, 0.15782

x (nominal): 0.01

(rho\*Cp\*e)\_s / (rho\*Cp\*e): 100 % 0.15782 (circled in green)

ini./nom.: Initial

opt./nom.: 0 optimal

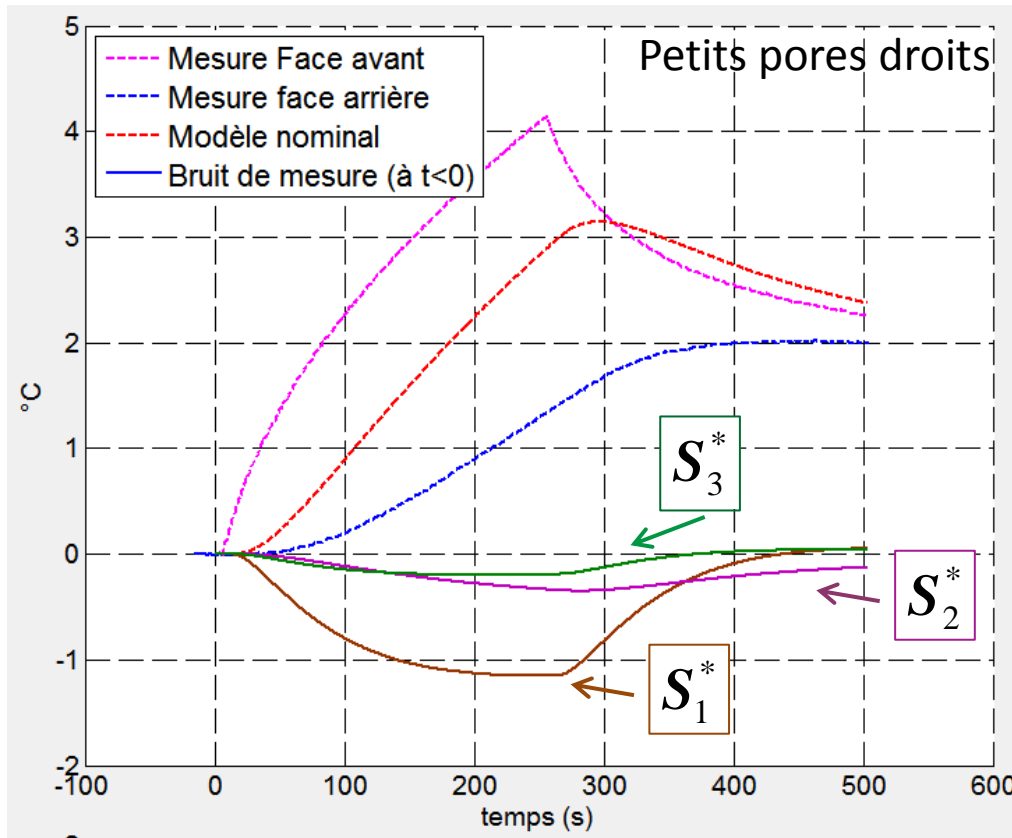
$$S_k^*(t, x_{nom}) = x_k S_k(t, x_{nom}) = x_k \left. \frac{\partial y_{mo}(t, x_{nom})}{\partial x_k} \right|_{t, x_{nom_j}, \text{ pour } j \neq k}, \quad k=1 \text{ à } n(=3)$$

(Dérivées calculées numériquement par accroissement fini autour de  $x_{nom}$ )

Par rapport au cas 'impédance', il y a ici un bruit sur ces sensibilités puisque le modèle utilisé pour les calculer est lui-même calculé par convolution avec le thermogramme avant, bruité :

$$y_{mo}(x) = M(W(x)) \Delta T_{in} \Delta t$$

# Analyse des sensibilités réduites $S^*(t, x_{nom})$ pour les valeurs nominales de $x$



$$x_{1,nom} = \frac{e^2}{a}$$

$$x_{2,nom} = \frac{b_\infty}{\rho C_p e}$$

$$x_{3,nom} = \frac{(\rho C_p e)_s}{\rho C_p e}$$

Par. direct 1	
nominal absolu	1.1488   114.8753
x (nominal)	0.01
t_diff	100 %   114.8753
	ini./nom. Initial
(s)	100 %   0
	opt./nom. optimal
Par. direct 2	
nominal absolu	0.0001795   0.01795
x (nominal)	0.01
binf / (rho*Cp*e)	100 %   0.01795
	ini./nom. Initial
(s <sup>-1/2</sup> )	100 %   0
	opt./nom. optimal
Par. direct 3	
nominal absolu	0.0015782   0.15782
x (nominal)	0.01
(rho*Cp*e)_s / (rho*Cp*e)	100 %   0.15782
(/)	ini./nom. Initial
	100 %   0
	opt./nom. optimal

- Thermogramme arrière modèle plus rapide que le thermogramme mesuré : sous-estimation du temps diffusif  $x_{1,nom}$  par surestimation de la diffusivité via la conductivité du modèle parallèle
- Modèle surtout sensible au temps diffusif  $x_{1,nom}$
- Sensibilité plus faible à  $x_{2,nom}$  mais indépendante de celle à  $x_{1,nom}$
- Sensibilité faible au ratio des capacités  $x_{3,nom}$  et très corrélée à celle de  $x_{1,nom}$

## Démarche d'estimation

- Blocage de  $x_3$  à  $x_{3,nom}$   $\longrightarrow$  Paramètres '**directs**'  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_c)^t$ 
  - $\mathbf{x}_r = (x_1, x_2)^t$  : Paramètres '**variables**'
  - $\mathbf{x}_c = x_{3,nom}$  : Paramètre '**fixe**'

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_r : \mathbf{S}_c] = \left[ \begin{array}{ccc|c} S_1(t_1, \mathbf{x}) & \dots & S_2(t_1, \mathbf{x}) & S_3(t_1, \mathbf{x}) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ S_1(t_m, \mathbf{x}) & \dots & S_2(t_m, \mathbf{x}) & S_3(t_m, \mathbf{x}) \end{array} \right]$$

Matrice des sensibilités (m×n) séparée en 2 matrices

- Estimation itérative des valeurs optimales  $\hat{\mathbf{x}}_{1,opt}$  et  $\hat{\mathbf{x}}_{2,opt}$  minimisant le critère  $J_{MCO}(\hat{\mathbf{x}})$  (Moindres Carrés Ordinaires) entre mesures et modèle (Méthode de Gauss-Newton)

$$\hat{\mathbf{x}}_{opt} = (\hat{\mathbf{x}}_{1,opt}, \hat{\mathbf{x}}_{2,opt})^t = \arg[\min(J_{MCO}(\hat{\mathbf{x}}))] \quad \text{avec} \quad J_{MCO}(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{y} - \mathbf{y}_{mo}(\hat{\mathbf{x}})]^t [\mathbf{y} - \mathbf{y}_{mo}(\hat{\mathbf{x}})]$$

- Calcul de la matrice de covariance des estimations : amplification du bruit de mesure présent sur les deux thermogrammes (bruit standard i.i.d. de variance  $\sigma_{bruit}^2$ )

$$cov(\hat{\mathbf{x}}_{opt}) = \left[ (\mathbf{S}^t \mathbf{S})^{-1} + (\mathbf{S}^t \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{M}_W \mathbf{M}_W^t \cdot \mathbf{S} (\mathbf{S}^t \mathbf{S})^{-1} \right] \sigma_{bruit}^2 \quad \text{où} \quad \mathbf{M}_W = \mathbf{M}(\mathbf{W})$$

Amplification 'classique' du bruit sur le thermogramme arrière

Amplification supplémentaire du bruit sur le thermogramme avant avec lequel est convoluée la transmittance W

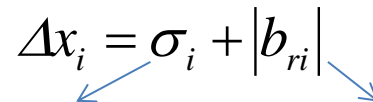
(Transmittance W en matrice de Toeplitz)

## Démarche d'estimation, suite

- Calcul du biais  $b_r = (b_{r1}, b_{r2})^t$  sur chaque estimation engendré par un possible biais sur  $b_c$  sur le paramètre fixé  $x_c = x_{3,nom}$ . Hypothèse : ce biais se calcule classiquement

$$b_r = -[S_r^t S_r]^{-1} S_r^t S_c b_c$$

- Calcul majorant de l'incertitude totale associée à l'estimation du paramètre  $\hat{x}_{i,opt}$   $i=1,2$

$$\Delta x_i = \sigma_i + |b_{ri}|$$


Composante aléatoire  $\sigma_i$  = racine carré de l'élément  $i$  de la diagonale de  $COV(\hat{x}_{opt})$

Composante déterministe = élément  $i$  du biais  $b_r$

- Calcul de divers paramètres déduits à partir
  - des paramètres **'directs' estimés**  $\hat{x}_{opt}$
  - du paramètre **'directs' fixé**  $x_c = x_3$
  - d'éventuels paramètres **'externes'**  $x_{ext}$  (par exemple l'épaisseur de la mousse)et calculs des incertitudes associées

# Résumé : Les différents type de paramètres (ici modèle à 3 paramètres directs)

Paramètres ' <b>directs</b> ' <i>(apparaissent explicitement dans le modèle)</i>	Paramètres ' <b>externes</b> ' <i>(inutiles à l'estimation mais utiles pour déduire d'autres paramètres)</i>	Paramètres ' <b>déduits</b> ' des ' <b>directs</b> ' et des ' <b>externes</b> ' <i>(grille des exposants pour les calculer ainsi que leur erreur en %)</i>					
		externes		directs			
		déduits	<i>e</i>	<i>b<sub>∞</sub></i>	<i>x<sub>1</sub></i>	<i>x<sub>2</sub></i>	<i>x<sub>3</sub></i>
$x_1 = \frac{e^2}{a}$ (estimé)	$e \pm \Delta e$ (fixé)	<i>a</i>	2		-1		
$x_2 = \frac{b_\infty}{\rho C_p e}$ (estimé)	$b_\infty \pm \Delta b_\infty$ (fixé)	$\rho C_p$	-1	1		-1	
$x_3 = \frac{(\rho C_p e)_{semelle}}{\rho C_p e}$ (fixé)		<i>k</i>	1	1	-1	-1	
		<i>b</i>		1	-1/2	-1	
		$(\rho C_p e)_s$		1		-1	1

## Exemple :

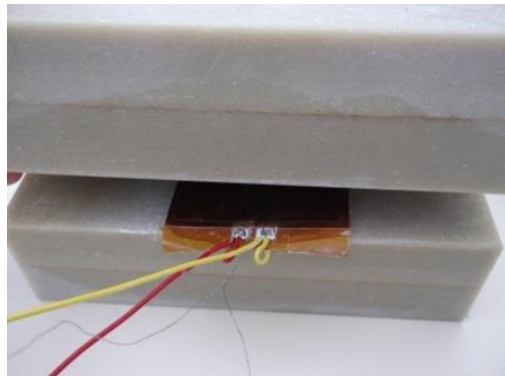
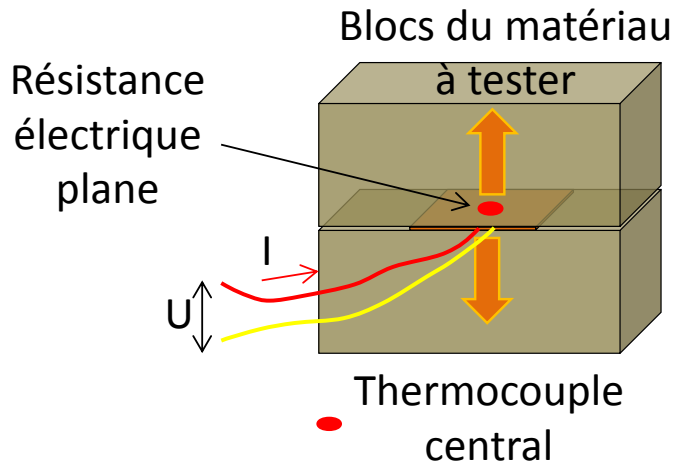
$$a_{mousse} = e_{mousse}^2 x_1^{-1}$$

$$\frac{\Delta a_{mousse}}{a_{mousse}} (\%) = \sqrt{\left(2 \times \frac{\Delta e}{e} (\%)\right)^2 + \left(1 \times \frac{\Delta x_1}{x_1} (\%)\right)^2}$$

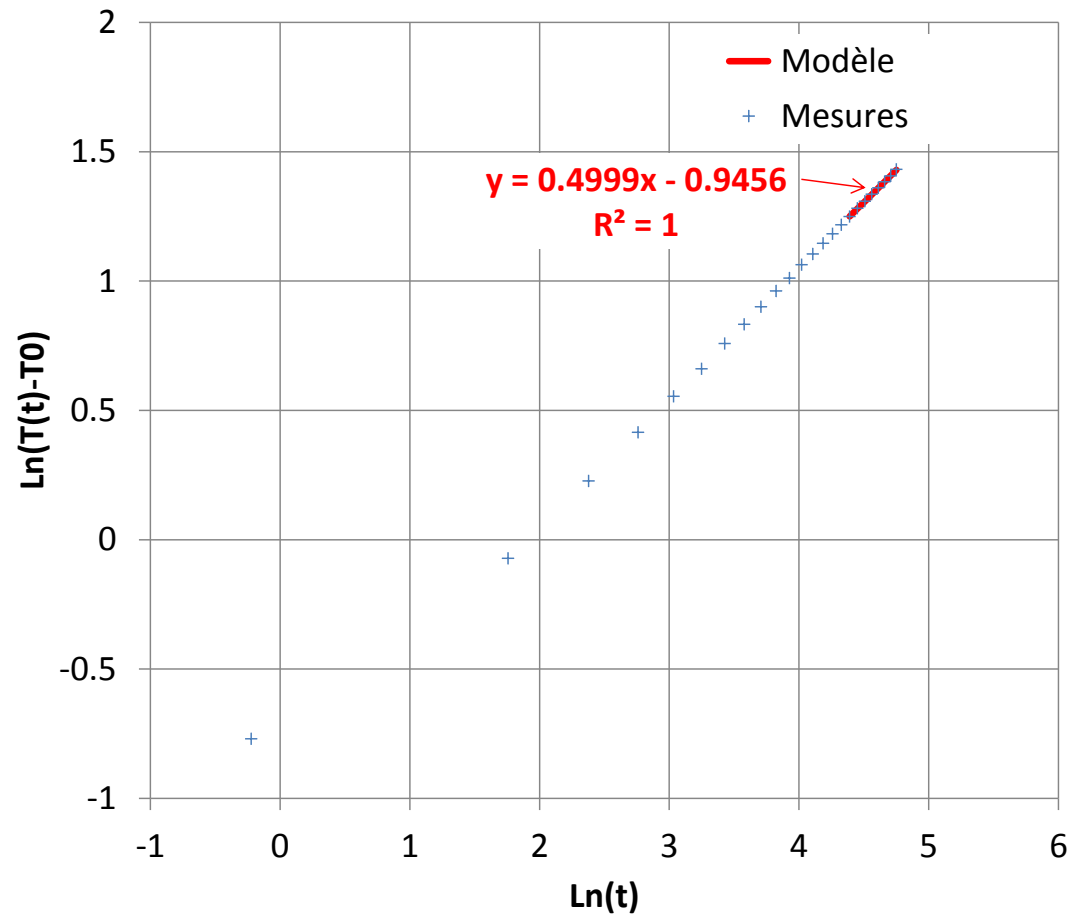
+  
Amplification du bruit de mesure  
Amplification du biais sur les paramètres directs fixés

**D - Résultats – Expérience préliminaire : caractérisation des pertes effusives à l'arrière : mesure de l'effusivité  $b_{\infty}$  du matériau (paramètre 'externe' dans la stratégie d'estimation)**

Méthode du plan chaud



$\Delta T(t)$  varie selon  $UI\sqrt{t}/(b_{\infty}\sqrt{\pi})$  aux temps longs



$$b_{\infty} = 706 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}\text{s}^{1/2} \pm 10\%$$



# Résultats – Exemple d'estimation sur la mousse MR4 (petits pores droits)

**Par. direct 1**

nominal absolu	1.1488	114.8753	5743.763
x (nominal)	0.01		50
<b>t_diff</b>	100 %	114.8753	
	ini./nom.	initial	
<b>(s)</b>	308.5794 %	<b>354.4814</b>	<b>estimé</b>
	opt./nom.	optimal	

**Par. direct 2**

nominal absolu	0.0001795	0.01795	0.89748
x (nominal)	0.01		50
<b>binf / (rho*Cp*e)</b>	100 %	0.01795	
	ini./nom.	initial	
<b>(s^(-1/2))</b>	104.3543 %	<b>0.018731</b>	<b>estimé</b>
	opt./nom.	optimal	

**Par. direct 3**

nominal absolu	0.0015782	0.15782	7.8912
x (nominal)	0.01		50
<b>(rho*Cp*e)_s / (rho*Cp*e)</b>	100 %	<b>0.15782</b>	<b>fixé</b>
	ini./nom.	initial	
<b>(/)</b>	100 %	<b>0.15782</b>	
	opt./nom.	optimal	

Paramètres directs

A estimer

ou ecart type fixe en % de beta0\_1

0

Ecart-type

du au bruit	0.18388	0.051873 %
du aux fixes	-8.6317	-2.435 %
total	8.8155	<b>2.4869</b> %

A estimer

ou ecart type fixe en % de beta0\_2

0

Ecart-type

du au bruit	3.1735e-005	0.16942 %
du aux fixes	0.0001628	0.86917 %
total	0.00019454	<b>1.0386</b> %

A estimer

ou ecart type fixe en % de beta0\_3

14

Ecart-type

du au bruit	0	0 %
du aux fixes	0.022095	14 %
total	0.022095	<b>14</b> %

Biais de 14% sur  $x_3$

Détail des erreurs sur les estimations

## Paramètres externes

Par. externe 1

<b>e</b>	0.1027
<b>(m)</b>	+/- <b>2</b> %

Par. externe 2

<b>binf</b>	706
<b>(Ws^(0.5)/m^2K)</b>	+/- <b>10</b> %

## Paramètres déduits

Par. Déduit 1

<b>a</b>	2.9754e-005
<b>(m^2/s)</b>	+/- 1.4014e-006
	+/- <b>4.71</b> %

Par. Déduit 2

<b>rho.Cp</b>	367004.2451
<b>(J/m^3K)</b>	+/- 37620.8323
	+/- <b>10.2508</b> %

Par. Déduit 3

<b>k</b>	10.9199
<b>(W/mK)</b>	+/- 1.1518
	+/- <b>10.5481</b> %

Par. Déduit 4

<b>b</b>	2001.911
<b>(Ws^(0.5)/m^2K)</b>	+/- 202.8014
	+/- <b>10.1304</b> %

Par. Déduit 5

<b>(rho*Cp*e) s</b>	5948.5666
<b>(Jm^2K)</b>	+/- 1025.2932
	+/- <b>17.236</b> %

Par. Déduit 6

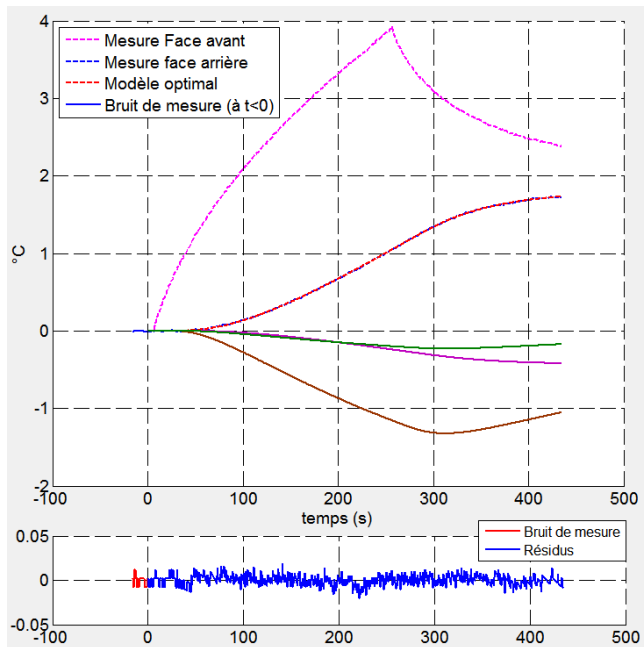
<b>binf sur b</b>	0.35266
<b>(/)</b>	+/- 0.0057136
	+/- <b>1.6201</b> %

- Le temps diffusif estimé est finalement effectivement beaucoup plus élevé que sa valeur nominale (rapport 309%)
- Incertitude finale de 10% sur  $k$  et  $\rho C_p$  de la mousse. La conductivité est 3 fois plus basse que prévue, la capacité volumique est conforme aux valeurs nominales prévues

# Gros pores

# Petits pores

Pores droits



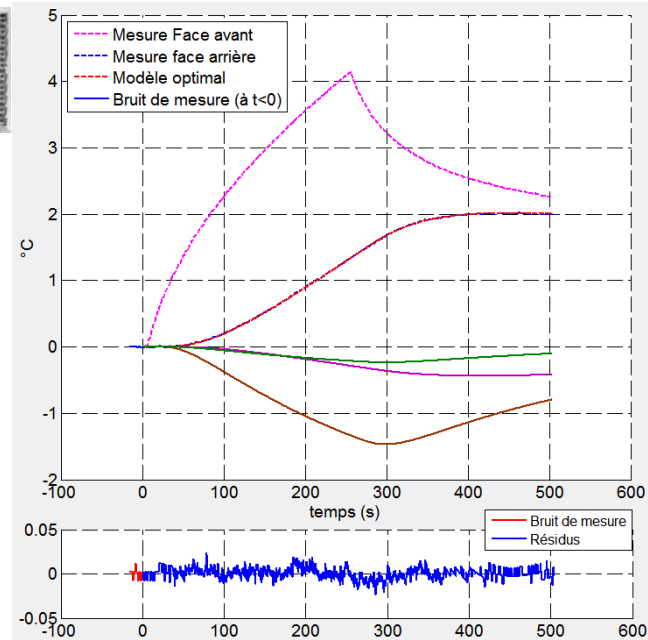
Résidus d'estimation comparables au bruit de mesure

$$x_1 = \frac{e^2}{a}$$

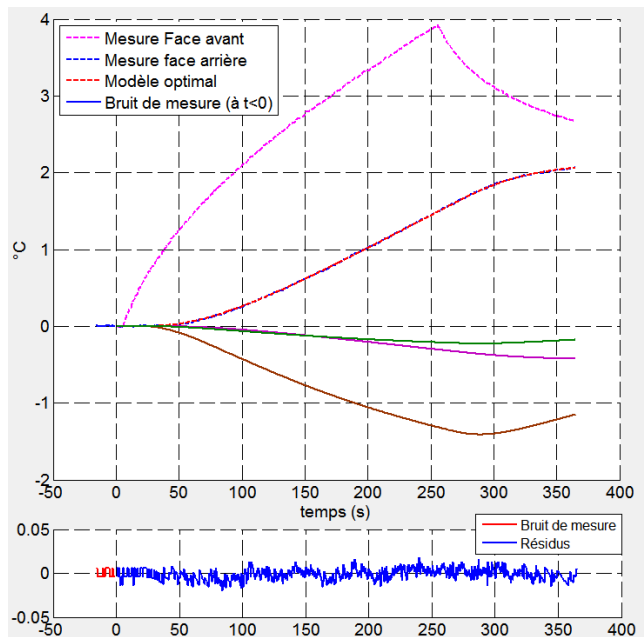
$$x_2 = \frac{b_\infty}{\rho C_p e}$$

$$x_3 = \frac{(\rho C_p e)_{\text{semelle}}}{\rho C_p e}$$

Pores droits

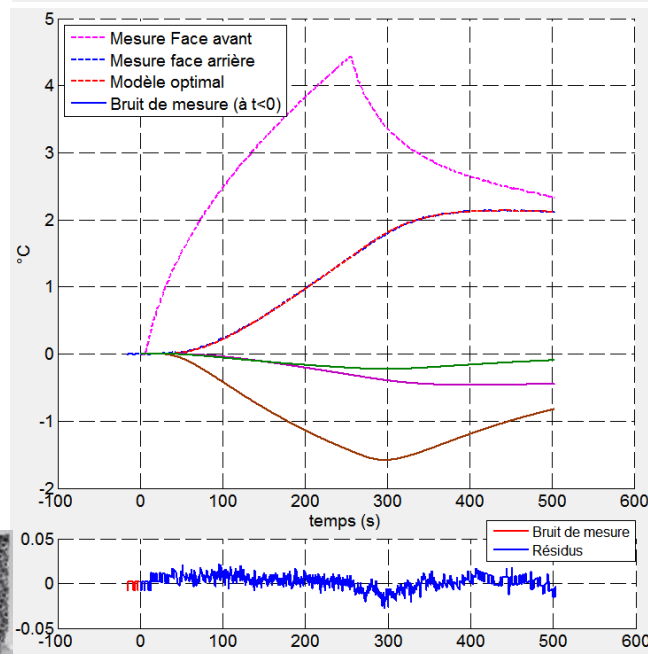


Pores inclinés



Pour les gros pores (à gauche), résidus légèrement signés en fin de thermogramme donc estimation sur durée plus courte

Pores inclinés



Remarque sur la comparaison des deux erreurs (amplification du bruit de mesure et du biais sur  $x_3$ )

$$x_1 = \frac{e^2}{a}$$

(estimé)

$$x_2 = \frac{b_\infty}{\rho C_p e}$$

(estimé)

$$x_3 = \frac{(\rho C_p e)_s}{\rho C_p e}$$

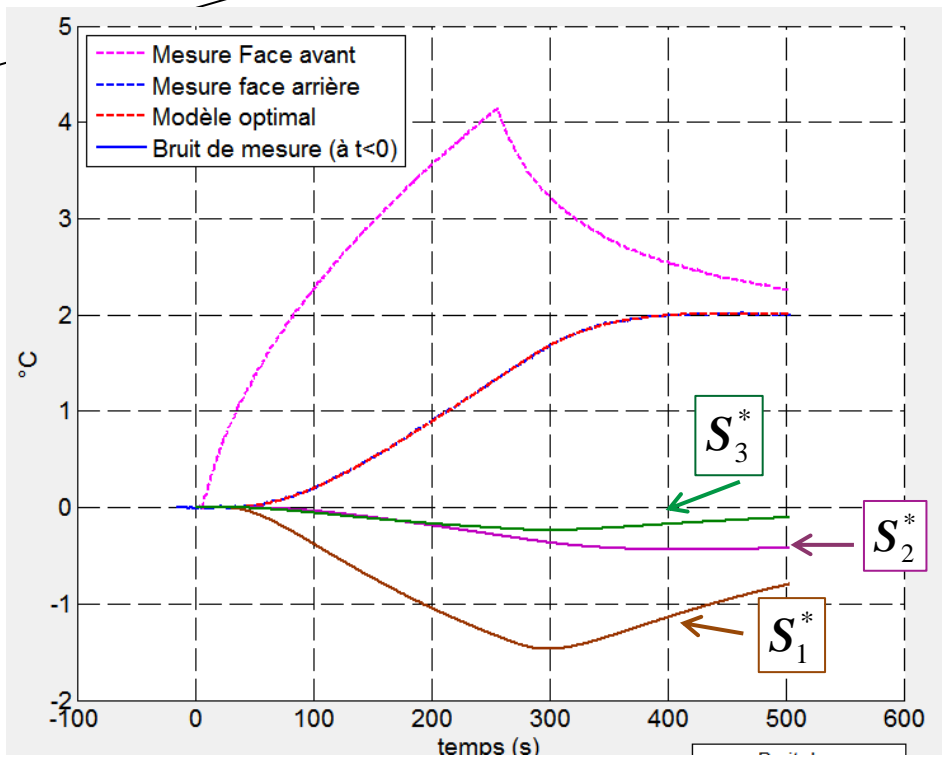
(fixé)

Ecart-type			
du au bruit	0.18388	0.051873	%
du aux fixes	-8.6317	-2.435	%
total	8.8155	2.4869	%

Ecart-type			
du au bruit	3.1735e-005	0.16942	%
du aux fixes	0.0001628	0.86917	%
total	0.00019454	1.0386	%

Ecart-type			
du au bruit	0	0	%
du aux fixes	0.022095	14	%
total	0.022095	14	%

L'erreur relative due au biais sur  $x_3$  de 14% est 50 fois plus importante que l'erreur due au bruit (2.4% contre 0.05%) et beaucoup plus importante que l'erreur relative sur  $x_2$ , pourtant moins sensible que  $x_1$



Biais sur les estimés

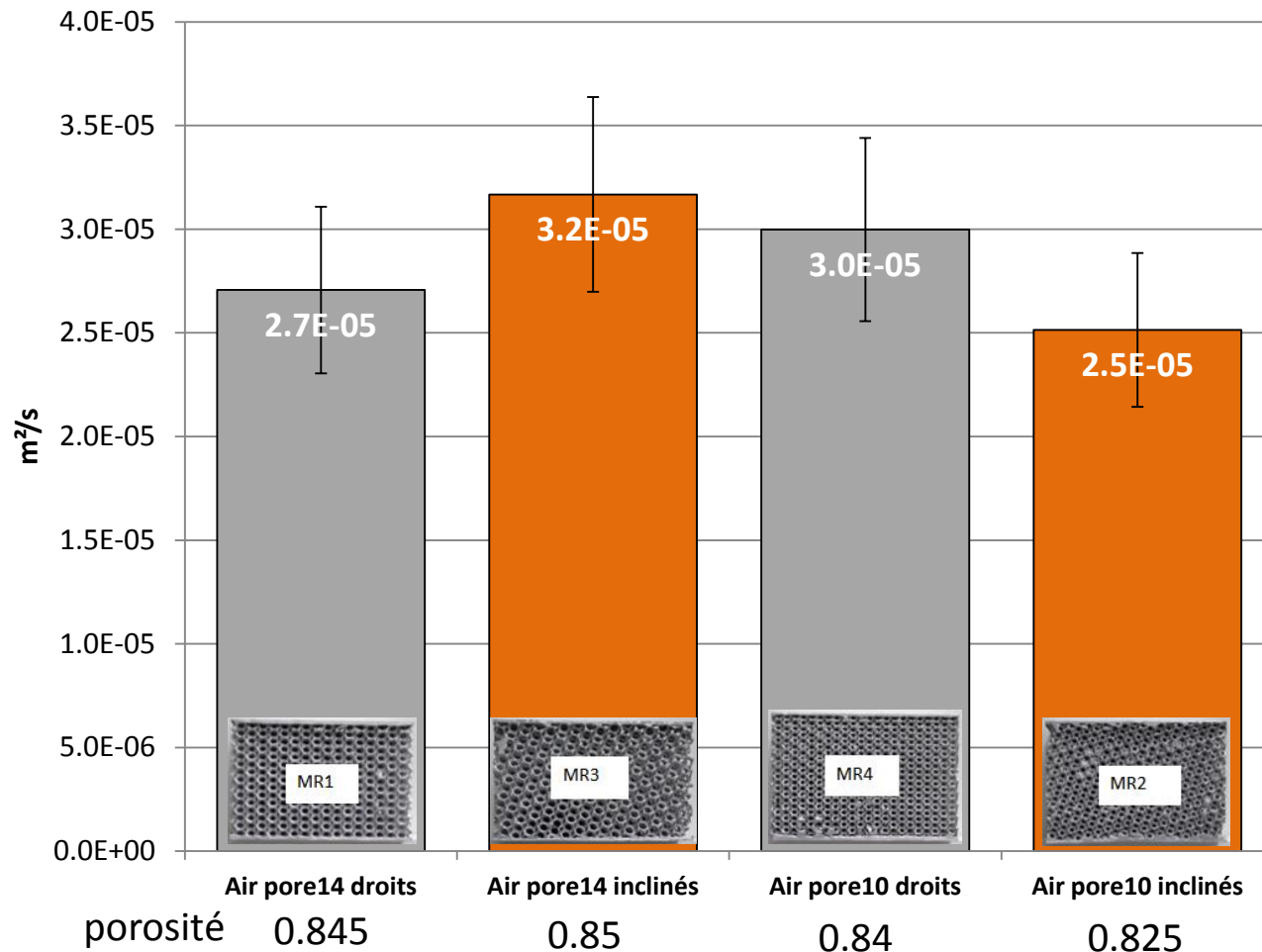
Biais sur  $x_3$  fixé

$$b_r = -[S_r^t S_r]^{-1} S_r^t S_c b_c$$

C'est à cause de ces produits scalaires entre les coefficients de sensibilité des paramètres estimés avec celui du paramètre fixé : proche de 0 si vecteurs  $S_r$  et  $S_c$  indépendants et maximum si vecteurs quasi colinéaires. Ici  $S_1$  et  $S_c = S_3$  sont quasi-colinéaires : le biais sur  $x_3$  se fera fortement sentir sur l'estimation de  $x_1$

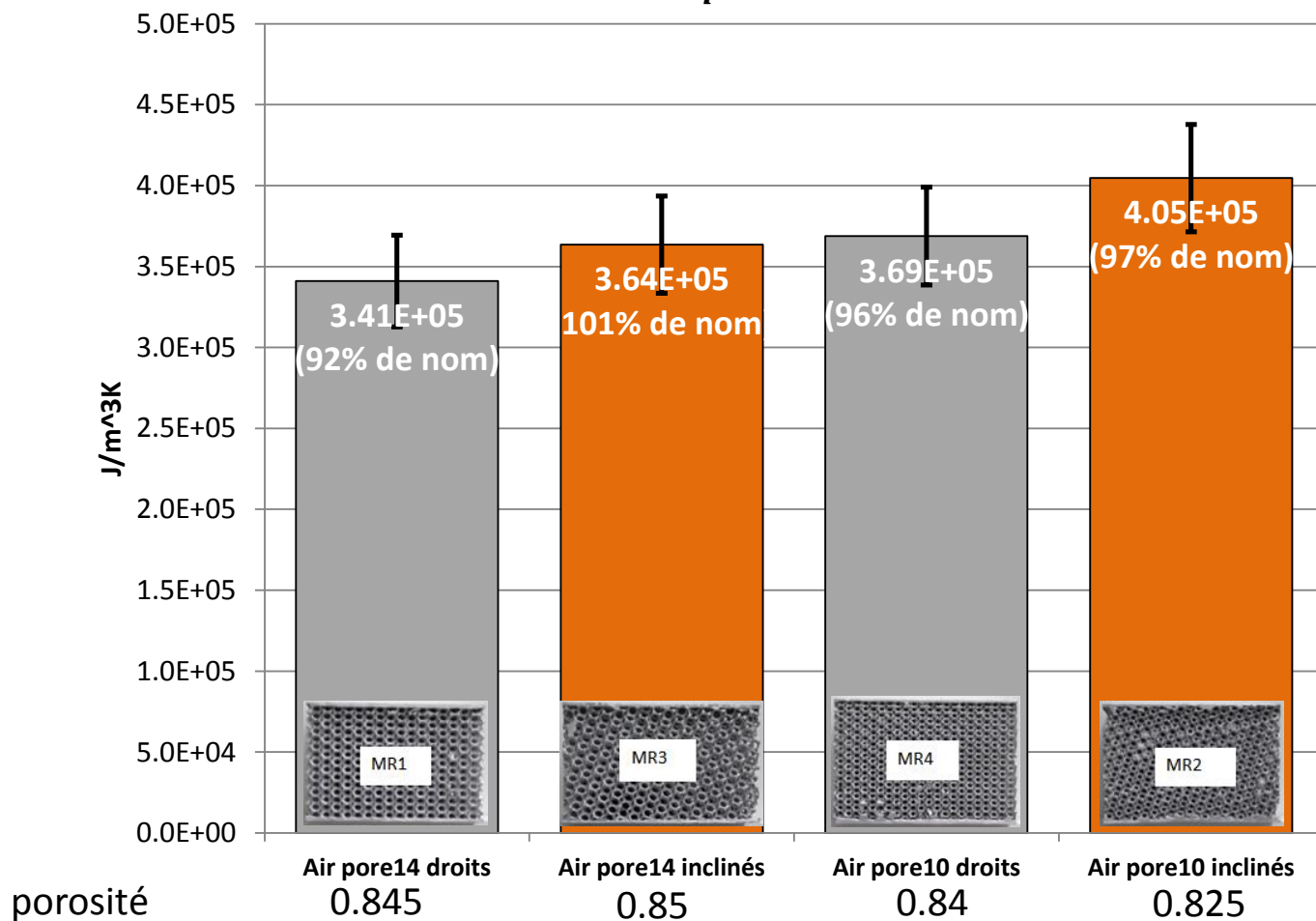
→ Lorsque l'on n'estime pas un paramètre car il est fortement corrélé à un autre, l'influence de cette corrélation se fera sentir dans l'amplification du biais sur le paramètre fixé au cours de l'estimation

## Diffusivités $\alpha$ identifiées, mousses avec air



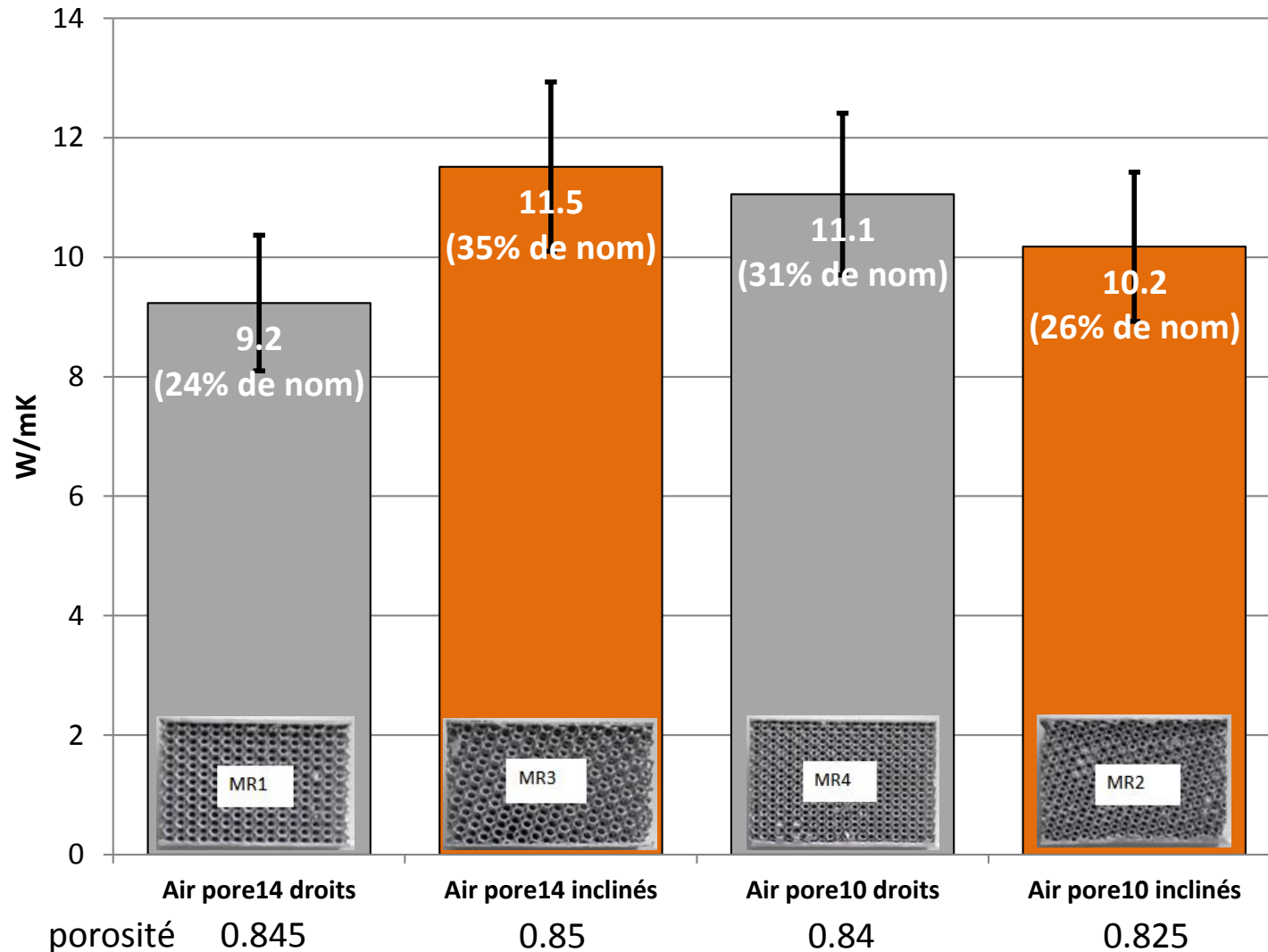
- Pas de corrélation nette avec la structure : taille de pores et inclinaison ne permettent pas de classer les diffusivités
- Pour les gros pores, l'inclinaison améliore la diffusivité de 18%, pour les petits c'est l'inverse, elle chute de 17%
- Pour les pores droits, la diffusivité la meilleure est obtenue pour les petits pores (+11%)
- Tendence croissante avec la porosité, léger 'accident' pour la mousse à gros pores droits

## Capacité volumiques $\rho C_p$ identifiées, mousses avec air



- Capacités assez proches, plus élevée surtout pour la mousse à petits pores inclinés
- Pour les gros pores, l'inclinaison améliore la capacité de 7%, pour les petits de 10%
- Pour les pores droits, la capacité la meilleure est obtenue pour les petits pores (+8%)
- Tendence décroissante avec la porosité, léger 'accident' pour la mousse à gros pores inclinés

## Conductivités apparentes $k$ identifiées, mousses avec air



- Pas de tendance nette, conductivités voisines, toutes inférieures de 25 à 30% aux valeurs nominales
- Pour les gros pores, l'inclinaison améliore la conductivité de 25%, pour les petits elle chute de 9%
- Pour les pores droits, la conductivité la meilleure est obtenue pour les petits pores (+21%)
- Très légère tendance croissante avec la porosité avec un 'accident' pour la mousse à gros pores droits

**Résumé :** Identification en transmittance appliquée à une expérience avec pertes effusives en face arrière sur un tricouche à semelles capacitives ( $\Delta T = T - T_{ini}$ )

Modèle convolutif  
 $\Delta T_{out}(x) = M(W_{out}(x)) \Delta T_{in} \Delta t$   
Impédance  $W_{out}(x, t)$  fonction de  
Paramètres  $x = (x_1, x_2, x_3)^t$

Propagation des incertitudes  
- de mesures sur  $\Delta T_{in}(t), \Delta T_{out}(t)$   
- sur le paramètre fixé  $x_3$

Propagation des incertitudes  
- sur  $x_1, x_2, x_3$   
- sur  $e, b_\infty$

Données mesurées  
 $\Delta T_{in}(t), \Delta T_{out}(t)$

Paramètre direct  
supposé connu  
 $x_3 = \frac{(\rho C_p e)_s}{\rho C_p e} \pm \Delta x_3$

Identification de  
2 paramètres directs  
 $x_1 = \frac{e^2}{a} \pm \Delta x_1$   
 $x_2 = \frac{b_\infty}{\rho C_p e} \pm \Delta x_2$

Paramètres externes  
supposés connus  
 $e \pm \Delta e$   
 $b_\infty \pm \Delta b_\infty$  (plan chaud)

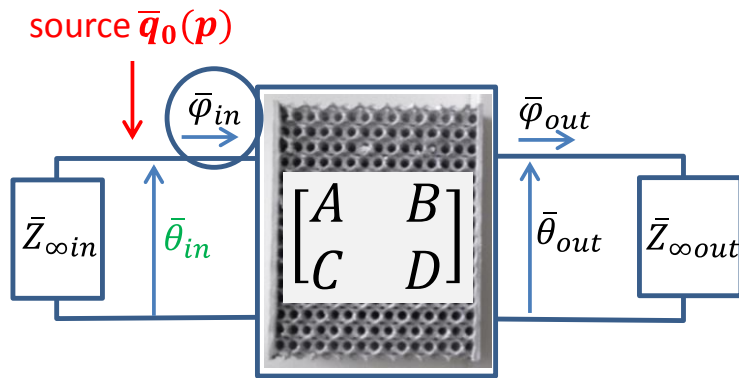
- Diffusivité  $a \pm \Delta a$   
- Capacité thermique  
volumique  $\rho C \pm \Delta \rho C$   
- Conductivité  $k \pm \Delta k$   
- autres...

## E – Peut-on identifier le flux entrant en face avant?

Pour aller plus loin, puisque l'on dispose

- des thermogrammes sur les deux faces de l'échantillon
- et maintenant d'informations sur le matériau (transmittance)

**Est-ce suffisant pour accéder aux flux, notamment  $\varphi_{in}(t)$  entrant en face avant?**



$$\bar{\theta}_{in}(p) = \frac{1/\bar{W}_{out}(p, x) \text{ où la transmittance } \bar{W}_{out}(p, x) \text{ a été identifiée}}{C + D \frac{1}{\bar{Z}_{\infty out}}} \bar{\varphi}_{in}(p) = \bar{Z}_{in}(p, x) \bar{\varphi}_{in}(p)$$

$1/\bar{Z}_{out}(p)$  où l'impédance  $\bar{Z}_{out}(p)$  n'est pas connue, mais ne dépend elle non plus d'aucune donnée sur les pertes en face avant

Tous calculs faits on obtient ici

$$1/\bar{Z}_{out}(p) = \frac{1}{\rho C e} \left\{ ch(\sqrt{x_1 p}) [x_2 \sqrt{p} + 2x_3 p] + sh(\sqrt{x_1 p}) [\sqrt{x_1} x_3^2 p^{3/2} + \sqrt{x_1} x_2 x_3 p + \sqrt{p}/\sqrt{x_1}] \right\}$$

qui s'exprime donc en fonction

- des mêmes paramètres  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$  que la transmittance  $x_1 = \frac{e^2}{a}$ ,  $x_2 = \frac{b_{\infty}}{\rho C p e}$ ,  $x_3 = \frac{(\rho C p e)_s}{\rho C p e}$
- mais aussi du paramètre 'seul'  $\rho C e$

Donc  $\bar{\theta}_{in}(p, \mathbf{x}) = f(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \frac{\bar{\varphi}_{in}(p)}{\rho C e}$  où  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  est entièrement définie par  $(x_1, x_2, x_3)^t$  identifié précédemment

autrement dit,  $\bar{\theta}_{in}(p, \mathbf{x})$  est la convolution de  $f(\mathbf{x})$  avec la grandeur  $\frac{\bar{\varphi}_{in}(p)}{\rho C e}$

NB :  $f(\mathbf{x}) = \rho C e \bar{Z}_{in}(p, \mathbf{x})$  est l'impédance d'entrée  $\bar{Z}_{in}$  à une constante près (donc une 'quasi-impédance')



En écrivant la convolution en notations 'Toeplitz', on a donc

$$\Delta T_{in}(t, x) = M(f(x)) \frac{\varphi_{in}(t)}{\rho C e} \Delta t$$

Le calcul de  $\frac{\varphi_{in}(t)}{\rho C e}$  par déconvolution consiste alors à calculer

$$\frac{\varphi_{in}(t)}{\rho C e} = \frac{1}{\Delta t} M(f(x))^{-1} \Delta T_{in}(t, x)$$

L'opération d'inversion de  $M(f(x))$  rend le problème instable en amplifiant le bruit de mesure, une régularisation de type Tikhonov d'ordre 0 peut être appliquée pour limiter cet effet en agissant sur le paramètre régularisant  $\gamma$  :

$$\frac{\varphi_{in}(t)}{\rho C e} = \frac{1}{\Delta t} [M(f(x))^t M(f(x)) + \gamma I_n]^{-1} M(f(x))^t \Delta T_{in}(t, x)$$

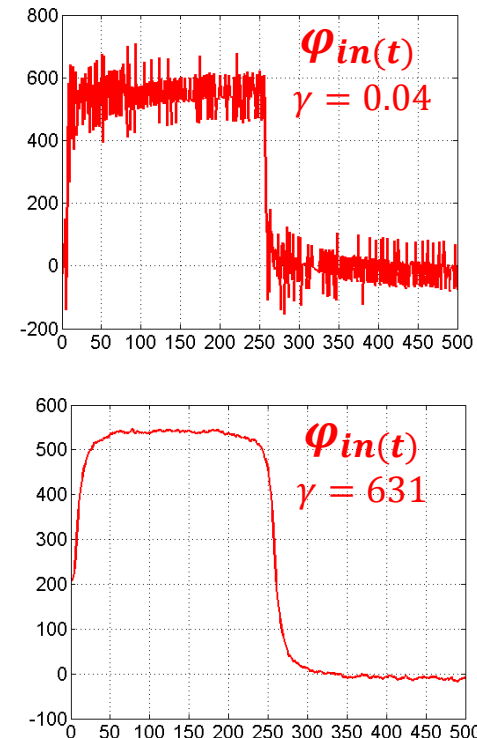
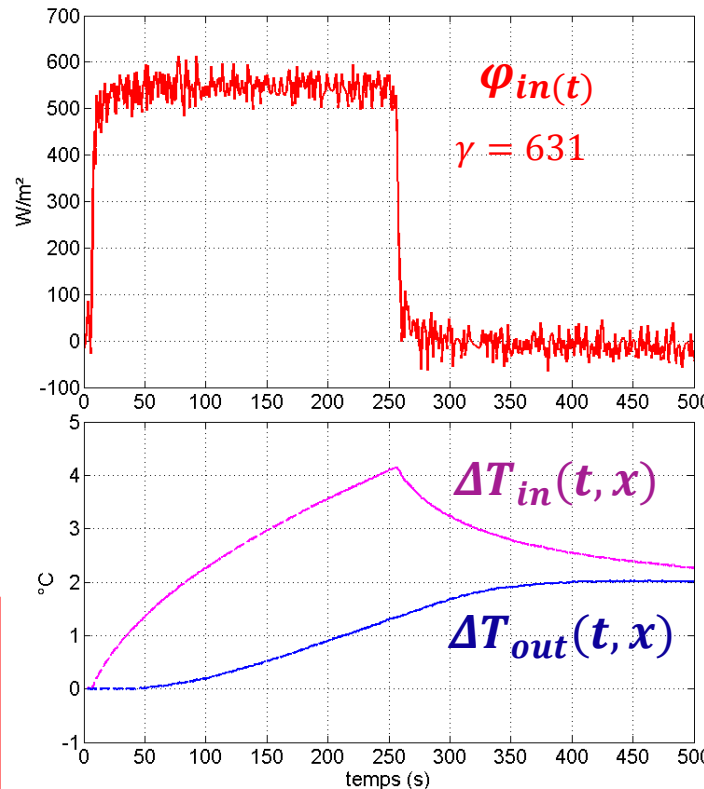
Enfin pour atteindre  $\varphi_{in}(t)$  il faut connaître  $\rho C e$  ce qui est possible à partir d'un des paramètres identifiés de la transmittance

$$x_2 = \frac{b_\infty}{\rho C_p e}$$

seulement si on connaît le paramètre externe  $b_\infty$ , qui qualifie les pertes en face arrière. C'est le cas ici.



**Thermogrammes en faces avant et arrière + transmittance ne suffisent pas à connaître le flux entrant : il faut connaître le coefficient de pertes (au sens large, h ou  $b_\infty$ ) à l'arrière**

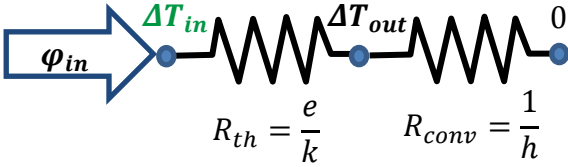
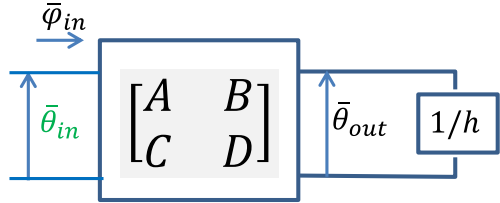


Grâce à la déconvolution du thermogramme avant et à la mesure de  $b_\infty$  on retrouve bien un flux entrant de type créneau ici

**F - Résumé : ce que l'on peut obtenir avec deux thermogrammes (méthode 'transmittance').**

Parallèle avec le cas stationnaire (donc avec des pertes convectives en face arrière)

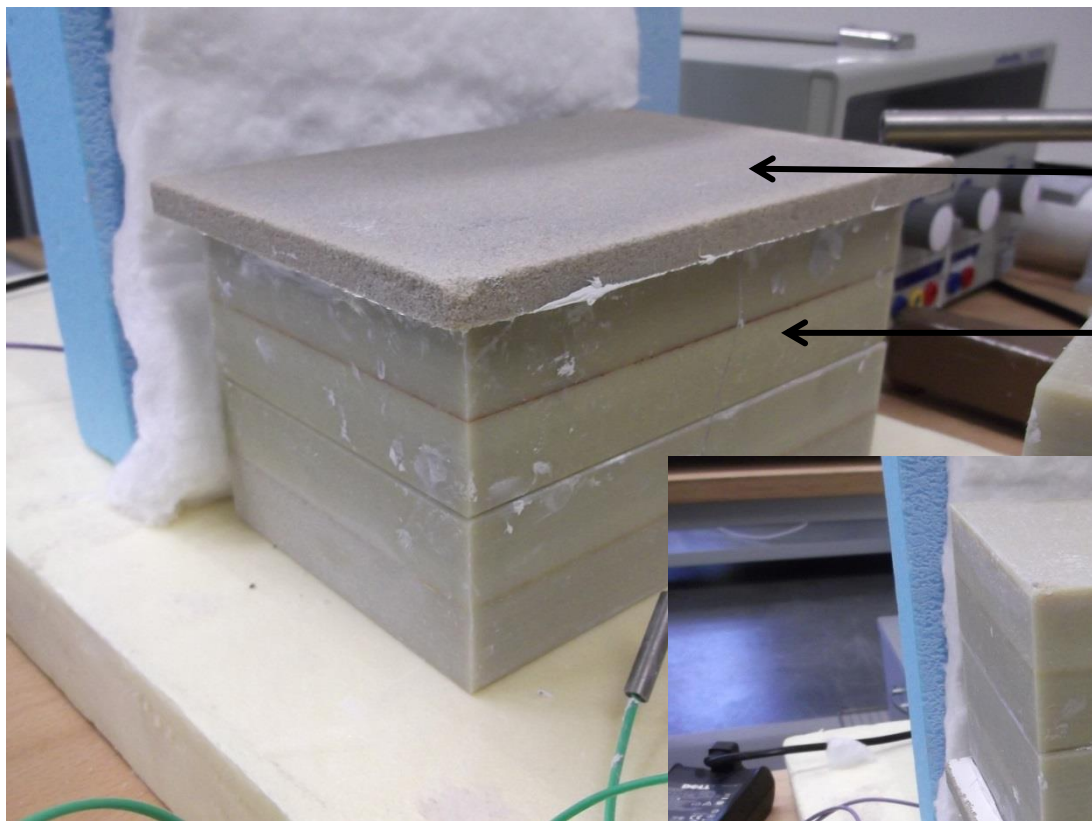
dans le cas basique d'un échantillon monocouche ( $\Delta T = T - T_{fluide} = T - T_{ini}$ )

Données	<p style="text-align: center;"><b>Dans le cas stationnaire...</b></p>  <p style="text-align: center;"><b>... on accède à:</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>Dans le cas instationnaire...</b></p>  <p style="text-align: center;"><b>...on accède à:</b></p>
<p><math>\Delta T_{in}(t),</math> <math>\Delta T_{out}(t)</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Une grandeur 'matériau/pertes'</li> </ul> $Bi = \frac{he}{k} = \frac{\Delta T_{in} - \Delta T_{out}}{\Delta T_{out}}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Une grandeur 'flux/matériau', i. e.</li> </ul> <p>Le flux entrant, à une constante 'matériau' près</p> $\varphi_{in} \frac{e}{k} = \Delta T_{in} - \Delta T_{out}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Deux grandeurs de la transmittance <math>\bar{W}_{out}</math> (par estimation de paramètres avec modèle convolutif)             <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Une grandeur 'matériau' <math>x_1 = \frac{e^2}{a}</math></li> <li>➤ Une grandeur 'matériau/pertes' <math>x_2 = \frac{he}{k}</math></li> </ul> </li> <li>➤ Une grandeur 'flux/matériau', i. e.</li> </ul> <p>Le flux entrant, à une constante 'matériau' près (par déconvolution du thermogramme avant connaissant la quasi-impédance <math>f(x_1, x_2)</math>)</p> $\frac{\varphi_{in(t)}e}{k} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(f(x))^{-1} \Delta T_{in}(t, x)$
<p><math>\Delta T_{in}(t),</math> <math>\Delta T_{out}(t),</math> Donnée 'pertes' : <math>h</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Même grandeurs</li> <li>➤ Nouvelle grandeur 'matériau' : <math>\frac{e}{k} = \frac{Bi}{h}</math></li> <li>➤ Nouvelle grandeur 'flux' :</li> </ul> $\varphi_{in} = \frac{\Delta T_{in} - \Delta T_{out}}{e/k}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Même grandeurs</li> <li>➤ Nouvelle grandeur 'matériau' : <math>\frac{e}{k} = \frac{Bi}{h}</math></li> <li>➤ Nouvelle grandeur 'flux' :</li> </ul> $\varphi_{in(t)} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(f(x))^{-1} \Delta T_{in}(t, x) \frac{1}{e/k}$

## Conclusion

- Expérience instationnaire dimensionnée pour les mousses métalliques à forte porosité
  - Chauffage créneau par plan chaud en face avant
  - Pertes effusives en face arrière (milieu semi-infini d'effusivité  $b_{\infty}$ )
  - Mesure en face avant et arrière pour convolution avec la transmittance
- 2 Paramètres de la transmittance identifiables simultanément : temps diffusif ( $e^2/a$ ) et un paramètre ( $b_{\infty}/\rho C e$ ) dépendant des pertes arrières et de la capacité de la mousse
- Intérêts des pertes effusives par rapport aux pertes convectives :
  - en caractérisant au préalable  $b_{\infty}$  (plan chaud), on peut déduire la capacité de la mousse puis sa conductivité
  - On peut également calculer l'impédance de l'échantillon et calculer le flux entrant en face avant par déconvolution du thermogramme par cette impédance
- Mousses analysées : Alu remplies d'air
  - Semblent correctement 'homogénéisables'
  - Pas d'influence nette de la structure sur les propriétés, conductivités assez proches avec ces différences :
    - Pour les gros pores, l'inclinaison améliore la conductivité de 25% , pour les petits elle chute de 9%
    - Pour les pores droits, la conductivité la meilleure est obtenue pour les petits pores (+21%)
- Les conductivités identifiées sont toujours  $\ll$  conductivités nominales prévues par le modèle parallèle

Annexe : application de la méthode 'transmittance avec pertes effusives' à des échantillons de sable compacté utilisé en fonderie



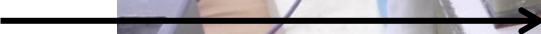
Plaque de sable compacté



Isolant arrière ½ infini  
(pertes effusives)



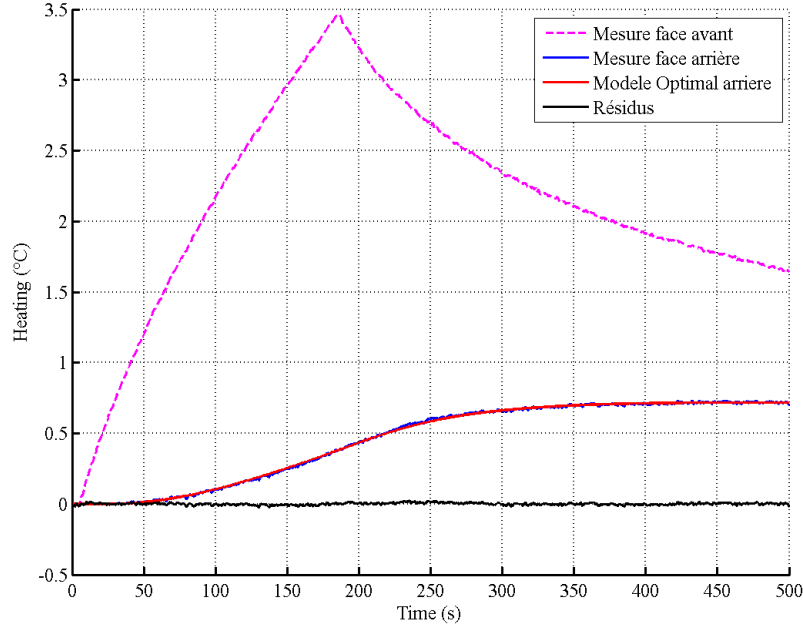
Semelle chauffante instrumentée  
en face avant



rhoCp (J/m <sup>3</sup> K)	Diffusivité (m <sup>2</sup> /s)	Conductivité (W/mK)	Effusivité (Ws <sup>(1/2)</sup> /
480294	3.31E-07	0.159017	276.36

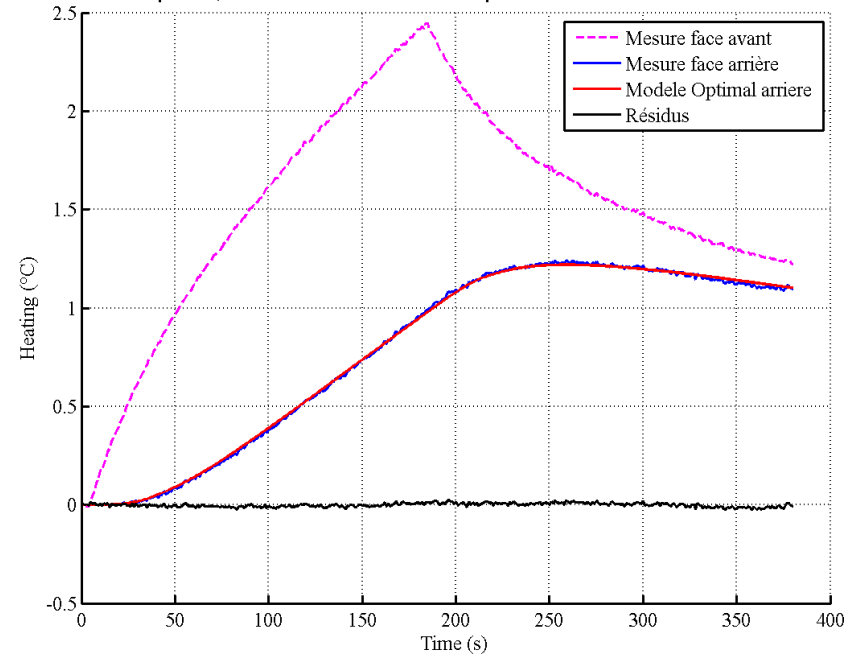
## Sable 'Omega-sphère'

LD Sable 1 expé #2, Modele-TE-k-rhoC : comparaison mesure-modèle en face arrière



## Sable 'traditionnel'

HD Sable 1 expé #1, Modele-TE-k-rhoC : comparaison mesure-modèle en face arrière



rhoCp (J/m <sup>3</sup> K)	Diffusivité (m <sup>2</sup> /s)	Conductivité (W/mK)	Effusivité (Ws <sup>(1/2)</sup> /m <sup>2</sup> K)
1.29E+06	6.63E-07	0.854308	1048.97