

Chapitre 5

CONVECTION LIBRE

La vraie force de l'esprit se mesure au degré d'incertitude qu'il est capable de supporter.

Nietzsche

La convection *libre* (ou *naturelle*) se distingue de la convection forcée en ceci que le mouvement du fluide n'est pas dû à un apport externe d'énergie mécanique, mais qu'il trouve sa source au sein même du fluide, sous l'effet conjugué de gradients de masse volumique et d'un champ de pesanteur. Les variations de masse volumique sont généralement dues à des gradients de température, encore que des forces d'accélération (dans les centrifugeuses) ou de Coriolis (dans les transferts atmosphériques), ou encore des gradients de concentration (dans les mélanges), puissent jouer le même rôle. Nous ne mentionnerons par la suite que les phénomènes ayant une origine thermique.

Les écoulements de convection libre se répartissent en quatre grandes catégories : *panaches* lorsqu'il n'y a pas de parois à proximité, *convection libre externe* en présence d'une paroi, *convection libre interne* dans des espaces confinés comportant une entrée et une sortie distinctes, et enfin *convection libre dans des enceintes* closes ou partiellement ouvertes.

En outre, certains auteurs font une différence entre convection "*naturelle*", interne ou dans une enceinte, et véritable convection "*libre*", correspondant aux panaches et aux écoulements externes. Mais très souvent on emploie indifféremment l'un ou l'autre terme.

5.1. - ASPECTS PHYSIQUES DU PROBLÈME

En fait, dans notre environnement quotidien, les manifestations de la convection libre sont plus présentes que les effets de la convection forcée, même

si elles ne sont pas toujours directement perceptibles par nos sens : c'est ainsi que dans n'importe quelle salle d'habitation nous sommes entourés en permanence de mouvements d'air ; celui-ci se réchauffe en montant le long des parois les plus chaudes et se refroidit en descendant le long des parois les plus froides. La diversité des situations est également plus grande en convection libre : par exemple l'inclinaison d'une paroi, qui est souvent sans effet dans un écoulement isotherme, devient ici un paramètre essentiel ; de même les effets de gravité sont significatifs dans des enceintes fermées anisothermes (bâtiments, réacteurs chimiques) ou en physique de l'environnement, du fait des écarts de température entre la surface et l'ambiance.

Les domaines d'applications sont donc vastes, et concernent aussi bien l'isolation des canalisations que le refroidissement des circuits électriques et électroniques, la thermique du bâtiment et le confort humain, les panaches et la dispersion des effluents, ou encore la thermique de l'atmosphère et des océans.

En ce qui concerne la mécanique des écoulements de convection naturelle on observe que, puisque les gradients de masse volumique à l'origine du mouvement sont eux-mêmes dus à des gradients de température, il y a là un couplage structurel entre bilan de quantité de mouvement et bilan d'énergie, c'est à dire entre champ de vitesse et champ de température.

D'autre part, une spécificité de la convection libre concerne les faibles niveaux de vitesse atteints, avec pour conséquence immédiate des flux thermiques également modestes. Il en résulte d'abord que la convection libre constitue soit un obstacle lorsqu'on veut améliorer les échanges thermiques, soit une sorte d'isolation naturelle lorsqu'on veut au contraire les réduire, et ensuite que les échanges par rayonnement, souvent négligeables en convection forcée, pourront être ici du même ordre de grandeur que les échanges convectifs.

Bien évidemment, les gradients de densité auxquels nous avons fait allusion se produisent aussi en convection forcée mais là, justement, leurs effets sont à peu près nuls. Les cas intermédiaires, où ces effets sont comparables à ceux de l'écoulement forcé, constituent des situations de *convection mixte* (Ch. 6). Ajoutons enfin que l'existence d'un gradient de masse volumique n'entraîne pas automatiquement un mouvement de convection naturelle : ainsi, entre deux plaques planes horizontales, si c'est la plaque supérieure qui est la plus chaude, le transfert thermique reste en général purement conductif.

L'aspect le plus important des transferts en convection libre est (comme en convection forcée) ce qui se passe au voisinage des parois. On y retrouve en particulier des structures de couche limite dont nous allons parler bientôt. Mais établissons déjà au préalable les équations générales auxquelles obéit le phénomène.

5.2. - ADAPTATION DES ÉQUATIONS DE BILANS AUX CONDITIONS DE LA CONVECTION GRAVITAIRE

D'une façon globale, nous désignons sous le vocable de *convection gravitaire* les mécanismes convectifs dans lesquels tout ou partie du mouvement est généré par l'action conjuguée des gradients de température et du champ de pesanteur. On parlera plus spécifiquement de *convection libre* si le mouvement résulte exclusivement du champ de température, et de *convection mixte* si une autre source d'énergie mécanique intervient parallèlement.

Dans les conditions que nous considérons ici, on pourrait caractériser le comportement du fluide en disant d'une façon un peu ramassée que sa masse volumique est à la fois constante et variable. En effet : **1)** les variations de masse volumique sont faibles, et à ce titre le milieu est considéré comme isochore ; **2)** mais elles sont néanmoins suffisantes pour permettre une mise en mouvement du fluide.

Une autre propriété se superpose à celle-ci : les gradients de masse volumique sont dus beaucoup plus aux écarts de température qu'aux écarts de pression liés à l'écoulement : cette spécification constitue "*l'hypothèse de Boussinesq*" (1.6).



On admette donc selon le contexte :

$$\rho = cte \quad (5.1a)$$

ou

$$\rho = \rho(T) \text{ indépendante de } p \quad (5.1b)$$

et dans ce cas, ρ est une fonction décroissante de la température.

Plus précisément, désignons par T_∞ une température caractéristique de l'écoulement (température du fluide au loin, ou température de paroi...). En posant $\rho_\infty = \rho(T_\infty)$, la propriété (5.1b) s'exprimera par la relation

$$\rho = \rho_\infty \{1 - \beta (T - T_\infty)\} \quad (5.1c)$$

où β est la *dilatabilité* du fluide (ou coefficient de dilatation volumique à pression constante).

En outre, compte tenu là encore des écarts de température modestes, on basera les calculs sur l'hypothèse que β , λ et μ sont indépendants de T :

$$\beta = cte \quad ; \quad \lambda = cte \quad ; \quad \mu = cte \quad (5.1d)$$



Ceci est évidemment une approximation (surtout pour β et μ) qui doit, pour n'être pas trop grossière, reposer sur un choix judicieux de la température à laquelle on fait l'évaluation. Ce sera de préférence la température de film (§ 5.5.4).



Pour conclure sur le niveau d'approximation adopté, notons encore que les deux moitiés de l'hypothèse de Boussinesq vont être utilisées simultanément dans l'équation de quantité de mouvement pour passer de (5.5) à (5.7a) (voir ci-dessous) : la loi (5.1c) est appliquée au terme qui implique la pesanteur, tandis que

dans les autres termes on admet $\rho / \rho_\infty \approx 1$, ce qui est correct pour les liquides mais plus discutable pour les gaz. Comme l'avait justement dit Yves ROCARD, « *la physique est toujours un petit peu fausse* » !

Voyons maintenant l'incidence des conditions précédentes sur les équations de bilans :

1) Dans le bilan de masse, exprimé par l'équation de continuité $div \rho \vec{V} = 0$, on prend en compte l'équation (5.1a), d'où :

$$\boxed{div \vec{V} = 0} \quad (5.2)$$

2) Dans l'équation d'énergie, la même condition conduit à une relation identique à (1.2) (après division par ρC_p) :

$$\boxed{\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} T = a \Delta T} \quad (5.3)$$

3) Dans le bilan de quantité de mouvement, le plus simple est de partir de l'équation générale (FEMM 1.36) en régime permanent :

$$\rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{V} = \rho \vec{F} - \overrightarrow{grad} p + \mu (\Delta \vec{V} + \overrightarrow{grad} \cdot div \vec{V}) \quad (5.4)$$

On sait déjà que \vec{F} représente ici le champ de pesanteur et que $div \vec{V} = 0$; de ce fait :

$$\rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{V} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (5.5)$$

Compte tenu de la dilatabilité du fluide (propriété 5.1c), décomposons ρ dans $\rho \vec{g}$:

$$\rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{V} = (\rho - \rho_\infty) \vec{g} + \rho_\infty \vec{g} - \overrightarrow{grad} p + \mu \Delta \vec{V}$$

En introduisant la pression motrice p^* (1.60b) définie ici par :

$$\overrightarrow{grad} p^* = \overrightarrow{grad} p - \rho_\infty \vec{g} \quad (5.6)$$

il vient :

$$\rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{V} = (\rho - \rho_\infty) \vec{g} - \overrightarrow{grad} p^* + \mu \Delta \vec{V}$$

Si l'on divise enfin par ρ_∞ , en observant que dans le premier membre $\frac{\rho}{\rho_\infty} \approx 1$,

on obtient l'équation :

$$\boxed{\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{V} = \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_\infty} \vec{g} - \frac{1}{\rho_\infty} \overrightarrow{grad} p^* + \nu \Delta \vec{V}} \quad (5.7a)$$

ou encore, en faisant intervenir (5.1c) :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} \vec{V} = -\beta (T - T_\infty) \vec{g} - \frac{1}{\rho_\infty} \overrightarrow{grad} p^* + \nu \Delta \vec{V} \quad (5.7b)$$



Les variations de ρ dans le champ de pesanteur se traduisent donc par l'apparition d'une force verticale appelée "*poussée thermique*", qui est la résultante du poids et de la poussée d'Archimède, et dont la valeur (rapportée à l'unité de volume du fluide) est $(\rho - \rho_\infty) \bar{g}$. Cette force, ascendante si le fluide est localement plus léger que le fluide ambiant ($\rho < \rho_\infty$, \bar{g} étant dirigé vers le bas) ou descendante dans le cas contraire, est à l'origine d'un mouvement de *convection gravitaire*.

Le raisonnement se transpose au bilan intégral de quantité de mouvement, et s'applique par exemple aux ballons à gaz ou aux écoulements diphasiques.

L'équation (5.7) décrit l'ensemble des mécanismes de convection gravitaire, qui incluent comme nous l'avons dit la convection libre et la convection mixte, selon qu'il y a ou non apport d'énergie mécanique extérieure. Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons exclusivement à la convection libre.

5.3. - COUCHES LIMITES EN CONVECTION LIBRE : DONNÉES EXPÉRIMENTALES

Avant d'aller plus loin dans les calculs, voyons déjà quelles informations nous fournit l'expérience lorsqu'on réalise des conditions de convection libre en écoulement externe.

Nous choisissons pour cela une disposition simple : plaque plane verticale, maintenue à une température uniforme T_p ; fluide ambiant immobile ($U_\infty = 0$) à température uniforme T_∞ .

Plaçons-nous par exemple dans le cas où la plaque est plus chaude que le fluide ($T_p > T_\infty$). D'après ce que l'on sait déjà, le fluide va s'élever le long de la paroi ($\rho(T_p) < \rho(T_\infty)$).

Commençons par visualiser l'écoulement en injectant un traceur (colorant, fumée, bulles...) au niveau du bord d'attaque. On observe alors un filet qui est d'abord rectiligne et parallèle à la paroi, puis qui ondule avant de se fragmenter en volutes (fig. 5.1). Ceci traduit donc, comme dans les écoulements isothermes (FEMM, § 2.2) l'existence de deux structures dynamiques correspondant à deux régimes différents d'écoulement : laminaire près du bord d'attaque, puis turbulent. Il est d'ailleurs très facile de réaliser une expérience qualitativement analogue en regardant le filet de fumée qui monte d'une cigarette en air calme (et dans un "espace fumeurs" bien entendu).

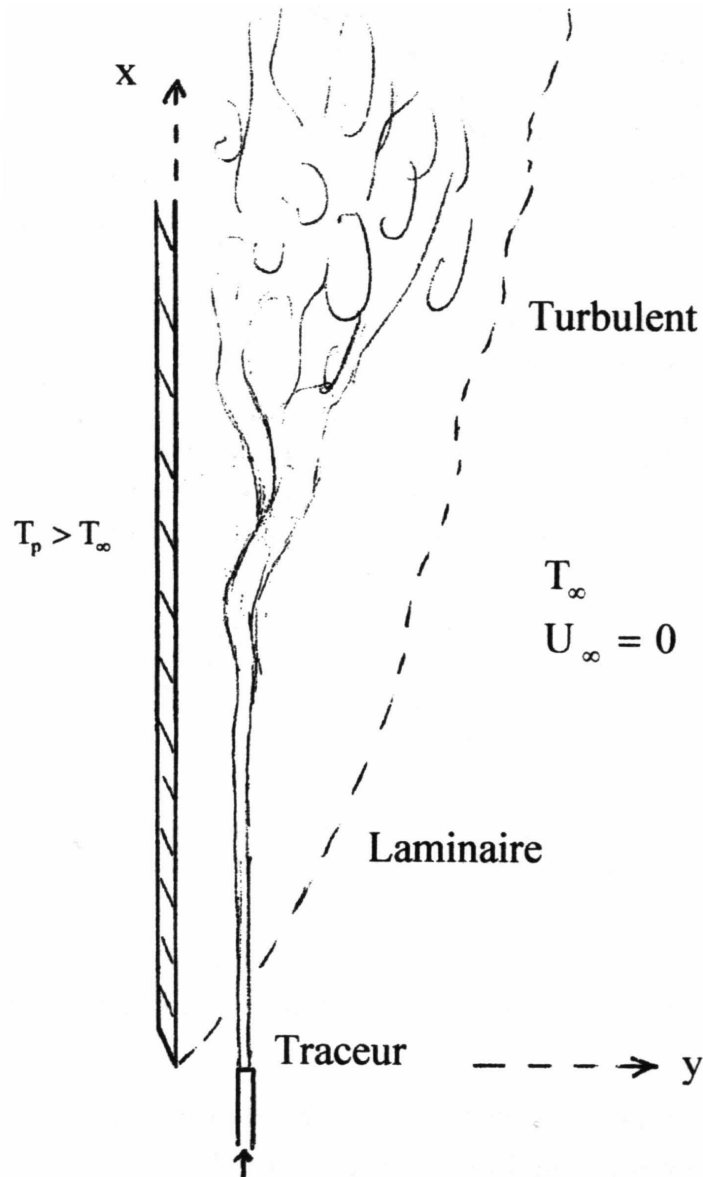


FIG. 5.1 - Visualisation d'un écoulement de convection libre ; plaque plus chaude que le fluide.

Abordons ensuite l'aspect quantitatif en procédant à des mesures de vitesses dans la zone d'écoulement, plus précisément à des mesures de la composante U selon la direction x ascendante. A la paroi, la condition d'adhérence se traduit toujours par $U = 0$. Lorsqu'on s'éloigne de la plaque, il s'avère que U augmente très rapidement : on retrouve le phénomène de couche limite dynamique, lié à la viscosité du fluide, et déjà mis en évidence dans d'autres circonstances.

Mais ensuite apparaît une différence majeure avec les écoulements externes classiques : ici U passe par un maximum U_m puis décroît et tend vers zéro du fait que, au loin, la vitesse U_∞ est nulle, ceci aussi bien dans la zone laminaire que

dans la zone turbulente (où U représente alors une moyenne temporelle) (fig. 5.2). En dehors de la convection naturelle, c'est seulement dans les jets pariétaux qu'on observe ce type de profil.

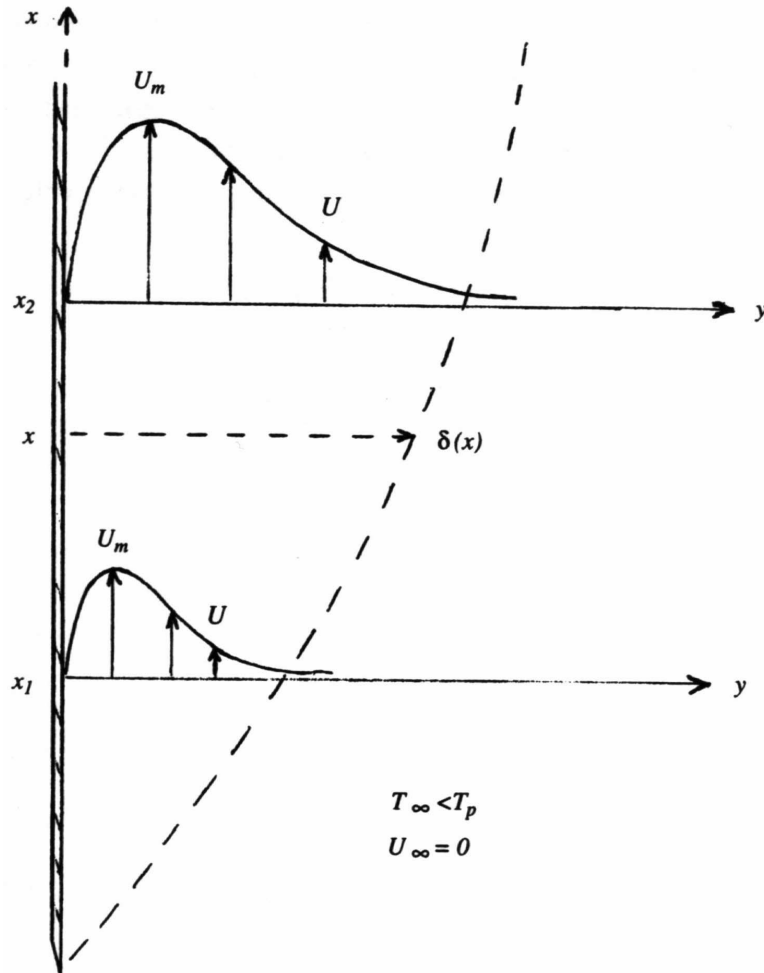


FIG. 5.2 - Profils de vitesse dans un écoulement de convection libre ; $\delta(x)$ épaisseur de couche limite ; $U(\delta) = 0,01 U_m$.

Cependant on retrouve dans l'ensemble de l'écoulement, et pas seulement au voisinage de la paroi, une structure de couche limite en ce sens que les approximations classiques (FEMM, § 4.3) restent valables ici (§ 5.4.1). Par contre, la notion d'épaisseur de couche limite dynamique δ est un peu plus difficile à cerner : comme on ne peut plus se raccrocher à une vitesse de référence mesurée dans le fluide, on est amené à définir δ par rapport au maximum U_m en posant $U(\delta) = 0,01 U_m$. Ceci n'est pas idéal dans la mesure où U_m dépend de x . En plus, les vitesses en convection libre sont faibles, ce qui rend la valeur $0,01 U_m$ bien difficile à mesurer correctement. L'épaisseur de couche limite n'est donc pas un concept très opérationnel en cette circonstance, sauf avec la méthode semi-

intégrale de Karman-Pohlhausen, où cette difficulté trouve partiellement une solution.

Troisième et dernière observation : examinons les profils de température perpendiculairement à la plaque. Ici, pas de nouveauté apparente, les courbes $T(y)$ ont le même aspect qu'en convection forcée : T varie rapidement vers la paroi et tend ensuite asymptotiquement vers T_∞ (fig. 5.3). On reconnaît donc la présence d'une couche limite thermique, dont la caractérisation est inchangée par rapport à la convection forcée, y compris pour son épaisseur δ_T (§ 1.1.1). Mais il subsiste toujours un problème de précision en ce qui concerne la valeur de δ_T .

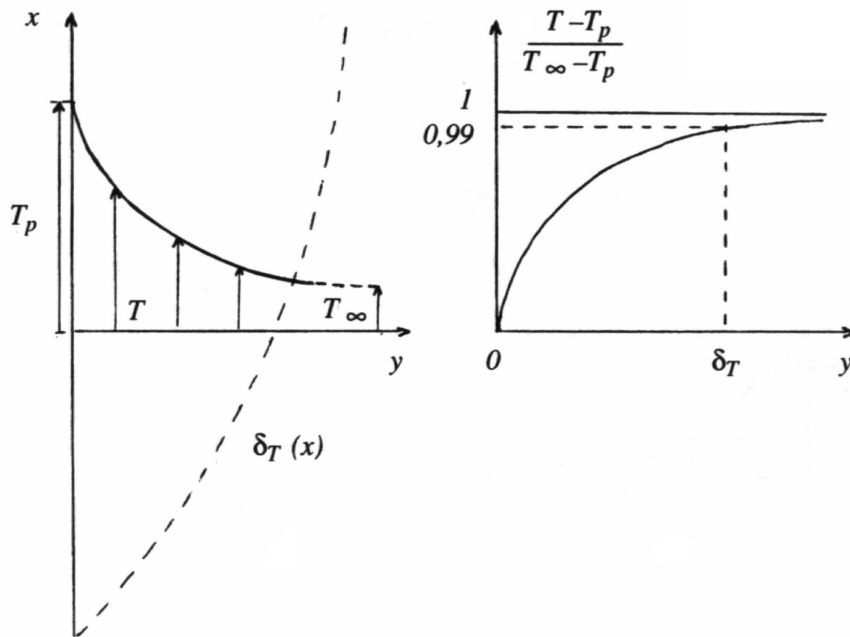


FIG. 5.3 - Couche limite thermique en convection libre : profil de température et profil adimensionné.

Il n'y a rien à modifier dans ce qui précède si la plaque est plus froide que le fluide ($T_p < T_\infty$), sauf à permuter le haut et le bas.

5.4. - CONVECTION LIBRE LAMINAIRE EXTERNE

5.4.1. - Équations de couche limite en écoulement laminaire

Plaçons-nous à présent dans un cadre un peu plus général que celui du paragraphe précédent : on considère toujours une paroi verticale, et un fluide immobile et isotherme au loin ; mais nous n'imposerons pas de restrictions particulières à la température de paroi T_p , qui pourra donc dépendre de x .

Voyons alors ce que deviennent les équations générales 5.2, 5.3 et 5.7, en nous limitant ici à la zone d'écoulement laminaire.

- ♣ Les caractéristiques observées de l'écoulement à proximité de la paroi autorisent à conserver les approximations de la couche limite dynamique (FEMM, § 4.3), à savoir :

$$V \ll U \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (5.8a)$$

Par contre, on prendra garde au fait que $\partial U / \partial x$ n'est pas toujours négligeable devant $\partial U / \partial y$: au voisinage du maximum U_m (fig. 5.2) on a en effet $\partial U / \partial y = 0$ et $\partial U / \partial x \neq 0$. Le même problème se rencontre d'ailleurs dans les jets pariétaux ou dans les zones de décollement.

Quoi qu'il en soit, il résulte de (5.8a) que l'équation de continuité est inchangée, et que dans l'équation de quantité de mouvement selon x , le terme $\partial^2 U / \partial x^2$ disparaît.

- ◆ En ce qui concerne la pression, vu la lenteur de l'écoulement on admettra que les gradients de pression induits par le champ de vitesse sont faibles. Autrement dit, la pression motrice p^* obéit à la loi de la statique, comme dans le fluide au loin, ce qui s'exprime par :

$$\overline{\text{grad}} p^* \approx 0 \quad (5.8b)$$

- ♥ Enfin, dans la couche limite thermique, les approximations (1.4) restent justifiées :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5.8c)$$

ce qui se traduit simplement par la disparition du terme $\partial^2 T / \partial x^2$ dans l'équation d'énergie.

- ♠ Le regroupement des conditions précédentes va nous conduire aux équations de couche limite en convection libre laminaire. Mais préalablement il faut régler un petit problème qui concerne le terme en \vec{g} dans l'équation 5.7 (a ou b).

Si on se trouve dans le cas $T_p > T_\infty$, l'écoulement se fait vers le haut. On choisit alors pour \vec{x} la même direction (fig. 5.4), de sorte que $\vec{g} = -g \vec{x}$ (la pesanteur est dirigé vers le bas !) et le terme en \vec{g} devient $+\beta (T - T_\infty) g$.

Au contraire, avec $T_p < T_\infty$, l'écoulement est descendant, et on préfère encore prendre \vec{x} dans le sens du mouvement. Cette fois $\vec{g} = +g \vec{x}$, et le terme en \vec{g} s'écrit $-\beta (T - T_\infty) g$.

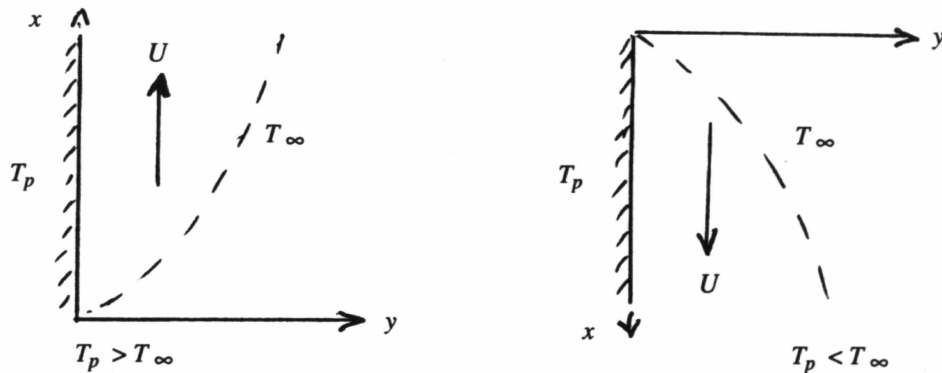


FIG. 5.4 - Plaque plane verticale : choix des coordonnées x et y .

Finalement les équations 5.2, 5.3 et 5.7 deviennent donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\
 U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= \pm g \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\
 &\quad + \text{si direction } x \text{ vers le haut} \\
 &\quad - \text{si direction } x \text{ vers le bas} \\
 U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Rappelons que dans le terme de couplage $g \beta (T - T_\infty)$ la dilatabilité β du fluide est égale à $1/T$ pour un gaz à température T (y compris la vapeur d'eau). Avec les liquides, on se reportera aux tables de données thermophysiques (cf. E.T.). A titre d'exemple, $\beta = 2,06 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ pour l'eau à 20°C , et augmente fortement avec T . Mais quel que soit le fluide, il est recommandé d'évaluer β à T_m (température de mélange) ou T_f (température de film) pour tenir compte partiellement de sa variation avec T .

D'autre part, en ce qui concerne l'alternative \pm dans (5.9), on observera ceci :

- $\triangle z$ - soit x est dirigé vers le haut, et $T > T_\infty$
 - soit x est dirigé vers le bas, et $T < T_\infty$

Donc, en regroupant les deux cas : si x est dirigé dans le sens de l'écoulement alors on a la propriété :

$$\pm g \beta (T - T_\infty) \equiv g \beta |T - T_\infty| > 0 \tag{5.10a}$$

Dans la suite, nous adopterons cette écriture et l'équation de quantité de mouvement se présentera sous la forme :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \beta |T - T_\infty| + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{5.10b}$$

5.4.2. - Formulation adimensionnée et critères de similitude

5.4.2.1. - ÉLÉMENTS SPÉCIFIQUES

A l'instar des autres situations déjà examinées en convection forcée, l'adimensionnement des équations est réalisable de deux façons différentes, selon que certaines grandeurs de référence sont choisies dans l'écoulement ou à la paroi. Mais de surcroît, nous allons voir que la similitude en convection libre présente des aspects particuliers qu'il conviendra de cerner et de traiter avec soin.

Pour ce qui concerne tout d'abord la structure des équations de la couche limite (5.9), il n'y a rien de spécial à signaler sur l'équation de continuité et l'équation d'énergie. En revanche, dans l'équation de quantité de mouvement nous avons un nouveau terme de source volumique qui n'existait pas en convection forcée, à savoir $g \beta (T - T_\infty)$, auquel va devoir être associé un critère de similitude.

Concernant d'autre part la sélection des grandeurs de référence, un problème surgit pour les écoulements externes avec la vitesse V^0 . En convection forcée, il existe un mouvement du fluide indépendamment du champ de température, et il est assez aisé de trouver une vitesse de référence. Mais en convection libre il n'y a pas de mouvement sans gradient de température, de sorte que l'on n'a plus sous la main de vitesse mesurable significative. Il faudra donc chercher un terme, homogène à une vitesse, qui puisse constituer un élément pertinent de référence et puisque l'écoulement est dû au gradient de température et à la dilatibilité du fluide, on regardera préférentiellement de ce côté-là.

Ⓜ Enfin, conformément aux hypothèses (5.1), nous admettrons en première approximation que les paramètres thermophysiques sont sensiblement constants, de sorte que :

$$\rho^+ = \frac{\rho}{\rho^0} = 1$$

et de même :

$$\lambda^+ = 1 ; \mu^+ = 1 ; \nu^+ = 1 ; a^+ = 1 ; \beta^+ = 1 \quad (5.11)$$

En toute rigueur, cette simplification, qui est raisonnable pour ρ , λ et a , peut paraître optimiste pour μ , ν et β car ceux-là varient souvent de façon non négligeable même avec de faibles écarts de température. Mais d'une part ses effets seront partiellement gommés par le choix judicieux d'une température de référence (§ 5.5.4) et d'autre part elle trouvera une justification a posteriori dans le fait que le flux pariétal φ_p varie au plus comme $\mu^{1/2}$, ce qui amortit sérieusement l'effet de la température.

5.4.2.2. - CRITÈRES DE SIMILITUDE RELATIFS AUX SOURCES DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

- ♣ *Relativement aux forces de volume* représentées par le terme $g \beta (T - T_\infty)$ dans (5.9), le critère de similitude Γ_β est dans le cas général le *nombre de Richardson* (cf. FEMM 2.27 et 2.68) :

$$\Gamma_\beta = Ri = \frac{g \beta \Delta T^0 L^0}{(V^0)^2} \quad (5.12a)$$

En écoulement externe, n'ayant pas de vitesse mesurable qui puisse servir de référence, on utilise la relative liberté de choix dont on dispose en prenant :

$$V^0 = (g \beta \Delta T^0 L^0)^{1/2} \quad (5.12b)$$

ce qui est à la fois logique (puisque β et ΔT^0 sont à l'origine du phénomène) et commode puisque Γ_β devient alors, en convection libre :

$$\Gamma_{\beta l} = 1 \quad (5.12c)$$

La valeur adoptée pour V^0 a donc pour effet de satisfaire systématiquement la similitude vis-à-vis de la poussée thermique avec un rapport d'échelle égal à 1.

- ◆ *Relativement aux forces de viscosité*, et avec référence à l'écoulement, le même problème se pose puisque le critère correspondant Γ_ν (FEMM 2.35) s'écrit :

$$\Gamma_\nu = \frac{\nu}{V^0 L^0} \quad (5.13a)$$

et devient dans le cas présent:

$$\Gamma_{\nu l} = \frac{\nu}{(g \beta \Delta T^0)^{1/2} (L^0)^{3/2}} \quad (5.13b)$$

En fait, l'usage a retenu à la place de $\Gamma_{\nu l}$ le *nombre de Grashof* :

$$\boxed{Gr = \frac{1}{\Gamma_{\nu l}^2} = \frac{g \beta \Delta T^0 (L^0)^3}{\nu^2}} \quad (5.14)$$

Ceci n'a d'autre conséquence qu'un changement d'échelle par rapport à $\Gamma_{\nu l}$, et ne dénature pas le concept de *critère de similitude*.

La référence à la paroi est peu utile dans les écoulements externes, le coefficient de frottement étant très faible en convection libre. Enfin la situation sera différente pour un écoulement en canalisation, de type thermosiphon par exemple (Problème 5.1). Dans ce cas il existe une vitesse débitante V_d et on prendra $V^0 = V_d$ comme en convection forcée. De ce fait $\Re = l / \Gamma_\nu$ et C_f seront inchangés.

5.4.2.3. - CRITÈRES DE SIMILITUDE RELATIFS AUX SOURCES DE CHALEUR

Le bilan d'enthalpie (troisième équation 5.9) ne fait apparaître qu'une seule source, de nature surfacique, à savoir la diffusion thermique. La structure des critères de similitude associés reste donc la même qu'en convection forcée. Cependant, s'agissant d'écoulements externes, le choix de la vitesse de référence (5.12b) va se répercuter dans leurs expressions, qui se modifient ainsi (FEMM, 2.53) :

♣ Avec référence aux scalaires, $\Gamma_a = a/V^0 L^0$ (inverse du nombre de Péclet) devient :

$$\Gamma_{al} = \frac{a}{(g \beta \Delta T^0)^{1/2} (L^0)^{3/2}} \tag{5.15a}$$

Il se trouve qu'une présentation un peu différente en a été adoptée (encore que rarement) sous la désignation de "nombre de Boussinesq" Bo :

$$Bo = \frac{1}{\Gamma_{al}^2} = \frac{g \beta \Delta T^0 (L^0)^3}{a^2} \tag{5.15b}$$

la démarche ayant la même source d'inspiration que pour le nombre de Grashof (5.14). Ceci n'est pas très grave puisque Bo reste un critère de similitude, le changement ne portant que sur l'échelle.

Par contre, un usage ancien et beaucoup plus répandu remplace le nombre de Boussinesq par le "nombre de Rayleigh" Ra :

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T^0 (L^0)^3}{\nu a} \tag{5.16a}$$

Celui-ci n'est pas un critère de similitude, car il n'apparaît pas comme tel dans les équations adimensionnées.

Il se relie à Γ_{al} par :

$$Ra = \frac{1}{\Gamma_{al}^2 Pr} = Gr Pr \tag{5.16b}$$



Ce serait donc une procédure incorrecte de baser une étude de similitude sur le nombre de Rayleigh puisque la présence de Pr dans la formule précédente viendra la fausser (sauf évidemment pour $Pr \approx 1$).

Nous observerons enfin que :

$$Bo = Ra Pr = Gr Pr^2 \tag{5.17}$$

- ◆ Avec référence aux gradients, Γ_ϕ (qui est aussi le nombre de Stanton St , voir 1.15b) est remplacé par $\Gamma_{\phi l}$ (FEMM, 2.53b) :

$$\Gamma_{\phi l} = \frac{\varphi_p}{\rho C_p (g \beta L^0)^{1/2} (\Delta T^0)^{3/2}} \quad (5.18a)$$

Dans la pratique, on se sert du *nombre de Nusselt* :

$$Nu = \frac{\varphi_p L^0}{\lambda \Delta T^0} = \frac{\Gamma_{\phi l}}{\Gamma_{al}} \quad (5.18b)$$

△ dont nous avons déjà dit qu'il n'est pas un critère de similitude. En fait, dans l'usage courant il est plutôt utilisé pour le calcul de h que par référence à la similitude. Prenons garde quand même à toute tentation qui tendrait à en faire autre chose qu'un simple intermédiaire.

Enfin, s'il en est besoin, $\Gamma_{\phi l}$ sera évalué à partir de (5.18b) et (5.16b) :

$$\Gamma_{\phi l} = Nu \Gamma_{al} = \frac{Nu}{Gr^{1/2} Pr} \quad (5.19)$$

- ♥ *La transition laminaire-turbulent*, qui est un phénomène de nature dynamique, est logiquement gouvernée par le nombre de Grashof, représentant dans l'équation de quantité de mouvement le critère de similitude relatif aux forces de viscosité (ce en quoi il joue le même rôle que \Re en convection forcée), et non par le nombre de Boussinesq, qui est un critère de similitude thermique (et encore moins par celui de Rayleigh, cf. § ♣).

Toutefois, la difficulté de prendre en compte tous les paramètres significatifs dans l'expression des grandeurs conduit à un certain étalement dans les valeurs du nombre de Grashof critique. Pour une paroi verticale, on peut considérer que la condition d'écoulement laminaire est :

$$Gr \lesssim 10^9$$

5.4.2.4. - APPLICATION À LA PLAQUE PLANE VERTICALE : ÉQUATIONS ADIMENSIONNÉES

Pour écrire les équations adimensionnées de la couche limite, on adopte la même procédure qu'en convection forcée (voir § 1.1.3). Les critères de similitude ont donc également une signification *locale* et s'écrivent :

$$Gr_L = \frac{g \beta |T_\infty - T_p| L^3}{\nu^2} \quad (5.20a)$$

$$Bo_L = \frac{g \beta |T_\infty - T_p| L^3}{a^2} \quad (5.20b)$$

la longueur L étant souvent écrite x .

Par ailleurs, en ce qui concerne la température réduite, on préfère utiliser une définition légèrement différente de (1.7c), qui représente non plus l'écart relatif de température T^+ par rapport à la paroi, mais l'écart relatif Θ par rapport à l'ambiance T_∞ , à savoir :

$$\Theta = \frac{|T - T_\infty|}{|T_p - T_\infty|} \equiv \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} \quad (0 \leq \Theta \leq 1) \quad (5.20c)$$

ce qui est justifié par la présence de $T - T_\infty$ dans l'équation de quantité de mouvement (5.9).

En reprenant la démarche détaillée au chapitre 1 pour introduire les grandeurs sans dimension dans les équations de la couche limite, le système (5.9) devient, avec les hypothèses (5.11) et la convention (5.10) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U^+}{\partial x^+} + \frac{\partial V^+}{\partial y^+} = 0 \\ & U^+ \frac{\partial U^+}{\partial x^+} + V^+ \frac{\partial U^+}{\partial y^+} = \Theta + \frac{1}{Gr_L^{1/2}} \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^{+2}} \\ & \quad \text{(axe } x \text{ dans le sens de l'écoulement)} \\ & U^+ \frac{\partial \Theta}{\partial x^+} + V^+ \frac{\partial \Theta}{\partial y^+} = \frac{1}{Bo_L^{1/2}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^{+2}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

A titre d'exemple, si l'on considère de l'air avec $T_\infty = 20^\circ C$ et $T_p = 35^\circ C$, à une abscisse $L = 10 \text{ cm}$ on trouve $Gr_L \approx 2,2 \cdot 10^6$, c'est à dire qu'on se trouve encore dans la zone laminaire.

5.4.2.5. - PAROI SOUMISE À UN FLUX IMPOSÉ

Dans les cas où la densité de flux φ_p est imposée à la paroi, il peut être intéressant de construire la température adimensionnée à partir de φ_p (puisque la température T_p n'est pas une donnée du problème) en remplaçant $\Delta T^0 = |T_p - T_\infty|$ par :

$$\Delta T^{0*} = \frac{\varphi_p L}{\lambda}$$

(voir pour plus de détails le paragraphe 5.5.3.4).

5.5. - ADAPTATION DE LA MÉTHODE DES SOLUTIONS AFFINES À LA CONVECTION LIBRE

5.5.1. - Structure logique de la théorie

La recherche des solutions du système (5.9) ou (5.21) est conduite selon trois directions privilégiées : résolution numérique directe, méthode de Blasius généralisée ou mise en œuvre d'équations intégrales différentielles résolubles par une méthode de type Karman-Pohlhausen.

Extension de la démarche initiale de Blasius, la technique des solutions affines possède une certaine élégance, en plus de quelques avantages spécifiques, et nous allons la détailler maintenant. A cette occasion, il n'est pas sans intérêt de revenir sur sa logique interne, pour mieux la dégager et l'approfondir.

La stratégie suivie repose sur deux conjectures :

- ♣ *Existence d'une fonction de courant ψ telle que :*

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.22)$$

ce qui a pour effet de nous débarrasser de l'équation de continuité qui se trouve identiquement vérifiée (FEMM § 4.4.1), et de remplacer les deux fonctions inconnues U et V par une seule (nous verrons tout à l'heure laquelle).

- ◆ *Existence d'une similitude des profils de vitesse et de température.* Les données expérimentales montrent que à des abscisses différentes, les profils de vitesse U manifestent un certain air de famille, ainsi que les courbes de température (fig. 5.2 et 5.3). Il en va de même pour les grandeurs réduites U^+ et Θ . Comme une éventuelle similitude sera plus aisée à mettre en évidence avec un nombre minimal de paramètres, nous chercherons plutôt à l'appuyer sur U^+ et Θ .

Considérons deux points de coordonnées $(x_1, y_1 = \eta x_1)$ et $(x_2, y_2 = \eta x_2)$. Ils sont donc tels que $y_1/x_1 = y_2/x_2 = \eta$.

Il y aurait similitude au sens classique du terme si l'on avait, par exemple pour la vitesse :

$$U^+(x_1, \eta x_1) = U^+(x_2, \eta x_2)$$

ce qui revient à dire que :

$$U^+ = U^+\left(\eta = \frac{y}{x}\right)$$

Mais les données expérimentales montrent que ceci n'est pas vrai, et le calcul confirme l'absence de solutions de cette forme.

⚠ Nous sommes alors conduits à conjecturer l'existence d'une similitude moins rudimentaire, qui serait vérifiée non pas dans l'espace physique $\{x, y\}$, mais dans un espace affine $\{X(x), y\}$.

Autrement dit :

Existe-t-il une transformation des coordonnées

$$x \rightarrow X(x)$$

$$y \rightarrow y$$

telle que l'on ait simultanément :

$$U^+ = U^+ \left(\eta = \frac{y}{X(x)} \right) ; \quad \Theta = \Theta(\eta) \quad (5.23)$$

En introduisant la condition (5.23) dans les équations et en écrivant la condition d'existence de la transformation affine (i.e. coefficients constants, indépendants de x) on obtient alors la forme analytique de $X(x)$.

D'autre part, l'unicité de la solution a été démontrée pour les équations de la couche limite laminaire.

En conséquence, si les équations de départ sont correctes et s'il existe une solution de la forme cherchée, elle coïncide nécessairement avec la solution physique.

A cette stratégie s'ajoute enfin un élément tactique. Pour des raisons de commodité, l'inconnue dynamique ne sera ni la fonction de courant ψ ni la vitesse réduite $U^+ = f(\eta)$, mais la primitive $F(\eta)$ de $f(\eta)$.

5.5.2. - Mise en œuvre : plaque plane verticale isotherme

5.5.2.1. - FORMULATION DES ÉQUATIONS

Appliquons le schéma précédent au cas le plus simple, en choisissant une paroi verticale et :

$$\textcircled{H} \quad T_p = cte \quad ; \quad T_\infty = cte$$

Nous recherchons donc des solutions de la forme suivante :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ; \quad \frac{U}{V^0} = f(\eta) \quad (5.24a)$$

$$\Theta = \frac{|T - T_\infty|}{\Delta T^0} = \Theta(\eta) \quad \left[\equiv \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} \right] \quad (5.24b)$$

avec :

$$\eta = \frac{y}{X(x)} \quad ; \quad V^0 = \sqrt{g \beta \Delta T^0} \quad x = V^0(x) \quad ; \quad \Delta T^0 = |T_p - T_\infty| \quad (5.24c)$$

V^0 étant ici une vitesse de référence locale, conforme à (5.12b).

- ♣ Or, on rencontre des données tout à fait analogues dans la méthode de Falkner-Skan (FEMM, § 4.5.1) qui permet de traiter la couche limite dynamique laminaire en présence d'un écoulement extérieur de vitesse $U_\infty(x)$ variable : dans cette méthode on prend $V^0 = U_\infty(x)$ alors qu'ici nous avons pour V^0 l'expression (5.24c).

Le démarrage du calcul est donc identique. C'est ainsi que en remplaçant U_∞ par V^0 et en posant :

$$f(\eta) = \frac{dF}{d\eta} = F'(\eta) \quad (5.24d)$$

soit :

$$U = V^0 F'(\eta) = \sqrt{g \beta \Delta T^0 x} F'(\eta) \quad (5.24e)$$

on obtient pour la fonction de courant (FEMM 4.23c) :

$$\psi = V^0(x) X(x) F(\eta) \quad (5.25)$$

De là, on tire les différents termes qui interviennent dans les équations (5.9), en premier lieu la composante V de la vitesse :

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -F(\eta) \frac{d(V^0 X)}{dx} - V^0 X \frac{dF}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= -F X \frac{dV^0}{dx} - F V^0 \frac{dX}{dx} - V^0 X F' \left(-\frac{y}{X^2} \right) \frac{dX}{dx} \\ V &= -F X \frac{dV^0}{dx} + V^0 \frac{dX}{dx} (\eta F' - F) \end{aligned} \quad (5.26)$$

puis la kyrielle des dérivées :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dV^0}{dx} F' - V^0 F'' \frac{\eta}{x} \frac{dX}{dx} \quad (5.27a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = V^0 \frac{F''}{X} \quad (5.27b)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = V^0 \frac{F'''}{X^2} \quad (5.27c)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{d\Theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\Theta'}{X} \quad (5.28a)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = \frac{\Theta''}{X^2} \quad (5.28b)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{d\Theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\Theta' \frac{\eta}{X} \frac{dX}{dx} \quad (5.28c)$$

⚠ Précisons bien au passage que dans tout ce calcul (comme au chapitre 1), on désigne par « ' » la dérivation par rapport à η .

Reportons d'abord dans la deuxième équation (5.9) (quantité de mouvement). Il vient, en adoptant la convention (5.10) :

$$\begin{aligned} & V^0 F' \left(\frac{dV^0}{dx} F' - V^0 F'' \frac{\eta}{X} \frac{dX}{dx} \right) + \left\{ -FX \frac{dV^0}{dx} + V^0 \frac{dX}{dx} (\eta F' - F) \right\} \frac{V^0 F''}{X} \\ &= g \beta \Theta \Delta T^0 + \nu \frac{V^0 F'''}{X^2} \end{aligned}$$

Ceci donne après regroupement des termes et simplification :

$$V^0 \frac{dV^0}{dx} (F'^2 - FF'') - V^{02} FF'' \frac{1}{X} \frac{dX}{dx} = g \beta \Theta \Delta T^0 + \nu \frac{V^0 F'''}{X^2} \quad (5.29a)$$

Une condition nécessaire pour que la similitude soit réalisée au sens de (5.23) est que les coefficients soient indépendants de x ; alors (5.29a) se présentera comme une équation différentielle à coefficients constants, la solution F ne dépendant que de la variable η . On doit donc avoir en particulier, pour le premier terme :

$$V^0 \frac{dV^0}{dx} = cte \quad , \quad \text{soit} \quad V^0 \approx \sqrt{x} \quad (5.29b)$$

Cette condition est parfaitement compatible avec l'expression (5.24c) que nous allons donc conserver :

$$V^0 = \sqrt{g \beta \Delta T^0 x}$$

d'où :

$$\frac{dV^0}{dx} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g \beta \Delta T^0}{x}} \quad \text{et} \quad V^0 \frac{dV^0}{dx} = \frac{1}{2} g \beta \Delta T^0 \quad (5.29c)$$

L'équation (5.29a) devient alors :

$$\frac{1}{2} (F'^2 - FF'') - \frac{x}{X} \frac{dX}{dx} FF'' = \Theta + \frac{\nu}{\sqrt{g \beta \Delta T^0}} \frac{\sqrt{x}}{X^2} F''' \quad (5.29d)$$

Le premier coefficient est bien constant. Il nous reste maintenant à obtenir *simultanément* :

$$\frac{\sqrt{x}}{X^2} = C_1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{X} \frac{dX}{dx} = C_2 \quad (5.30)$$

De la première condition, on tire :

$$X^2 \approx \sqrt{x} \quad \text{soit} \quad X \approx x^{1/4}$$

et alors la seconde condition se trouve vérifiée puisque :

$$\frac{x}{X} \frac{dX}{dx} \approx \frac{x}{x^{1/4}} \frac{1}{x^{3/4}} \approx cte$$

Il y a donc compatibilité des deux conditions (5.30). Autrement dit il existe une transformation $x \rightarrow X(x)$ qui les satisfait. Toutefois l'une des deux constantes C_1 ou C_2 est arbitraire, et plusieurs choix ont été opérés dans la littérature. Nous prendrons ici, pour avoir le coefficient 1 devant le terme F''' :

$$\frac{\nu}{\sqrt{g \beta \Delta T^0}} \frac{\sqrt{x}}{X^2} = 1 \quad (5.31a)$$

d'où l'expression de X :

$$X = \left(\frac{\nu^2 x}{g \beta \Delta T^0} \right)^{1/4} \quad (5.31b)$$

On en déduit la constante C_2 :

$$C_2 = \frac{x}{X} \frac{dX}{dx} = \frac{1}{4} \quad (5.31c)$$

La forme finale de l'équation de quantité de mouvement (5.29d) est donc :

$$\frac{1}{2}(F'^2 - FF'') - \frac{1}{4}FF'' = \Theta + F'''$$

c'est à dire encore :

$$F''' - \frac{1}{2}F'^2 + \frac{3}{4}FF'' + \Theta = 0 \quad (5.31d)$$

De X on passe à η

$$\eta = \frac{y}{X} = y \left(\frac{g \beta \Delta T^0}{\nu^2 x} \right)^{1/4} \quad (5.32a)$$

que l'on écrit parfois:

$$\frac{y}{x} \left(\frac{g \beta \Delta T^0 x^3}{\nu^2} \right)^{1/4}$$

soit:

$$\eta = \frac{y}{x} Gr_x^{1/4} \quad (5.32b)$$

- ◆ Mais compte tenu du fait que les équations de la couche limite sont couplées en convection libre, il nous faudra encore vérifier que les coefficients de l'équation d'énergie sont des constantes pour confirmer que la transformation $x \rightarrow X(x)$ assure bien la similitude. Passons donc à la troisième équation (5.9) qui devient, en remplaçant y par ηX :

$$\begin{aligned} & V^0 F' \left(-\Theta' \frac{\eta}{X} \frac{dX}{dx} \right) \Delta T^0 + \left\{ -FX \frac{dV^0}{dx} + V^0 \frac{dX}{dx} (\eta F' - F) \right\} \frac{\Theta'}{X} \Delta T^0 \\ & = a \frac{\Theta''}{X^2} \Delta T^0 \end{aligned} \quad (5.32c)$$

Après avoir développé et simplifié, on obtient :

$$F \frac{dV^0}{dx} \Theta' + V^0 \frac{1}{X} \frac{dX}{dx} F \Theta' + a \frac{\Theta''}{X^2} = 0 \quad (5.32d)$$

Puis, en remplaçant V^0 par (5.24c) et X par (5.31b) on constate que la variable x disparaît par simplification (ainsi d'ailleurs que $\sqrt{g \beta \Delta T^0}$), et il reste une équation à coefficients constants :

$$\frac{3}{4} F \Theta' + \frac{a}{\nu} \Theta'' = 0$$

que nous écrirons de préférence :

$$\boxed{\Theta'' + \frac{3}{4} Pr F \Theta' = 0} \quad (5.33)$$

- ♥ En résumé, nous avons obtenu un système couplé de deux équations différentielles à coefficients constants, dont les solutions $F(\eta)$ et $\Theta(\eta)$ ne dépendent que de η et présentent donc les qualités de similitude requises au départ. Ces deux équations (5.31d) et (5.33) sont réécrites ci-dessous :

$$\boxed{\begin{aligned} F''' - \frac{1}{2} F'^2 + \frac{3}{4} FF'' + \Theta &= 0 \\ (\text{axe } x \text{ dans le sens du déplacement}) & \\ \Theta'' + \frac{3}{4} Pr F \Theta' &= 0 \end{aligned}} \quad (5.34)$$

- ♠ Quelques remarques compléteront ce développement.

Nous constatons d'abord, pour faire suite aux dernières lignes du paragraphe 5.5.1, que c'est finalement $F(\eta)$ qui joue naturellement le rôle d'inconnue dynamique.

D'autre part on trouve dans la littérature des variantes du système (5.34) avec des coefficients différents, et de même pour V^0 et X . Cela tient au choix effectué pour les valeurs numériques des coefficients dans l'équation (5.29d). Ainsi, Incropera, Sacadura, Kakaç prennent :

$$V^0 = 2 \sqrt{g \beta \Delta T^0 x} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4}$$

tandis que Cebeci et Bradshaw retiennent les valeurs utilisées ici.

Enfin, la présentation est souvent inversée en postulant au départ que $\eta = cte \times \frac{y}{x} (Gr_x)^{1/4}$, ce qui est peut-être plus rapide mais ne trouve sa justification que a posteriori.

Il reste maintenant à étudier les solutions des équations (5.34).

5.5.2.2. - RÉSOLUTION

- ♣ Le système (5.34) n'a malheureusement pas de solutions analytiques mais sa résolution numérique ne présente pas de difficultés, et l'existence de solutions constitue la validation finale de la démarche entreprise. Celles-ci dépendent en outre de Pr , présent dans la seconde équation.

⚠ Les paramètres physiques les plus intéressants sont la composante U de la vitesse (5.24e) et la température (5.20c, 5.24b) :

$$U = \sqrt{g \beta |T_p - T_\infty| x} F'(\eta, Pr) \quad (5.35a)$$

$$T - T_\infty = \Theta(\eta, Pr) (T_p - T_\infty) \quad (5.35b)$$

Ils font donc appel à $F'(\eta, Pr)$ et $\Theta(\eta, Pr)$, pour lesquels des abaques sont donnés fig. 5.5 et fig. 5.6, les conditions aux limites prises en compte étant les suivantes :

- A la paroi : $\eta = 0$. D'après (5.24e) et (5.26) on a :

$$U = 0 \Rightarrow F'(0) = 0$$

$$V = 0 \Rightarrow F(0) = 0$$

et $T = T_p \Rightarrow \Theta(0) = 1$, selon (5.24b)

- Au loin : $\eta \rightarrow \infty$

$$U = 0 \Rightarrow F'(\infty) = 0$$

$$T = T_\infty \Rightarrow \Theta(\infty) = 0$$

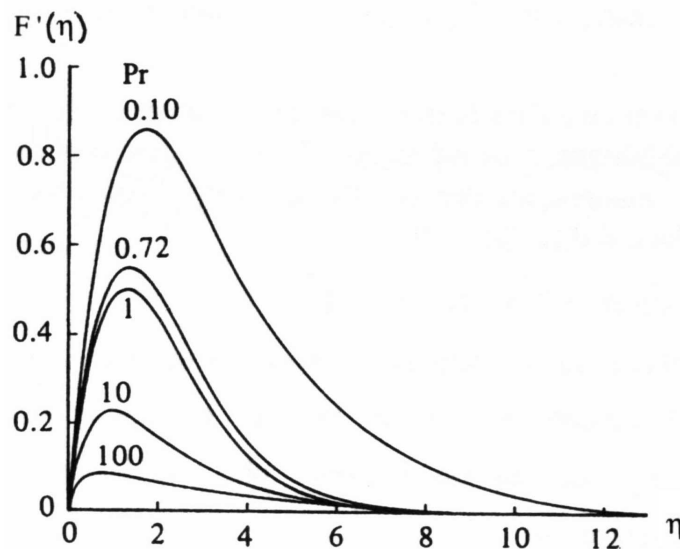


FIG. 5.5 - Profils de vitesse adimensionnée en convection libre laminaire sur une plaque verticale à température uniforme.

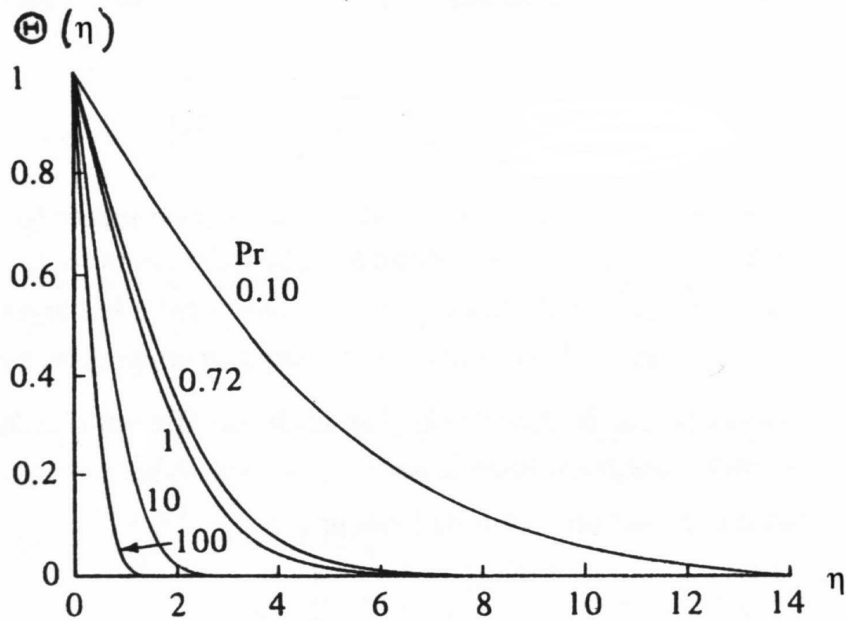


FIG. 5.6 - Convection libre laminaire sur une plaque verticale à température uniforme : profils de température adimensionnée.

- ◆ Le flux pariétal local (ou densité de flux) est un autre paramètre essentiel, mais il se déduit de la température et s'écrit algébriquement :

$$\varphi_{p,x} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\lambda (T_p - T_\infty) \left(\frac{d\Theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{\eta=0}$$

soit d'après (5.32a) :

$$\varphi_{p,x} = -\lambda (T_p - T_\infty) \Theta'(0) \left(\frac{g \beta |T_p - T_\infty|}{\nu^2 x} \right)^{1/4} \quad (5.36)$$

La dérivée $\Theta'(0)$ a été tabulée en fonction de η , mais il est plus commode d'utiliser un ajustement analytique, tel celui qui a été proposé par Ede :

$$\Theta'(0) = -\frac{3}{4} \left\{ \frac{2 Pr^2}{5(1 + 2 Pr^{1/2} + 2 Pr)} \right\}^{1/4} \quad 0,1 \lesssim Pr \lesssim 100 \quad (5.37)$$

(compte tenu de la définition de Θ , la dérivée Θ' est négative).

Si l'on préfère une présentation adimensionnée, le nombre de Nusselt local (5.18b) s'écrira (en valeur absolue, et avec les réserves formulées au § 5.4.2.3 ◆) :

$$Nu_x = \frac{|\varphi_{p,x}| x}{\Delta T^0 \lambda} = -\Theta'(0) Gr_x^{1/4} \quad (5.38a)$$

c'est à dire :

$$Nu_x = \frac{3}{4} \left\{ \frac{2 Pr^2 Gr_x}{5(1 + 2 Pr^{1/2} + 2 Pr)} \right\}^{1/4} \quad (5.38b)$$

Quant au coefficient local d'échange $h_x = \lambda Nu_x / x$, il se calculera par la formule :

$$h_x = \frac{3\lambda}{4} \left\{ \frac{2Pr^2}{5(1+2Pr^{1/2}+2Pr)} \right\}^{1/4} \left(\frac{g\beta|T_p-T_\infty|}{\nu^2 x} \right)^{1/4} \quad (5.39)$$

et nous observons que, contrairement au cas de la convection forcée (§ 1.2.2), h_x dépend ici des conditions aux limites thermiques, puisqu'il contient $T_p - T_\infty$. Bien que cette dépendance soit faible du fait que $T_p - T_\infty$ intervient à la puissance $1/4$, elle limite l'intérêt du concept de coefficient d'échange en convection libre.

♥ Les *valeurs moyennes* de la densité de flux et du coefficient d'échange sont bien souvent plus utiles que les valeurs locales.

Soit φ_p le flux moyen sur une paroi de hauteur L :

$$\varphi_p = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_{px} = cte \times \frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx}{x^{1/4}} = cte \times \frac{4}{3} \frac{1}{L^{1/4}}$$

c'est à dire en explicitant la constante (formule 5.36) :

$$\varphi_p = -\frac{4}{3} \lambda (T_p - T_\infty) \Theta'(0) \left(\frac{g\beta|T_p-T_\infty|}{\nu^2 L} \right)^{1/4} \quad (5.40a)$$

Pour le coefficient d'échange moyen, d'après (5.39) :

$$h = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx = \lambda \left\{ \frac{2Pr^2}{5(1+2Pr^{1/2}+2Pr)} \right\}^{1/4} \left(\frac{g\beta|T_p-T_\infty|}{\nu^2 L} \right)^{1/4} \quad (5.40b)$$

soit :

$$h = \frac{4}{3} h_L \quad (5.40c)$$

et enfin pour Nu moyen :

$$Nu = \left\{ \frac{2Pr^2 Gr_L}{5(1+2Pr^{1/2}+2Pr)} \right\}^{1/4} = \frac{4}{3} Nu_L \quad (5.40d)$$

On voit en particulier que φ_p et h sont proportionnels à $L^{-1/4}$ (ou $x^{-1/4}$ localement) et varient donc plus faiblement qu'en convection forcée, où l'on trouve une loi en $L^{-1/2}$ (formule 1.36).

5.5.3. - Paroi verticale avec flux imposé uniforme

5.5.3.1. - CADRE GÉNÉRAL

Le cas du flux imposé constitue une intéressante illustration de la capacité d'extension que recèle la méthode différentielle. Dans son esprit, la démarche n'est pas différente de celle qui a été suivie en convection forcée (§ 1.2.4) mais

elle se trouve un peu compliquée par le couplage entre champ dynamique et champ thermique.

Par rapport au cas précédent (§ 5.5.2) nous avons maintenant $T_p = T_p(x)$, et il paraît difficile de conserver une référence $\Delta T^0 = cte$, ce qui sera d'ailleurs confirmé par la suite. Admettons donc :

$$\Delta T^0 = \Delta T^0(x)$$

Cette innovation ne change rien a priori pour la vitesse de référence V^0 , qui était déjà dépendante de x (formule 5.24c). Nous garderons donc, à l'essai :

$$V^0 = V^0(x)$$

La question est la suivante : à quelles conditions peut-on conserver une structure affine, c'est à dire avoir des solutions telles que :

$$\Theta = \frac{T(x, y) - T_\infty}{\Delta T^0(x)} = \Theta(\eta) \quad (5.41a)$$

$$\frac{U}{V^0} = f(\eta) = F'(\eta) \quad (5.41b)$$

avec :

$$\eta = \frac{y}{X(x)} \quad (5.41c)$$

5.5.3.2. - MISE EN OEUVRE DE LA MÉTHODE

- ♣ Commençons par l'équation dynamique (5.29a) qui reste valide jusqu'ici, et adimensionnons-la en divisant par $g \beta \Delta T^0$.

Cela donne :

$$\begin{aligned} & \frac{V^0}{g \beta \Delta T^0} \frac{dV^0}{dx} (F'^2 - FF'') - \frac{V^{02}}{g \beta \Delta T^0} \frac{1}{X} \frac{dX}{dx} FF'' \\ & = \Theta + \frac{V V^0}{g \beta \Delta T^0 X^2} F''' \end{aligned}$$

relation que nous écrirons :

$$A(F'^2 - FF'') - B FF'' = \Theta + C F''' \quad (5.42)$$

Une condition nécessaire pour avoir des solutions affines est que :

$$A = cte \quad ; \quad B = cte \quad ; \quad C = cte$$

Puisque ΔT^0 est supposé dépendre de x , A a pour expression :

$$A = \frac{V^0}{g \beta \Delta T^0} \frac{dV^0}{dx}$$

$$= \frac{(g \beta \Delta T^0 x)^{1/2}}{g \beta \Delta T^0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(g \beta \Delta T^0)^{1/2}}{x^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{(g \beta x)^{1/2}}{(\Delta T^0)^{1/2}} \frac{d \Delta T^0}{d x} \right\}$$

soit :

$$A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\Delta T^0} \frac{d \Delta T^0}{d x} \right) \quad (5.43)$$

La condition $A = cte$ entraîne donc :

$$\frac{x}{\Delta T^0} \frac{d \Delta T^0}{d x} = cte$$

c'est à dire :

$$\Delta T^0 = D x^m \quad (5.44)$$

où D et m sont des constantes.

Il en résulte que :

$$V^0 = (g \beta D x^{m+1})^{1/2} \quad (5.45)$$

d'où en revenant à (5.43) :

$$A = \frac{1+m}{2} \quad (5.46)$$

On peut maintenant déterminer X , par exemple à partir du coefficient C de (5.42) :

$$C = \frac{\nu V^0}{g \beta \Delta T^0 X^2} = \frac{\nu}{g \beta} \frac{(g \beta D x^{m+1})^{1/2}}{D x^m X^2} = cte \quad (5.47)$$

$$X = \left(\frac{\nu^2}{C^2 g \beta D} \right)^{1/4} x^{\frac{1-m}{4}} \quad (5.48)$$

La troisième exigence est : $B = cte$. D'après (5.42) :

$$B = \frac{V^{02}}{g \beta \Delta T^0} \frac{1}{X} \frac{d X}{d x} \quad (5.49a)$$

On trouve en remplaçant V^0 , ΔT^0 et X :

$$B = \frac{1-m}{4} \quad (5.49b)$$

La condition de similitude est donc vérifiée $\forall m$. Toutefois, dans l'exemple qui nous occupe, m n'est pas arbitraire car il est en relation avec le flux φ_p . En valeur absolue :

$$\varphi_p = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = cte$$

soit avec la définition (5.41a) de Θ :

$$\varphi_p = \lambda \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda \Delta T^0 \Theta'(0) \frac{1}{X} \quad (5.50)$$

On a donc :

$$\frac{\Delta T^0}{x} = cte$$

ou en ne considérant que les termes en x :

$$\frac{x^m}{x^{\frac{1-m}{4}}} = x^{\frac{5m-1}{4}} = cte$$

relation satisfaite si :

$$\boxed{m = \frac{1}{5}} \quad (5.51)$$

ce qui donne dans (5.50), avec les formulations complètes de ΔT^0 et de X :

$$\varphi_p = \lambda D \Theta'(0) \left(\frac{C^2 g \beta D}{v^2} \right)^{1/4}$$

Cette relation fait intervenir trois constantes : C , D et $\Theta'(0)$. On peut donc en choisir deux. Le plus simple est de prendre :

$$C = 1 \quad ; \quad \Theta'(0) = 1 \quad (5.52)$$

dont le report dans l'expression de φ_p détermine D :

$$D = \left(\frac{\varphi_p}{\lambda} \right)^{4/5} \left(\frac{v^2}{g \beta} \right)^{1/5} \quad (5.53)$$

Ceci nous conduit aux formules définitives de ΔT^0 , V^0 et X .

De (5.44) et (5.51), nous tirons :

$$\boxed{\Delta T^0 = \left(\frac{\varphi_p}{\lambda} \right)^{4/5} \left(\frac{v^2 x}{g \beta} \right)^{1/5}} \quad (5.54)$$

Ensuite, avec (5.45), en regroupant les termes :

$$\boxed{V^0 = \left(\frac{g \beta \varphi_p}{\lambda} \right)^{2/5} v^{1/5} x^{3/5}} \quad (5.55)$$

Puis, à la suite de (5.48) :

$$\boxed{X = \left(\frac{\lambda v^2 x}{g \beta \varphi_p} \right)^{1/5}} \quad (5.56)$$

Les coefficients (5.46), (5.49b) et (5.52) de l'équation dynamique sont donc :

$$A = \frac{1+m}{2} = \frac{3}{5} \quad ; \quad B = \frac{1-m}{4} = \frac{1}{5} \quad ; \quad C = 1 \quad (5.57)$$

Enfin, l'équation de quantité de mouvement (5.42) devient :

$$\boxed{F''' - \frac{3}{5} F'^2 + \frac{4}{5} FF'' + \Theta = 0} \quad (5.58)$$

Rappelons que dans cette équation (voir 5.56) :

$$F = F(\eta) \quad ; \quad \eta = \frac{y}{X(x)} = \frac{y}{x^{1/5}} \left(\frac{g \beta \varphi_p}{\lambda \nu^2} \right)^{1/5} \quad (5.59)$$

- ◆ Nous devons à présent procéder de même avec l'équation d'énergie. Revenons pour cela à (5.9) :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5.60a)$$

Les expressions de U , V , $\partial T / \partial y$, $\partial^2 T / \partial y^2$ ont déjà été établies (5.24 à 5.28), mais il faut reprendre $\partial T / \partial x$ puisque maintenant ΔT^0 est fonction de x :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial(\Theta \Delta T^0)}{\partial x} = -\Delta T^0 \Theta' \frac{\eta}{X} \frac{dX}{dx} + \Theta \frac{d\Delta T^0}{dx} \quad (5.60b)$$

Le remplacement des grandeurs ci-dessus dans (5.60a) donne après regroupement des termes :

$$-V^0 F' \Theta \frac{1}{\Delta T^0} \frac{d\Delta T^0}{dx} + \left(\frac{dV^0}{dx} + \frac{V^0}{X} \frac{dX}{dx} \right) F \Theta' + a \frac{\Theta''}{X^2} = 0$$

Multiplions par X^2 / a pour avoir le coefficient 1 devant Θ'' . Il ne reste alors que deux coefficients à étudier :

$$-V^0 \frac{X^2}{a} \frac{1}{\Delta T^0} \frac{d\Delta T^0}{dx} F' \Theta + \left(\frac{X^2}{a} \frac{dV^0}{dx} + X \frac{V^0}{a} \frac{dX}{dx} \right) F \Theta' + \Theta'' = 0$$

que nous noterons :

$$-A_1 F' \Theta + B_1 F \Theta' + \Theta'' = 0 \quad (5.60c)$$

Pour qu'il y ait affinité des solutions en F et en Θ , on doit aussi avoir $A_1 = cte$ et $B_1 = cte$. Voyons ce qu'il en est :

$$A_1 = V^0 \frac{X^2}{a} \frac{1}{\Delta T^0} \frac{d\Delta T^0}{dx} \quad (5.60d)$$

En substituant les expressions de V^0 , ΔT^0 et X on trouve, tous calculs faits :

$$A_1 = \frac{1}{5} \frac{\nu}{a} = \frac{Pr}{5}$$

et pour B_1 :

$$B_1 = \frac{X^2}{a} \frac{dV^0}{dx} + \frac{XV^0}{a} \frac{dX}{dx} = \frac{3}{5} \frac{\nu}{a} + \frac{1}{5} \frac{\nu}{a} \quad (5.60e)$$

$$B_l = \frac{4}{5} Pr$$

La condition est donc satisfaisante ; l'équation d'énergie (5.60a) s'écrit :

$$\boxed{\frac{Pr}{5} (4 F \Theta' - F' \Theta) + \Theta'' = 0} \quad (5.61)$$

5.5.3.3. - RÉOLUTION

L'ensemble du problème dynamique et thermique se trouve donc décrit par les deux équations (5.58) et (5.61), où les fonctions F et Θ ne dépendent que de la seule variable η .

La résolution s'opère par voie numérique. Les conditions aux limites sont les mêmes qu'au paragraphe 5.5.2.2, à l'exception de la condition thermique à la paroi, qui est ici une condition de flux, selon (5.52) :

$$\eta = 0 \quad F'(0) = F(0) = 0 \quad (5.62a)$$

$$\Theta'(0) = 1$$

$$\eta = \infty \quad F'(\infty) = 0 \quad (5.62b)$$

$$\Theta(\infty) = 0$$

Les résultats peuvent être présentés sous forme de tableaux ou de courbes donnant en particulier $F'(\eta)$ et $\Theta(\eta)$. Conséquence de la définition (5.41a) de Θ , la température de paroi est donnée par :

$$|T_p(x) - T_\infty| = \Theta(0) \Delta T^0(x) \quad (5.63a)$$

soit, conformément à (5.54) :

$$\boxed{|T_p - T_\infty| = \Theta(0) \left(\frac{\varphi_p}{\lambda} \right)^{4/5} \left(\frac{v^2}{g \beta} \right)^{1/5} x^{1/5}} \quad (5.63b)$$

Une fois de plus, l'absence de solutions analytiques est malcommode, ce qui a incité plusieurs auteurs à proposer un ajustement pour la fonction $\Theta(0)$, qui dépend du nombre de Prandtl, présent dans l'équation (5.61). Citons celui de Fujii et Fujii [Cebeci] :

$$\Theta(0) = \left(\frac{4 + 9 Pr^{1/2} + 10 Pr}{Pr^2} \right)^{1/5} \quad (5.63c)$$

5.5.3.4. - PRÉSENTATION ADIMENSIONNÉE

Jusqu'à présent, dans tout ce qui traitait de la similitude, nous n'avons envisagé qu'un seul ΔT de référence, noté ΔT^0 , servant aussi bien à exprimer les critères de similitude qu'à définir le coefficient d'échange h (par $\varphi_p = h \Delta T^0$). Mais rien

n'exige cette identification, et il est des cas - précisément comme ici - où l'on préfère dissocier les deux ΔT .

Tout d'abord, on conserve la définition de h :

$$\varphi_p = h |T_p - T_\infty|$$

La démarche la plus naturelle serait d'adopter $|T_p - T_\infty|$ pour l'adimensionnement des équations. Le nombre de Grashof s'écrirait alors (cf. Problème 5.3) :

$$Gr_x = \frac{g \beta |T_p - T_\infty| x^3}{\nu^2}$$

A la rigueur, vu l'expression (5.63) de $|T_p - T_\infty|$ et puisque $\Theta(0)$ n'a pas de formulation analytique exacte, on pourrait remplacer $|T_p - T_\infty|$ par ΔT^0 (5.54), ce qui donnerait :

$$Gr_x^0 = \left(\frac{g \beta \varphi_p}{\lambda \nu^2} \right)^{4/5} x^{16/5}$$

Rien ne s'oppose à ce choix. Pourtant, l'usage ne l'a pas entériné, la convention usuelle étant de recourir à une autre référence :

$$\Delta T^{0*} = \frac{\varphi_p x}{\lambda} \quad (5.64a)$$

ce qui conduit à un "nombre de Grashof modifié" :

$$Gr_x^* = \frac{g \beta \Delta T^{0*} x^3}{\nu^2} = \frac{g \beta \varphi_p x^4}{\lambda \nu^2} = (Gr_x^0)^{5/4} \quad (5.64b)$$

Alors, avec (5.63a), on a :


$$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda} = \frac{\varphi_p x}{\lambda |T_p - T_\infty|} = \frac{\varphi_p x}{\lambda \Theta(0) \Delta T^0}$$

et en remplaçant ΔT^0 par son expression (5.54), on constate que :

$$Nu_x = \frac{Gr_x^{*1/5}}{\Theta(0)} = \frac{(Gr_x^0)^{1/4}}{\Theta(0)} \quad (5.65a)$$

c'est à dire, avec l'ajustement (5.63c) :

$$Nu_x = \left(\frac{Pr^2}{4 + 9 Pr^{1/2} + 10 Pr} \right)^{1/5} Gr_x^{*1/5} \quad (5.65b)$$

 Mais rappelons une fois encore que la similitude entre deux expériences ne doit pas être établie sur la base du nombre de Nusselt, mais sur celle du critère de similitude Γ_{φ_l} (5.18a) ou du nombre de Boussinesq (5.15b, 5.17).

En outre, la formulation précédente de Nu_x ne permet pas de comparer les cas $T_p = cte$ et $\varphi_p = cte$ puisque la définition du nombre de Grashof n'est pas la même (voir Problème 5.3).

5.5.3.5. - EXPRESSION DU COEFFICIENT D'ÉCHANGE

Revenons maintenant au coefficient d'échange local h_x , dont l'usage n'est d'ailleurs pas une nécessité mais une simple commodité. A partir de sa définition et de l'expression (5.63a), il s'écrit :

$$h_x = \frac{\varphi_p}{\Theta(0) \Delta T^0}$$

$$h_x = \frac{1}{\Theta(0)} \left(\frac{g \beta \varphi_p \lambda^4}{\nu^2} \frac{1}{x} \right)^{1/5} \quad (5.66)$$

On voit que le coefficient d'échange dépend de la densité de flux φ_p et varie en $x^{-1/5}$ (contre $x^{-1/4}$ avec T_p imposée, formule 5.39).

5.5.3.6. - GÉNÉRALISATION

Une généralisation assez analogue à celle dont nous avons fait état en convection forcée peut être opérée ici.

En effet, si la densité de flux dépend de x , soit $\varphi_p = \varphi_p(x)$, le calcul du paragraphe 5.5.3.2 nous montre que l'existence de solutions auto-similaires est conservée pourvu que ΔT^0 reste de la forme $D x^m$ ce qui implique $X \approx x^{\frac{1-m}{4}}$ et donc $\Delta T^0 / X \approx x^{\frac{5m-1}{4}}$.

Sachant que $\varphi_p \approx \Delta T^0 / X$ (relation 5.50), il faut donc avoir :

$$\varphi_p(x) \approx x^{\frac{5m-1}{4}}$$

ou encore, puisque $|T_p - T_\infty| = \Theta(0) \Delta T^0$:

$$|T_p - T_\infty| \approx x^{\frac{5m-1}{4} + \frac{1-m}{4}} = x^m$$

ce qui correspond alors à une température $T_p(x)$ imposée.



En d'autres termes, toute distribution de flux ou de température en fonction puissance de x entraîne l'existence de solutions auto-similaires pour les champs de vitesse et de température.

On retrouve bien comme cas particuliers :

$$m = 0 \quad \text{si} \quad T_p = cte \quad (\text{d'où } \Delta T^0 = cte)$$

$$m = \frac{1}{5} \quad \text{si} \quad \varphi_p = cte$$

5.5.4. - Effets de la thermodépendance en convection libre

La dépendance des propriétés thermophysiques des fluides avec la température a fait l'objet d'un long développement dans le cadre de la convection forcée (§ 1.2.5). L'impact de cette dépendance sur les transferts en convection libre fait ressortir les mêmes tendances, mais avec des effets plus limités. Aussi nous nous bornerons aux idées essentielles.

Doit-on rappeler tout d'abord que la loi de dilatabilité $\rho(T)$ du fluide est l'essence même de la convection naturelle ? Elle se trouve donc hors compétition.

Pour les autres grandeurs, les calculs numériques montrent que l'effet de la thermodépendance est assez bien décrit par une linéarisation globale. La traduction concrète de cette constatation est la suivante :



"Une approximation très satisfaisante est obtenue en prenant les grandeurs thermodépendantes (y compris β) à la température de film T_F " (ou à la température moyenne de film lorsqu'on raisonne sur des valeurs moyennes le long de la paroi).

La *température de film* a déjà été introduite en convection forcée (§ 1.2.5.7). Elle est définie par :

$$T_F = \frac{1}{2} (T_p + T_\infty) \quad (5.67)$$

Cette règle simple est facile à appliquer lorsque T_p est imposée. Si la densité de flux est fixée, elle peut éventuellement exiger une itération.

Mais dans une grande variété de situations, la correction est faible.

5.6. - CONVECTION NATURELLE DANS UNE ENCEINTE

5.6.1. - Notion de circulation naturelle

Dans tout ce que nous avons traité jusqu'à présent, nous ne nous sommes jamais demandé d'où venait le fluide en mouvement ni où il allait. Cette préoccupation va devoir maintenant s'ajouter aux autres.

En effet, dans une enceinte fermée où la masse de fluide est constante, tout mouvement local se répercutera de façon plus ou moins marquée sur l'ensemble du domaine fluide. En convection naturelle, un tel mouvement sera généré par des gradients de température, et il pourra donner naissance à une circulation du fluide contenu dans l'enceinte.

Un exemple simple et très concret illustre bien la nature du phénomène. Imaginons une pièce dont le sol et le plafond sont supposés isolés thermiquement. L'une des parois verticales comporte une baie vitrée ; celle qui lui fait face est équipée d'un radiateur mural ; il fait froid dehors et le radiateur chauffe (fig. 5.7).

La température de surface de la baie vitrée est inférieure à la température ambiante T_{∞} dans la pièce. Un écoulement d'air va donc s'établir vers le bas. Sur le mur opposé, le radiateur est plus chaud que l'air ambiant, et c'est un écoulement ascendant qui va se mettre en place ici.

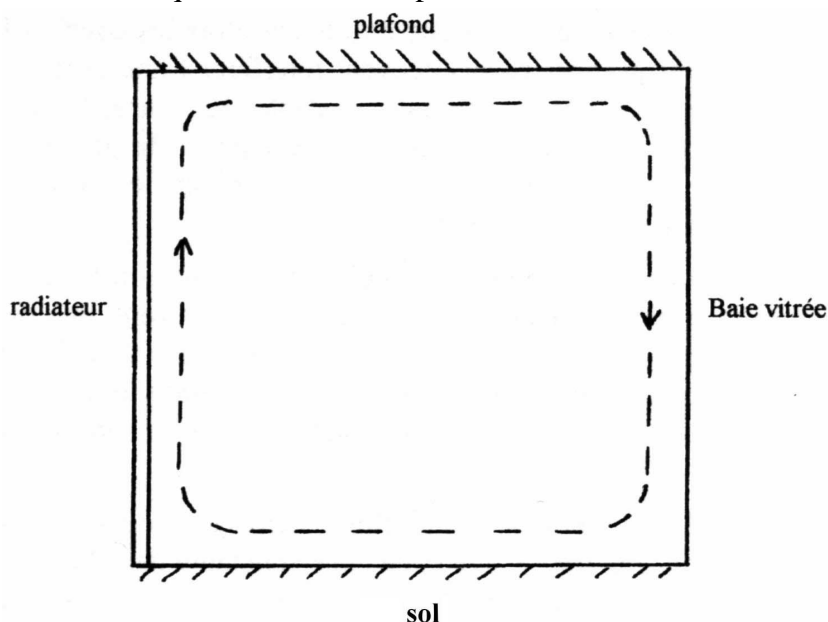


FIG. 5.7 - Exemple de circulation naturelle dans un local d'habitation.

Mais que devient ensuite le fluide mis en mouvement des deux côtés ? L'expérience montre que, si aucun échange de chaleur ne vient perturber les choses au niveau du sol et du plafond (et si la largeur de la pièce n'est pas trop grande par rapport à sa hauteur), une circulation naturelle en boucle va s'installer, schématisée par des pointillés sur la figure 5.7 : l'air chaud mis en mouvement par le radiateur vient remplacer celui qui descend le long de la fenêtre et ainsi de suite.

Imaginons maintenant que ce mouvement soit canalisé par un jeu de parois intérieures : on aura réalisé un *thermosiphon*, dans lequel un écoulement interne se met en place par le simple moyen des écarts de température, sans dispositif auxiliaire (voir Problème 5.1). Ce mécanisme est une sorte de noria, qui transporte



la chaleur de la source chaude à la source froide, en assurant sa conservation. Quant à l'énergie mécanique nécessaire au mouvement (qui est dissipée par viscosité comme dans n'importe quel écoulement), elle est fournie gratuitement par le champ de pesanteur terrestre.

5.6.2. - Enceinte rectangulaire chauffée différentiellement

Le problème général de la convection dans les enceintes est assez complexe, et on se bornera ici à proposer quelques éléments d'information.

D'une part, les formes des cavités sont très variées, et on conçoit facilement que la structure de l'écoulement dépend de la géométrie du système : dessin des angles (angles vifs ou raccords arrondis), dimensions et en particulier rapport hauteur-largeur (ou rapport d'allongement). Ce dernier paramètre est particulièrement sensible dans une cavité étroite car alors les couches limites qui se développent sur les grandes parois peuvent interférer l'une avec l'autre, et se voir imposer ainsi une épaisseur presque constante. En outre, l'inclinaison des parois est un paramètre majeur, surtout pour les cavités de grand allongement avec lesquelles les deux dispositions extrêmes (horizontale ou verticale) font apparaître des comportements différents.

Quant aux conditions aux limites, le nombre des parois constituant une cavité conduit à multiplier les combinaisons possibles. Assez souvent, on considère que deux parois planes parallèles en regard sont soumises à une température ou à un flux imposé, uniforme ou non (parois dites *actives*) tandis que les autres sont adiabatiques (parois *passives*). Mais les situations réelles sont souvent moins schématiques.

Quoi qu'il en soit, les mouvements de fluide dans la cavité sont assez souvent des écoulements de couche limite, avec une zone stagnante dans la partie centrale, tandis que le champ de température présente toujours une stratification verticale dans le plan médian, qui se traduit avec nos notations par $T_{\infty} = T_{\infty}(z)$.

Les méthodes de calcul que nous avons développées (méthode différentielle, méthode semi-intégrale) s'adaptent à l'étude des cavités (sauf au voisinage des angles) lorsque la circulation est de type couche limite. Quelques cas simples se prêtent à des résolutions analytiques [cf. Kakaç, Bejan]. Mais pour une description d'ensemble fine et complète, il paraît indispensable de recourir à une simulation numérique.

On trouve dans la littérature des corrélations relatives au transfert de chaleur à travers les parois. Elles font apparaître une certaine dispersion, due peut-être au fait que leurs conditions exactes de validité ne sont pas toujours complètement précisées.

A titre d'exemple, nous donnons trois corrélations pour des cavités rectangulaires verticales, selon leur allongement $H/L = \text{hauteur} / \text{largeur}$. Dans ces formules, *la longueur de référence est la largeur L* , c'est à dire que :

$$Nu = \frac{h L}{\lambda} \quad \text{et} \quad Bo = \frac{g \beta (T_c - T_f) L^3}{a^2}$$

avec $h = \text{coefficient d'échange moyen sur les parois actives}$, $T_c = \text{température de la paroi chaude}$, $T_f = \text{température de la paroi froide (toutes deux imposées et uniformes)}$ [Catton, 1978]. Rappelons en outre que $Bo = Ra Pr = Gr Pr^2$.

$$\clubsuit \quad 1 < \frac{H}{L} < 2 \quad , \quad \frac{Bo}{0,2 + Pr} \gtrsim 10^3$$

$$Nu = 0,18 \left(\frac{Bo}{0,2 + Pr} \right)^{0,29} \quad (5.68a)$$

$$\blacklozenge \quad 2 < \frac{H}{L} < 10 \quad , \quad Ra \lesssim 10^{10}$$

$$Nu = 0,22 \left(\frac{Bo}{0,2 + Pr} \right)^{0,28} \left(\frac{H}{L} \right)^{-1/4} \quad (5.68b)$$

$$\heartsuit \quad 10 < \frac{H}{L} < 40 \quad , \quad 10^4 \lesssim Ra \lesssim 10^7 \quad , \quad 0,7 \lesssim Pr \lesssim 50$$

$$Nu = 0,42 Ra^{1/4} \left(\frac{H}{L} \right)^{-0,3} \quad (5.68c)$$

5.7. - EXTENSION DE LA MÉTHODE SEMI-INTÉGRALE À LA CONVECTION NATURELLE

Nous allons maintenant revenir au cas de la convection naturelle sur une paroi plane verticale, pour voir comment on peut adapter la méthode de Karman-Pohlhausen au calcul de la couche limite. Notons préalablement que, d'après ce qui a été dit au § 5.6, cette disposition concerne non seulement la convection externe, mais aussi certains cas de convection dans des enceintes.

5.7.1. - Équation dynamique

D'après les équations (2.1) et (2.2), en convection forcée externe, et avec un écoulement uniforme de fluide isochore ($U_\infty = cte$), l'équation de Karman s'écrit :

$$\rho U_\infty^2 \frac{d \delta_2}{d x} = \tau_p \quad (5.69a)$$

ou en développant :

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta U (U - U_\infty) dy = -\nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_p \quad (5.69b)$$

Si nous tenons compte maintenant des effets du champ de pesanteur sur un fluide de masse volumique non uniforme, ceci se traduit dans l'équation de quantité de mouvement par un terme de poussée thermique $g \beta |T - T_\infty|$ que l'on va retrouver au second membre de l'équation de Karman, intégré sur l'épaisseur de la couche limite ; sachant que le second membre provient de l'intégration de $\partial^2 U / \partial y^2$:

$$-\nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_p = \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} dy$$

la nouvelle équation s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta U (U - U_\infty) dy = \int_0^\delta g \beta |T - T_\infty| - \nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_p \quad (5.70a)$$

En convection naturelle, $U_\infty = 0$ et il reste :

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_0^\delta U^2 dy = \int_0^\delta g \beta |T - T_\infty| - \nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_p} \quad (5.70b)$$

5.7.2. - Profil de vitesse

- ♣ La méthode de Karman-Pohlhausen consiste à résoudre l'équation (5.70b) en utilisant une approximation polynomiale de la fonction $U(y)$. Vu la forme du profil de vitesse (fig. 5.2), le degré 3 est un minimum. Pour élargir le champ d'application, nous retiendrons le degré 4 comme au chapitre 2, en posant :

$$U^+ = \frac{U}{V^0} = a_0 + a_1 y^+ + a_2 y^{+2} + a_3 y^{+3} + a_4 y^{+4} \quad (5.71a)$$

avec :

$$y^+ = \frac{y}{\delta} \quad ; \quad V^0 = \sqrt{g \beta |T_p - T_\infty|} \quad (5.71b)$$

et δ = épaisseur de couche limite dynamique.

Les coefficients a_i du polynôme sont déterminés à partir des conditions aux limites :

- à la paroi :

$$y^+ = 0 \quad ; \quad U^+ = 0 \quad (5.72a)$$

- à la lisière de la couche limite :

$$y^+ = 1 ; U^+ = 0 ; \frac{\partial U^+}{\partial y^+} = 0 ; \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^{+2}} = 0 \quad (5.72b)$$

⚠ Ici, il faut s'arrêter un instant sur un problème important. L'écriture de la fonction U^+ soulève le problème de la caractérisation de l'épaisseur de couche limite dynamique δ en convection libre, que nous avons déjà évoqué (§ 5.3). En effet, la définition classique n'est transposable qu'en prenant comme valeur de δ la distance à laquelle $U = 0,01 U_{max}$, ce qui oblige à se raccrocher à une grandeur qui n'est pas une donnée du problème, et qui n'est donc pas le meilleur choix comme vitesse de référence.

⚡ Mais si on regarde bien, l'épaisseur de couche limite prise en compte dans la méthode de Karman-Pohlhausen est déconnectée de la définition utilisée expérimentalement ou avec la méthode différentielle. En effet, dans le modèle polynomial, la vitesse U ne tend pas asymptotiquement vers zéro loin de la paroi : δ apparaît comme l'ordonnée à laquelle le polynôme U^+ s'annule. C'est une définition naturelle (au sens qu'elle ne repose pas sur une convention), mais comme on vient de la dire, non directement raccordable à la définition classique. Le problème est d'ailleurs le même en convection forcée, et explique en partie l'écart entre les valeurs de δ calculées par la méthode différentielle ou par la méthode semi-intégrale (FEMM, § 4.6.7).

◆ Revenons à nos conditions aux limites (5.72). La première donne :

$$a_0 = 0$$

Les conditions à la paroi nous permettent aussi d'accéder à une information sur le coefficient a_2 . En effet, l'équation dynamique (5.10b) de la couche limite :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \beta |T - T_\infty| + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

devient en $y = 0$ ($U = 0, T = T_p$) :

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_p = -\frac{g \beta}{\nu} |T_p - T_\infty| \quad (5.73a)$$

soit avec les grandeurs adimensionnées :

$$\left(\frac{\partial^2 U^+}{\partial y^{+2}} \right)_p = -\frac{\delta^2}{V^0} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\delta^2}{\nu} \sqrt{g \beta |T_p - T_\infty|} \quad (5.73b)$$

On a d'autre part :

$$\frac{\partial U^+}{\partial y^+} = a_1 + 2a_2 y^+ + 3a_3 y^{+2} + 4a_4 y^{+3}$$

$$\frac{\partial^2 U^+}{\partial y^{+2}} = 2a_2 + 6a_3 y^+ + 12a_4 y^{+2}$$

d'où, à la paroi :

$$\left(\frac{\partial^2 U^+}{\partial y^{+2}} \right)_p = 2a_2 \quad (5.73c)$$

Le rapprochement de (5.73b et c) donne :

$$a_2 = -\frac{\delta^2}{2\nu} \sqrt{g \beta |T_p - T_\infty|} \quad (5.74)$$

où δ reste pour le moment une inconnue.

♥ Les trois conditions en $y^+ = l$ s'expriment par :

$$\begin{aligned} a_1 - \frac{\delta^2}{2\nu} \sqrt{g \beta |T_p - T_\infty|} + a_3 + a_4 &= 0 \\ a_1 - \frac{\delta^2}{\nu} \sqrt{g \beta |T_p - T_\infty|} + 3a_3 + 4a_4 &= 0 \\ -\frac{\delta^2}{\nu} \sqrt{g \beta |T_p - T_\infty|} + 6a_3 + 12a_4 &= 0 \end{aligned}$$

Après résolution du système, on obtient :

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{\delta^2}{6\nu} \sqrt{g \beta |T_p - T_\infty|} \\ a_3 &= 3a_1 \quad ; \quad a_4 = -a_1 \end{aligned}$$

et d'après (5.74) :

$$a_2 = -3a_1$$

Le profil de vitesse (5.71a) a donc pour formulation :

$$U^+ = \frac{\delta^2}{6\nu} \sqrt{g \beta |T_p - T_\infty|} (y^+ - 3y^{+2} + 3y^{+3} - y^{+4})$$

ou encore [Khabbazi, 1993] :

$$\boxed{U^+ = \frac{\delta^2}{6\nu} \sqrt{g \beta |T_p - T_\infty|} y^+ (1 - y^+)^3} \quad (5.75)$$

5.7.3. - Profil de température et équation d'énergie

En ce qui concerne le profil de température, rien n'est changé, d'un strict point de vue formel, par rapport au cas de la convection forcée (§ 2.3.2). L'équation (2.22) est donc conservée, à ceci près que nous utilisons maintenant :

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} \quad \text{à la place de} \quad T^+ = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}$$

soit :

$$\Theta = 1 - T^+$$

d'où en remplaçant dans (2.22), avec $y^* = y / \delta_T$:

$$\Theta = 1 - b_1 y^* - 3(2 - b_1) y^{*2} - (3b_1 - 8) y^{*3} - (3 - b_1) y^{*4}$$

Lorsque T_p est imposée, on a encore $b_1 = 2$, et il reste :

$$\boxed{\Theta = 1 - 2 y^* + 2 y^{*3} - y^{*4}} \quad (5.76)$$

De même, l'équation semi-intégrale d'énergie reste l'équation (2.11) établie également en convection forcée :

$$\varphi_{px} = \rho C_p \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_r} U(T - T_\infty) dy \quad (5.77a)$$

Comme on a aussi :

$$\varphi_{px} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial y} \right)_p$$

on obtient en $y^* = 0$,

$$\varphi_{px} = \frac{2 \lambda (T_p - T_\infty)}{\delta_T} \quad (5.77b)$$

et enfin, après avoir réuni les deux expressions de φ_{px} :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_r} U(T - T_\infty) dy = \frac{2}{Pr} \frac{\lambda}{\delta_T} (T_p - T_\infty) \quad (5.78)$$

5.7.4. - Procédure de résolution

Le remplacement de U et T à partir de (5.75) et (5.76) dans les deux équations semi-intégrales (5.70b) et (5.78) donne un système de deux équations dont les deux inconnues sont δ et δ_T , système qui se résout comme au chapitre 2.

Cette méthode est bien entendu adaptable au cas d'un fluide stratifié, c'est à dire d'un milieu où existe un gradient vertical de température ambiante, $T_\infty(x)$ étant alors une donnée du problème.

Dans les écoulements externes, on aboutit assez souvent à des épaisseurs de couches limites dynamique et thermique assez voisines, ce qui a incité certains auteurs à introduire au départ l'hypothèse $\delta \approx \delta_T$. Il faut quand même être prudent, d'autant plus que cette propriété n'est pas toujours vérifiée dans les cavités.

5.8. - PANACHES THERMIQUES

5.8.1. - Caractéristiques des panaches

On appelle panache l'écoulement gravitaire provoqué par la présence au sein d'un fluide d'une source de dimensions limitées dont la température est différente de la température ambiante. En général, la source est plus chaude que le fluide, de sorte que le mouvement est dirigé vers le haut, mais l'inverse se rencontre quelques fois.

D'un point de vue géométrique, la source peut être ponctuelle, linéique (exemple d'un fil chaud), circulaire ou rectangulaire. Dans les trois derniers cas, elle est le plus souvent disposée horizontalement.

En convection naturelle, c'est à dire lorsque le fluide ambiant est au repos, le panache est d'abord laminaire, à proximité de la source, et il devient turbulent lorsqu'on s'en éloigne. Nous savons (§ 5.4.2.2) que c'est le nombre de Grashof qui est représentatif de la transition laminaire-turbulent. Si la source est à température imposée T_0 , on utilisera le nombre de Grashof classique (5.14), en prenant $L^0 = x =$ distance verticale à la source :

$$Gr = \frac{g \beta (T_0 - T_\infty) x^3}{\nu^2}$$

Plus fréquemment, c'est la puissance Φ_0 qui est fixée ; elle est exprimée en Watt avec une source ponctuelle (puissance totale) ou en W/m avec une source linéique (puissance par unité de longueur). On est alors conduit [cf. Bejan] à remplacer la température de référence $\Delta T^0 = T_0 - T_\infty$ par :

$$\begin{aligned} \Delta T_\phi^0 &= \frac{\Phi_0}{\lambda x} && \text{pour une source ponctuelle } (\Phi_0 \text{ en W}) \\ &= \frac{\Phi_0}{\lambda} && \text{pour une source linéique } (\Phi_0 \text{ en W/m}) \end{aligned} \quad (5.79)$$

Nous avons déjà rencontré ce problème dans les couches limites (relation 5.64). Certains auteurs préfèrent $\Delta T_\phi^0 = \Phi_0 / \rho C_p \nu \equiv \Phi_0 / \lambda Pr$: cela se discute. Toujours est-il qu'avec le choix ci-dessus on introduit des "nombres de Grashof modifiés" :

$$\begin{aligned} Gr_{\phi_p} &= \frac{g \beta \Phi_0 x^2}{\lambda \nu^2} && \text{(source ponctuelle)} \\ Gr_{\phi_l} &= \frac{g \beta \Phi_0 x^3}{\lambda \nu^2} && \text{(source linéique)} \end{aligned} \quad (5.80)$$

Dans la littérature, on trouve surtout des informations relatives aux panaches turbulents, dont les applications sont nombreuses. La région laminaire n'est pas

pour autant dénuée d'intérêt pratique. Pour un panache axisymétrique issu d'une source ponctuelle à flux imposé, elle correspond à la condition :

$$Gr_{\phi_p} \lesssim 10^{10} \quad (5.81)$$

⚠ Notons aussi la parenté assez étroite des *panaches* et des *jets*. La différence morphologique essentielle réside dans l'origine du mouvement : injection de masse et de quantité de mouvement pour les jets ; injection d'une puissance thermique pour les panaches.

5.8.2. - Panaches issus d'une source linéique

5.8.2.1. - DONNÉES. CONDITIONS AUX LIMITES

Nous allons traiter comme exemple le panache généré par un fil chaud horizontal, de diamètre négligeable, produisant une puissance linéique Φ_0 (W/m). La géométrie est donc bidimensionnelle cartésienne et présente un plan de symétrie. La coordonnée y désigne la distance à ce plan, x étant toujours la distance verticale à partir de la source (fig. 5.8).

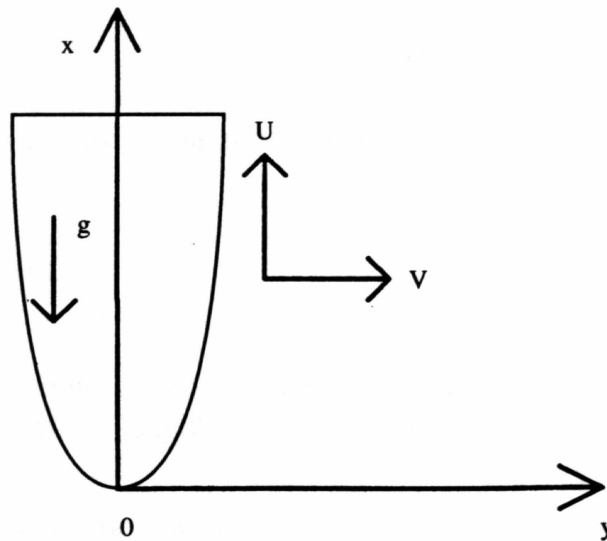


FIG. 5.8 - Panache linéique de source 0.

Les données expérimentales relatives au champ de vitesse font apparaître une zone d'établissement au voisinage immédiat de la source, puis un peu plus haut une zone établie, où sur chaque plan horizontal les profils de vitesse U ont une forme de cloche avec un maximum sur le plan de symétrie et une décroissance asymptotique au loin. Les profils de température ont la même apparence.

L'écoulement est toujours gouverné par les équations (5.9) de la couche limite en convection naturelle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= g \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (5.82)$$

Les conditions aux limites associées sont maintenant celles-ci :

$$\text{– en } y=0 \text{ (plan de symétrie)} : \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \text{ et } \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (5.83)$$

$$\text{– pour } y = \infty : U = 0 ; V = 0 ; T = T_\infty$$

– il en faut une autre qui relie la morphologie du panache au flux de chaleur Φ_0 émis par le fil. Mais nous ne pouvons pas écrire de condition en $x=0$ car la source est un point singulier où la densité de flux est infinie. La seule solution consiste à exprimer la conservation de l'énergie totale. Sur chaque plan horizontal, le flux de chaleur transporté par le panache est égal au flux émis Φ_0 :



$$\Phi_0 = \rho C_p \int_{-\infty}^{+\infty} U (T - T_\infty) dy \quad (5.84)$$

C'est donc cette relation intégrale qui va jouer le rôle de condition à la limite pour la source.

5.8.2.2. - MODÉLISATION

Là encore, nous allons mettre à contribution la méthode différentielle, en suivant le même raisonnement que pour la plaque verticale avec flux imposé (§ 5.5.3).

Il s'agit de déterminer quelle transformation de coordonnée $x \mapsto X(x)$ permet d'obtenir des solutions affines pour U et T , et quelles grandeurs de référence $\Delta T^0(x)$ et $V^0(x)$ sont compatibles avec cette exigence.

Nous reprendrons donc comme point de départ les conditions (5.41) :

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{T(x, y) - T_\infty}{\Delta T^0(x)} = \Theta(\eta) \\ \frac{U}{V^0} &= f(\eta) = F'(\eta) \\ \eta &= \frac{y}{X(x)} \end{aligned} \quad (5.85)$$

Le schéma de calcul reste celui du § 5.5.3.2. En particulier, l'équation dynamique est toujours de la forme (5.42) :

$$A(F'^2 - FF'') - BFF'' = \Theta + CF''' \quad (5.86)$$

avec (5.46) à (5.49) :

$$\begin{aligned} \Delta T^0 &= D x^m \\ V^0 &= (g \beta D x^{m+1})^{1/2} \\ A &= \frac{m+1}{2} ; \quad B = \frac{1-m}{4} \\ X &= \left(\frac{V^2}{C^2 g \beta D} \right)^{1/4} x^{\frac{1-m}{4}} \end{aligned} \quad (5.87)$$

La seule différence réside dans la détermination de l'exposant m : à la condition de flux pariétal (5.50) se substitue la condition intégrale (5.84) qui s'écrit, avec les variables adimensionnelles :

$$\Phi_0 = \rho C_p \int_{-\infty}^{+\infty} V^0 F' \Delta T^0 \Theta X d\eta \quad (5.88)$$

soit, à partir de (5.85) et (5.87) :

$$\Phi_0 = cte \times x^{\frac{m+m+1}{2} + \frac{1-m}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} F' \Theta d\eta$$

Cette expression est une constante si l'exposant de x est nul, c'est à dire si :

$$\boxed{m = -\frac{3}{5}} \quad (5.89a)$$

Il en résulte, d'après (5.87) :

$$A = \frac{1}{5} ; \quad B = \frac{2}{5} \quad (5.89b)$$

Notre relation intégrale (5.88) prend alors la forme :

$$\Phi_0 = \rho C_p (g \beta D)^{1/2} D \left(\frac{V^2}{C^2 g \beta D} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} F' \Theta d\eta$$

Il y a trois constantes à préciser dans cette équation : C , D et l'intégrale. Nous pouvons donc en choisir deux. Le plus commode est de prendre :

$$C = 1$$

(comme dans 5.52), et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F' \Theta d\eta = 1$$

On en déduit immédiatement la constante D , qui s'exprime en fonction du flux émis Φ_0 :

$$D = \left(\frac{\Phi_0}{\rho C_p} \right)^{4/5} (g \beta)^{-1/5} \nu^{-2/5} \quad (5.90a)$$

d'où (cf. 5.87 et 5.89a) :

$$\Delta T^0 = D x^{-3/5} \quad (5.90b)$$

$$X = \left(\frac{\nu^2}{g \beta} \right)^{1/5} \left(\frac{\rho C_p \nu}{\Phi_0} \right)^{1/5} x^{2/5} \quad (5.90c)$$

Enfin, avec les valeurs de A , B et C on obtient la forme définitive de l'équation de quantité de mouvement (5.86) :

$$\boxed{F''' - \frac{1}{5} F'^2 + \frac{3}{5} FF'' + \Theta = 0} \quad (5.91a)$$

D'autre part, avec l'équation d'énergie (5.60c) :

$$-A_l F' \Theta + B_l F \Theta' + \Theta'' = 0$$

le calcul des constantes A_l et B_l (toujours définies par 5.60d et 5.60e) donne ici :

$$A_l = -B_l = -\frac{3}{5} Pr$$

d'où notre seconde équation :

$$\boxed{\frac{3}{5} Pr (F' \Theta + F \Theta') + \Theta'' = 0} \quad (5.91b)$$

Exprimées avec les variables F et Θ , les conditions aux limites (5.83) deviennent :

$$\begin{aligned} \eta = 0 \quad & F''(0) = 0 \\ & \Theta'(0) = 0 \end{aligned} \quad (5.92a)$$

$$\begin{aligned} \eta = \infty \quad & F'(\infty) = 0 \\ & \Theta(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (5.92b)$$

5.8.2.3. - RÉSULTATS

Les figures (5.9) et (5.10) illustrent les solutions du système (5.91 a, b) pour F' et Θ (c'est à dire U et T) dans le cas de l'air ($Pr = 0,71$).

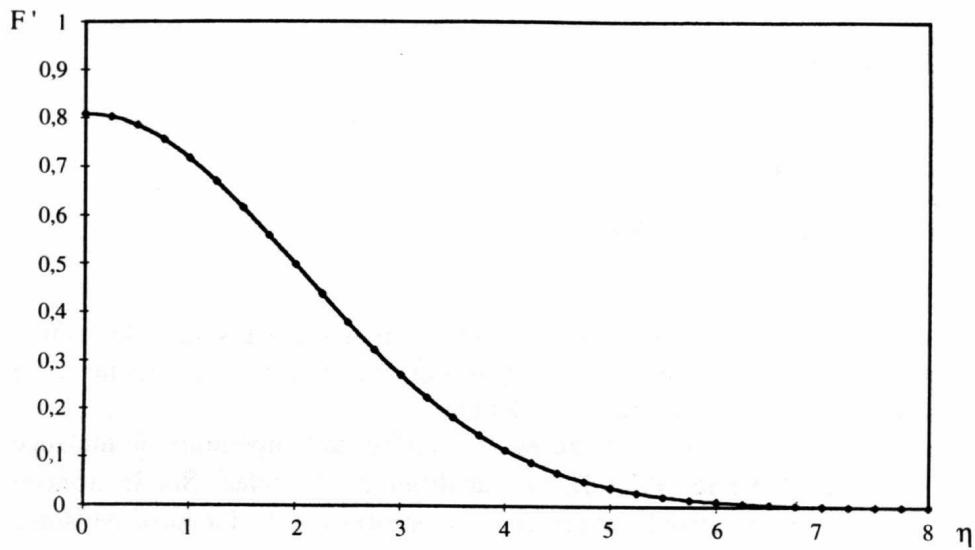


FIG. 5.9 - Répartition de vitesse dans un panache laminaire à plan de symétrie. $Pr = 0,71$.

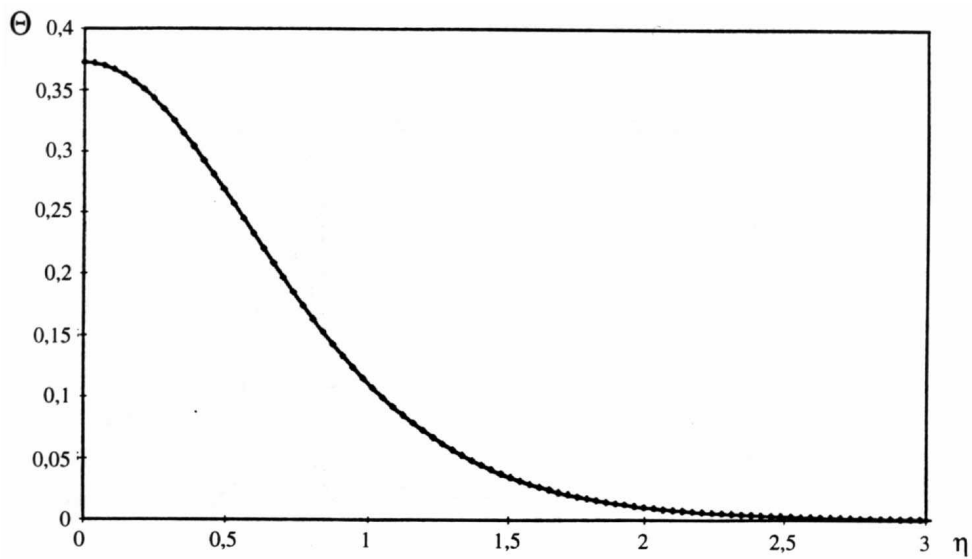


FIG. 5.10 - Répartition de température dans un panache laminaire à plan de symétrie. $Pr = 0,71$.

En ce qui concerne la forme du panache, on constate dans la zone laminaire un évaseement extrêmement lent, ce qui correspond à un très faible taux de dilution. Ce phénomène est d'ailleurs clairement perceptible quand on observe la fumée d'une cigarette en atmosphère calme.

PROBLÈMES

PROBLÈME 5.1

ÉTUDE D'UN THERMOSIPHON

Énoncé

On considère un circuit en boucle constitué par une canalisation de section constante comportant deux branches verticales et deux branches horizontales. Le fluide caloporteur est de l'eau (figure ci-dessous).

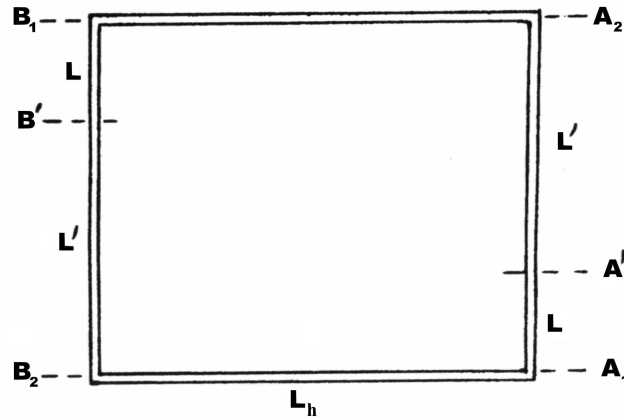
Sur le tronçon vertical $A_1 A'$, l'eau est réchauffée, sa température de mélange passant de T_0 à T' . Entre A' et B_1 , la canalisation est isolée. Sur le tronçon vertical $B_1 B'$, l'eau est refroidie et revient à la température T_0 . La paroi est isolée entre B' et A_1 .

On donne :

$$A_1 A' = B_1 B' = L \quad ; \quad A' A_2 = B' B_2 = L'$$

$$A_2 B_1 = B_2 A_1 = L_h \quad ; \quad \text{longueur totale : } L_0$$

Canalisation cylindrique, diamètre D .



1 - Le circuit étudié constitue un thermosiphon. Expliquer ce qui se passe dans un tel dispositif.

2 - Le réchauffement et le refroidissement sont effectués en imposant à la paroi une densité de flux φ_p uniforme sur $A_1 A'$ et $B_1 B'$. L'écoulement est supposé laminaire établi, avec similitude des profils de température. On désigne par ρ_m la masse volumique moyenne de l'eau, prise à la température moyenne de mélange $(T_0 + T')/2 = \langle T \rangle$.

Exprimer $T' - T_0$ en fonction de φ_p et de la vitesse débitante V de l'eau dans la canalisation.

3 - Soient $\rho_0 = \rho(T_0)$ et $\rho' = \rho(T')$. On rappelle que :

$$(\rho_0 - \rho') / \rho_0 = \beta(T' - T_0)$$

En écrivant successivement l'équation de Bernoulli sur les différents tronçons du circuit, établir une relation entre $T' - T_0$ et V . On négligera les pertes de charge singulières et l'on admettra l'approximation :

$$(\rho' + \rho_0)(L' + L_h) + 2\rho_m L = \langle \rho \rangle L_0 \text{ avec } \langle \rho \rangle \approx \rho_0 \approx \rho_m$$

Les caractéristiques thermophysiques seront prises à la température moyenne de mélange.

4 - Dédurre de 2. et 3. l'expression de V en fonction de φ_p , puis celle de φ_p en fonction de $T' - T_0$.

5 - Application numérique : $L = 3 \text{ m}$; $L' = 6 \text{ m}$; $L_0 = 25 \text{ m}$; $D = 10 \text{ mm}$; $T_0 = 15^\circ \text{ C}$; $T' - T_0 = 40^\circ \text{ C}$. Calculer la vitesse de circulation naturelle V , la densité de flux φ_p nécessaire et la puissance thermique Φ transportée de $A_1 A'$ en $B_1 B'$. Justifier l'approximation $\langle \rho \rangle \approx \rho_0 \approx \rho_m$.

Solution

1 - Les tronçons $A_1 A'$ et $B_1 B'$ sont à la même température moyenne $(T_0 + T')/2$. Mais dans la branche verticale $A_1 A_2$, l'eau est plus chaude que dans la branche $B_1 B_2$ ($T' > T_0$) ; sa masse volumique est donc plus faible. En conséquence, la colonne fluide $A_1 A_2$ a un poids inférieur à celui de la colonne $B_1 B_2$. Cette dissymétrie va provoquer un mouvement du fluide dans le sens $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_1 \rightarrow \dots$. La vitesse de circulation naturelle de l'eau se stabilisera à une valeur telle que l'énergie motrice générée par les différences de température soit équilibrée par les pertes de charge.

2 - Avec les hypothèses formulées dans la question 2, on sait que le gradient de température axial est donné par la relation suivante (§ 3.4.1) :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{2\varphi_p}{\rho_m C_p V R}$$

soit ici :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{T' - T_0}{L}$$

et en remplaçant R par $D/2$:

$$\boxed{T' - T_0 = \frac{4\varphi_p L}{\rho_m C_p V D}} \quad (1)$$

3 - La section étant constante, la vitesse d'écoulement est la même dans toute la canalisation. En recommandant de prendre les caractéristiques thermophysiques moyennes, l'énoncé nous invite à considérer un coefficient de frottement moyen dans l'ensemble du circuit.

En écoulement établi, on a sur un tronçon rectiligne 1 - 2 (FEMM, 7.29).

$$p_1^* = p_2^* + 4C_f \frac{L}{D} \rho \frac{V^2}{2} \quad \text{avec} \quad p^* = p + \rho g z \quad (2)$$

Appliquons cette relation successivement aux différentes parties du circuit :

Segment $A_1 A'$: longueur L , masse volumique moyenne ρ_m

$$p_{A1} + \rho_m g z_{A1} = p_{A'} + \rho_m g z_{A'} + 4C_f \frac{L}{D} \rho_m \frac{V^2}{2}$$

Segment $A' B_1$: longueur $L' + L_h$, masse volumique ρ'

$$p_{A'} + \rho' g z_{A'} = p_{B1} + \rho' g z_{B1} + 4C_f \frac{L' + L_h}{D} \rho' \frac{V^2}{2}$$

Segment $B_1 B'$: longueur L , masse volumique moyenne ρ_m

$$p_{B1} + \rho_m g z_{B1} = p_{B'} + \rho_m g z_{B'} + 4C_f \frac{L}{D} \rho_m \frac{V^2}{2}$$

Segment $B' A_1$: longueur $L' + L_h$, masse volumique ρ_0

$$p_{B'} + \rho_0 g z_{B'} = p_{A1} + \rho_0 g z_{A1} + 4C_f \frac{L' + L_h}{D} \rho_0 \frac{V^2}{2}$$

Additionnons membre à membre les quatre équations précédentes ; les termes de pression disparaissent et il reste :

$$\begin{aligned} & \rho_m g (z_{A1} - z_{A'}) + \rho' g (z_{A'} - z_{B1}) + \rho_m g (z_{B1} - z_{B'}) + \rho_0 g (z_{B'} - z_{A1}) \\ &= \frac{4C_f V^2}{D} \left\{ \rho_m L + \rho' (L' + L_h) + \rho_m L + \rho_0 (L' + L_h) \right\} \end{aligned}$$

D'après la figure :

$$\begin{aligned} z_{A1} - z_{A'} &= -L & ; & & z_{A'} - z_{B1} &= -L' \\ z_{B1} - z_{B'} &= L & ; & & z_{B'} - z_{A1} &= L' \end{aligned}$$

L'expression entre parenthèses est donnée dans la question 3, et l'équation devient :

$$(\rho_0 - \rho') g L' = 4C_f \frac{L_0}{D} \rho_0 \frac{V^2}{2} \quad (3)$$

Elle traduit ainsi l'égalité entre l'énergie motrice et l'énergie dissipée par viscosité dans la canalisation.

En écoulement laminaire :

$$C_f = \frac{16}{\Re} = \frac{16\nu}{VD} \quad (4)$$

ν étant prise à la température moyenne $\langle T \rangle$.

D'autre part, d'après l'énoncé :

$$\rho_0 - \rho' = \rho_0 \beta (T' - T_0) \quad (5)$$

En combinant (3), (4) et (5) on obtient la relation demandée entre V et $T' - T_0$:

$$V = \frac{\beta g D^2}{32\nu} \frac{L'}{L_0} (T' - T_0) \quad (6)$$

et il apparaît que V est proportionnelle à $T' - T_0$.

4 - La réunion de (1) et (6) donne :

$$V = \frac{\beta g D^2}{32\nu} \frac{L'}{L_0} \frac{4\varphi_p L}{\rho_m C_p V D}$$

soit puisque $\rho_m \approx \rho_0$, et en regroupant :

$$V = \left\{ \frac{\beta g D \varphi_p L' L}{8 \rho_0 C_p \nu L_0} \right\}^{0,5} \quad (7)$$

En reportant dans (6) et en élevant au carré, il vient après simplification la densité de flux φ_p nécessaire pour obtenir l'écart de température demandé :

$$\varphi_p = \frac{\beta g \rho_0 C_p}{128\nu} D^3 \frac{L'}{L_0 L} (T' - T_0)^2 \quad (8)$$

5 - D'après les données :

$$T_0 = 15^\circ C \quad ; \quad T' = 55^\circ C \quad ; \quad \langle T \rangle = \frac{T_0 + T'}{2} = 35^\circ C$$

A $\langle T \rangle$, l'eau a pour caractéristiques :

$$\beta \approx 3,3 \cdot 10^{-4} K^{-1} \quad ; \quad \nu \approx 0,74 \cdot 10^{-6} m^2 / s$$

$$C_p \approx 4180 J / kg \cdot ^\circ C \quad ; \quad \rho_0 \approx 10^3 kg / m^3$$

La vitesse de circulation naturelle se calcule par (6) et l'on trouve :

$$V = 0,13 m / s$$

Pour φ_p , (8) ou (1) donne :

$$\varphi_p = 18,2 \cdot 10^3 W / m^2$$

La puissance transportée Φ est la puissance fournie sur le tronçon A, A' et récupérée sur B, B' :

$$\Phi = \varphi_p \Sigma$$

avec Σ = surface latérale du tube A, A' , soit :

$$\Sigma = \pi D L = \pi \times 10 \cdot 10^{-3} \times 3 = 94 \cdot 10^{-3} m^2$$

$$\Phi = 18,2 \cdot 10^3 \times 94 \cdot 10^{-3}$$

$$\Phi \approx 1700 W$$

L'approximation sur ρ se justifie aisément puisque :

$$\frac{\rho_0 - \rho'}{\rho_0} = \beta(T' - T_0) \approx 3,3 \cdot 10^{-4} \times 40 \approx 1,3\%$$

Enfin il est utile de vérifier que le régime est bien laminaire ; avec ν à la température moyenne $\langle T \rangle$:

$$\mathfrak{R} = \frac{V D}{\nu} \approx \frac{0,13 \times 10 \cdot 10^{-3}}{0,74 \cdot 10^{-6}} \approx 1780$$

C'est correct.

PROBLÈME 5.2

Énoncé

Une paroi plane verticale de hauteur L est chauffée à flux uniforme.

1 - Exprimer le coefficient d'échange moyen par convection libre en fonction du coefficient d'échange local h_L au sommet de la paroi ($x = L$) et en prenant comme référence : a) l'écart entre la température moyenne de paroi et la température ambiante T_∞ ; b) l'écart entre la température au milieu de la paroi $x = L/2$ et la température ambiante. Comparer.

2 - Effectuer la même comparaison pour le nombre de Nusselt moyen. Conclure.

Solution

1 - a) Le coefficient d'échange local est défini par :

$$h_x = \frac{\varphi_p}{T_p(x) - T_\infty}$$

D'après (5.63b), la température de paroi obéit à une loi de la forme :

$$T_p(x) - T_\infty = C x^{1/5}$$

Soit T_p la température moyenne sur la paroi :

$$T_p - T_\infty = \frac{1}{L} \int_0^L \{T_p(x) - T_\infty\} dx = \frac{C}{L} \int_0^L \frac{dx}{x^{1/5}}$$

d'où :

$$T_p - T_\infty = \frac{5}{6} C L^{1/5} = 0,833 C L^{1/5}$$

Le coefficient d'échange moyen est alors :

$$h = \frac{\varphi_p}{T_p - T_\infty} = \frac{6}{5} \frac{\varphi_p}{C L^{1/5}}$$

Mais à l'abscisse L , le coefficient d'échange local a pour valeur :

$$h_L = \frac{\varphi_p}{T_p(L) - T_\infty} = \frac{\varphi_p}{C L^{1/5}}$$

soit :

$$\boxed{h = \frac{6}{5} h_L}$$

1 - b) On pose maintenant : $h_{L/2} = \frac{\varphi_p}{T_p(L/2) - T_\infty}$

La température à l'abscisse $L/2$ s'exprime par :

$$T_p\left(\frac{L}{2}\right) - T_\infty = C \left(\frac{L}{2}\right)^{1/5} = 0,87 C L^{1/5}$$

alors :

$$h_{L/2} = \frac{1}{0,87} \frac{\varphi_p}{C L^{1/5}}$$

$$\boxed{h_{L/2} = 1,15 h_L}$$

En remplaçant h par $h_{L/2}$, on sous-évalue le coefficient d'échange moyen de 4,2 % ($1,15 h_L$ au lieu de $1,2 h_L$).

2 - A partir de (5.64b) et (5.65a), le nombre de Nusselt local s'exprime sous la forme :

$$Nu_x = K x^{4/5}$$

Sur l'ensemble de la paroi, le Nusselt moyen est :

$$Nu = \frac{K}{L} \int_0^L x^{4/5} dx = \frac{5}{9} K L^{4/5}$$

$$\underline{Nu = 0,555 Nu_L}$$

Prendre la température de référence à $x = L/2$ revient à calculer $Nu_{L/2}$:

$$Nu_{L/2} = K \left(\frac{L}{2}\right)^{4/5} = 0,575 K L^{4/5}$$

$$\underline{Nu_{L/2} = 0,575 Nu_L}$$

L'écart sur les nombres de Nusselt est de 3,5 %.

La comparaison ne donne donc pas exactement les mêmes résultats selon qu'elle est effectuée sur Nu ou sur h . Elle donne l'illusion d'être plus favorable avec le nombre de Nusselt. Mais l'écart réel à prendre en compte pour comparer

les deux références est évidemment l'écart sur la température de paroi, donc sur h , soit 4,2 %.

PROBLÈME 5.3

Énoncé

En convection libre sur une plaque plane verticale, comparer l'efficacité d'un chauffage à T_p uniforme imposée et à φ_p uniforme imposé, pour les valeurs suivantes du nombre de Prandtl :

$$Pr = 0,1 \quad ; \quad Pr = 0,7 \quad ; \quad Pr = 1 \quad ; \quad Pr = 10$$

Mettre le résultat en relation avec le cas de la convection forcée.

Solution

- ♣ La comparaison ne peut être basée sur les coefficients h_x car leurs expressions (5.39) et (5.66) ne contiennent pas les mêmes paramètres. Elle ne peut se faire que sur une grandeur adimensionnée, par exemple Nu_x .

Mais les nombres de Nusselt (5.38b) et (5.65b) ne sont pas comparables puisque l'un s'exprime en fonction de Gr_x et l'autre de Gr_x^* , construits sur des températures de référence différentes.

- ◆ Dans le cas $\varphi_p = cte$, il faut donc d'abord construire le nombre de Grashof de la même façon que pour $T_p = cte$, en posant :

$$Gr_x = \frac{g \beta (T_p - T_\infty) x^3}{\nu^2}$$

Avec (5.63b), il vient en regroupant :

$$Gr_x = \Theta(0) \left(\frac{g \beta \varphi_p}{\nu^2 \lambda} \right)^{4/5} x^{16/5}$$

d'où pour le nombre de Nusselt local :

$$Nu_x = \frac{\varphi_p x}{\lambda \{T_p(x) - T_\infty\}}$$

$$Nu_x = \frac{1}{\Theta(0)} \left(\frac{\varphi_p g \beta}{\lambda \nu^2} \right)^{1/5} x^{4/5}$$

ou encore :

$$Nu_x = \frac{1}{\Theta(0)} \left(\frac{Gr_x}{\Theta(0)} \right)^{1/4} = \frac{Gr_x^{1/4}}{\{\Theta(0)\}^{5/4}}$$

Compte tenu de (5.63c) :

$$Nu_x = \left\{ \frac{Pr^2}{4 + 9Pr^{1/2} + 10Pr} \right\}^{1/4} Gr_x^{1/4}$$

♥ Avec $T_p = cte$, le Nusselt local est donné par (5.38b) :

$$Nu_x = \frac{3}{4} \left\{ \frac{2Pr^2}{5(1 + 2Pr^{1/2} + 2Pr)} \right\}^{1/4} Gr_x^{1/4}$$

♠ La comparaison se fera sur le rapport $Nu_x / Gr_x^{1/4}$

$Nu_x / Gr_x^{1/4}$	T_p imposée	φ_p imposé	écart
$Pr = 0,1$	0,162	0,189	16,7 %
$Pr = 0,7$	0,351	0,403	14,8 %
$Pr = 1$	0,4	0,455	13,75 %
$Pr = 10$	0,825	0,93	12,7 %

Dans tous les cas, le chauffage à flux imposé est plus efficace que le chauffage à température imposée ; l'écart diminue légèrement quand le nombre de Prandtl augmente ; il est en moyenne de l'ordre de 15 %.

La condition *flux imposé* est également meilleure en convection forcée, mais de façon beaucoup plus marquée puisque l'écart se chiffre à 25 % (fin du § 1.2.4).

PROBLÈME 5.4

Énoncé

Dans un four, une plaque verticale de hauteur $L = 62 \text{ cm}$ est baignée par de l'air à 80°C .

1 - La plaque est d'abord portée à une température uniforme de 180°C . Calculer le coefficient d'échange moyen et la densité de flux moyenne à la paroi.

2 - Un flux uniforme de 430 W/m^2 est maintenant imposé à la paroi. Calculer le coefficient d'échange moyen et la température moyenne de paroi (utiliser les résultats du problème 5.2), ainsi que la température locale $T_p(L)$ au sommet.

3 - Même question avec un flux uniforme de 40 W/m^2 .

Solution

1 - Les grandeurs thermodépendantes doivent être prises à la température de film (5.67) :

$$T_F = \frac{1}{2}(T_p + T_\infty) = \frac{1}{2}(180 + 80)$$

$$T_F = 130^\circ \text{C}$$

A cette température on a pour l'air :

$$\lambda = 0,0336 \text{ W/m.K} \quad ; \quad \nu = 2,64 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Pr \approx 0,7 \quad ; \quad \beta = \frac{1}{T_F} = \frac{1}{273 + 130} = 2,48 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Au sommet de la paroi, le nombre de Grashof a pour valeur :

$$Gr_L = \frac{g \beta (T_p - T_\infty) L^3}{\nu^2} = \frac{9,81 \times 2,48 \cdot 10^{-3} \times (180 - 80) \times (0,62)^3}{(2,64 \cdot 10^{-5})^2}$$

$$Gr_L = 0,83 \cdot 10^9$$

Cette valeur est légèrement inférieure à 10^9 . On peut donc considérer que l'écoulement est laminaire sur toute la paroi.

Le coefficient d'échange moyen se calcule soit par l'intermédiaire de Nu_L (5.40d) soit directement par (5.40b) :

$$h = \lambda \left\{ \frac{2 Pr^2}{5(1 + 2 Pr^{1/2} + 2 Pr)} \right\}^{1/4} \left\{ \frac{g \beta (T_p - T_\infty)}{\nu^2 L} \right\}^{1/4}$$

$$= 0,0336 \left\{ \frac{2 \times (0,7)^2}{5(1 + 2\sqrt{0,7} + 2 \times 0,7)} \right\}^{1/4} \left\{ \frac{9,81 \times 2,48 \cdot 10^{-3} \times 100}{(2,64 \cdot 10^{-5})^2 \times 0,62} \right\}^{1/4}$$

$$\boxed{h \approx 4,3 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}}$$

La densité de flux moyenne a pour valeur :

$$\varphi_p = h(T_p - T_\infty) = 4,3 \times 100$$

$$\boxed{\varphi_p = 430 \text{ W/m}^2}$$

2 - Le flux imposé est identique au flux moyen trouvé à la question 1. La température moyenne de paroi sera donc voisine de 180°C . Par conséquent la température moyenne de film sera peu modifiée, et les caractéristiques thermophysiques utilisées dans la question 1 peuvent être conservées.

En $x = L$, le coefficient d'échange local est suivant (5.66) et (5.63c) :

$$h_L = \left(\frac{Pr^2}{4 + 9 Pr^{1/2} + 10 Pr} \right)^{1/5} \left(\frac{g \beta \varphi_p \lambda^4}{\nu^2} \right)^{1/5} \frac{1}{L^{1/5}}$$

$$h_L = \left(\frac{0,7^2}{4 + 9\sqrt{0,7} + 10 \times 0,7} \right)^{\frac{1}{5}} \times \left(\frac{9,81 \times 2,48 \cdot 10^{-3} \times 430 \times 3,36^4 \cdot 10^{-8}}{2,64^2 \cdot 10^{-10}} \right)^{\frac{1}{5}} \frac{1}{0,62^{1/5}}$$

$$h_L = 0,483 \times 7,187 \times 1,1 = 3,82 \text{ W} / \text{m}^2 \cdot \text{K}$$

D'après le problème 5.2, le coefficient d'échange moyen avec flux imposé se calcule par :

$$h = \frac{6}{5} h_L$$

$$h = 4,58 \text{ W} / \text{m}^2 \cdot \text{K}$$

On en déduit la température moyenne de paroi :

$$\varphi_p = h(T_p - T_\infty) \quad \text{d'où} \quad T_p = \frac{\varphi_p}{h} + T_\infty$$

$$T_p = \frac{430}{4,58} + 80 \approx 94 + 80$$

$$T_p = 174^\circ \text{C}$$

En $x = L$, la température locale de paroi vaut :

$$T_p(L) = \frac{\varphi_p}{h_L} + T_\infty = \frac{430}{3,82} + 80$$

$$T_p(L) = 192^\circ \text{C}$$

On vérifie a posteriori que l'estimation faite au départ était correcte ($T_F = \frac{1}{2}(T_p + T_\infty) = 127^\circ \text{C}$ au lieu de 130°C). En particulier, Gr_L doit être calculé ici avec $T_p = 192^\circ \text{C}$ (au lieu de 180°C à la question 1) et avec $T_F(L) = \frac{1}{2}(192 + 80) = 136^\circ \text{C}$ (au lieu de 130°C) ; il sera donc peu modifié, et l'écoulement reste laminaire sur toute la paroi.

3 - Avec la nouvelle valeur de φ_p , on ne connaît pas la température moyenne de paroi. Pour avoir les caractéristiques thermophysiques, on doit donc estimer approximativement T_F et procéder ensuite à une itération, si nécessaire.

Le flux est environ 10 fois plus faible que dans la question 2. L'écart $T_p - T_\infty$ va donc se réduire. Admettons pour commencer $T_p \approx 100^\circ \text{C}$, d'où :

$$T_F = \frac{1}{2}(T_p + T_\infty) \approx 90^\circ \text{C}$$

Les caractéristiques correspondantes sont :

$$\lambda = 0,0306 \text{ W} / \text{m} \cdot \text{K} \quad ; \quad \nu = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$$

$$Pr \approx 0,7$$

$$\beta = \frac{1}{T_F} = \frac{1}{273 + 90} = 2,75 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

En reprenant la formule de h_L (question 2) on obtient :

$$h_L = 0,483 \times \left(\frac{9,81 \times 2,75 \cdot 10^{-3} \times 40 \times 3,06^4 \cdot 10^{-8}}{2,2^2 \cdot 10^{-10}} \right)^{1/5} \times 1,1$$

$$h_L \approx 2,42 \text{ W} / \text{m}^2 \cdot \text{K}$$

Le coefficient d'échange moyen vaut ici :

$$h = \frac{6}{5} h_L = 2,90 \text{ W} / \text{m}^2 \cdot \text{K}$$

et la température moyenne de paroi est :

$$T_p = \frac{\varphi_p}{h} + T_\infty = \frac{40}{2,90} + 80$$

$$T = 93,8^\circ \text{ C}$$

En réajustant la température de film, on voit que :

$$T_F = \frac{1}{2} (T_p + T_\infty) \approx 87^\circ \text{ C}$$

au lieu de 90° C . L'écart n'est pas significatif. Il n'est donc pas nécessaire de procéder à une itération.

Au sommet de la paroi ($x = L$) :

$$T_p(L) = \frac{\varphi_p}{h_L} + T_\infty = \frac{40}{2,42} + 80$$

$$T_p(L) = 96,5^\circ \text{ C}$$

Il faut enfin vérifier la condition $Gr_L \lesssim 10^9$

A la température de film $T_F(L) = \frac{1}{2} (96,5 + 80) \approx 88^\circ \text{ C}$ on trouve :

$Gr_L \approx 0,885 \cdot 10^9$. L'écoulement est toujours laminaire.