

Chapitre 3

CONVECTION FORCÉE INTERNE

Certains hommes parlent pendant leur sommeil. Les conférenciers parlent pendant le sommeil des autres.

Albert CAMUS

On recense une grande variété d'écoulements internes, mais une part significative d'entre eux rentre dans la catégorie des écoulements en canalisations, qui font l'objet de ce chapitre.

Nous insistons d'abord sur la notion de régime établi. L'étude de ce comportement asymptotique est ensuite complétée par une analyse détaillée des régimes non établis rencontrés dans les zones d'entrée des canalisations, qui occupent parfois toute la longueur de celles-ci. Un intérêt particulier a été porté sur certaines difficultés d'évaluation des flux de chaleur pariétaux dans ces circonstances.

3.1. - GÉNÉRALITÉS

3.1.1. - Caractère spécifique des écoulements internes

Ce qui différencie les écoulements internes des autres mouvements de fluides, c'est d'abord la géométrie. La paroi constitue ici une enceinte fermée ménageant simplement un ou des orifices d'entrée et de sortie. Mais la présence enveloppante de la paroi a bien évidemment une répercussion déterminante sur la structure des champs de vitesse et de température, que nous allons examiner au fil des paragraphes à venir.

En premier lieu, la notion de *débit*, peu utilisable dans les écoulements externes, prend ici une place essentielle à la fois sous l'aspect dynamique (débit-volume, débit-masse) et sous l'aspect thermique (débit d'énergie, débit thermique unitaire, § 3.1.2). Car pour le physicien et plus encore pour le technicien les débits sont très fréquemment les données numériques de base.

Une autre conséquence fondamentale de la géométrie fermée est qu'elle autorise une structure particulière, qualifiée de "régime établi" (FEMM, § 6.1.3). Au point de vue *dynamique*, un écoulement est *établi* s'il présente les propriétés suivantes :

$$U \neq 0 \quad ; \quad V = 0 \quad ; \quad W = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

où x représente la direction du mouvement.

En pratique, une telle structure se forme de façon asymptotique, après une certaine longueur de parcours, dans un canal rectiligne de section constante. L'avantage des conditions 3.1, lorsqu'elles sont vérifiées, est bien entendu de simplifier notablement les équations de bilans et par conséquent les calculs.

Cette notion de régime établi peut également s'étendre à l'aspect thermique, quoique de façon plus restrictive. Mais là se pose d'abord un problème de définition : l'idée de champ "établi" évoque une certaine uniformité le long du conduit, c'est à dire encore un régime asymptotique dans lequel l'évolution de certaines grandeurs est stabilisée. Simplement, ceci est un peu vague, et pour disposer d'une référence précise il nous faudra la construire nous-mêmes sous la forme d'une définition conventionnelle.

3.1.2. - Température de mélange d'un écoulement interne

La notion de température de mélange, dont nous allons parler à présent, s'appuie sur celle de débit.

Considérons une section plane S_0 dans un écoulement interne : elle est bornée, son contour étant constitué par la ou les parois du conduit (habituellement S_0 est perpendiculaire à la direction générale x du mouvement ; elle est alors dénommée "section droite").

Rappelons tout d'abord les définitions du *débit-volume* q_v et du *débit-masse* q_m à travers S_0 :

$$q_v = \int_{S_0} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS \quad (3.2)$$

$$q_m = \int_{S_0} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS \quad (3.3)$$

On désigne par "*vitesse débitante*" V_d (ou vitesse moyenne, ou vitesse de mélange) la vitesse uniformément distribuée qui assurerait le même débit à travers S_0 (FEMM, Ch. 6) :

$$q_v = S_0 V_d \quad \Leftrightarrow \quad V_d = \frac{1}{S_0} \int_{S_0} \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (3.4)$$

cette vitesse moyenne étant simplement notée V lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Par extension de (3.3) nous définirons ensuite le "*débit thermique*" ou débit d'énergie, qui est la quantité de chaleur transportée à travers S_0 par le fluide en mouvement :

$$q_e = \int_{S_0} \rho C_p T \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (3.5a)$$

Pour un *fluide isochore*, sachant que la chaleur massique C_p est toujours très peu dépendante de T , (3.5a) se réduit à :

$$q_e = \rho C_p \int_{S_0} T \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (3.5b)$$

Le concept de "*température de mélange*" est de même essence que celui de vitesse de mélange : il caractérise la température T_m d'un écoulement isotherme qui transporterait le même débit thermique avec le même débit-volume. Ainsi on pose :

$$q_e = q_v \rho C_p T_m \quad (3.6a)$$

d'où :

$$T_m = \frac{1}{q_v} \int_{S_0} T \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (3.6b)$$

Si S_0 est une *section droite* de l'écoulement, alors la normale \vec{n} est parallèle à la direction x de l'écoulement, et l'expression de T_m devient :

$$T_m = \frac{1}{q_v} \int_{S_0} T U dS \quad (3.6c)$$

Une notion annexe très employée, particulièrement dans les échangeurs, est celle de "*débit thermique unitaire*" q_t , introduite par l'expression :

$$q_t = \rho C_p q_v \quad (\text{en } W / K) \quad (3.7a)$$

d'où la relation avec le débit d'énergie :

$$q_e = q_t T_m \quad (3.7b)$$

Le plus souvent, T_m va servir de température de référence, soit dans les critères de similitude (par exemple le nombre de Stanton), soit pour définir le coefficient d'échange h entre fluide et paroi, sous la forme :

$$\varphi_p = h (T_p - T_m) \quad \text{ou} \quad h (T_m - T_p) \quad (h > 0) \quad (3.7c)$$

ou encore :

$$|\phi_p| = h |T_p - T_m|$$

Ajoutons que l'on désigne parfois T_m par "*température moyenne*", ce qui est impropre car (3.6b) ne représente pas la moyenne arithmétique de T sur S_0 (ou alors il faudrait parler de "moyenne pondérée par la vitesse"). Cependant, en écoulement turbulent établi, où U est sensiblement constante sur S_0 , T_m n'est pas très éloignée de cette moyenne.



Ceci nous amène d'ailleurs à signaler que la température de mélange est une grandeur intéressante au point de vue expérimental, car c'est la température que l'on mesure dans un écoulement homogénéisé, où U et T ont un profil plat sur une section droite. Une telle mesure est réalisable localement même en régime laminaire en disposant un "turbulateur" (diaphragme par exemple) dans le conduit : en aval de celui-ci, dans la zone où le fluide se trouve brassé, T_m peut être obtenue par une sonde de type thermocouple sans avoir à connaître avec précision la position de l'élément thermosensible dans la section, ce qui est bien commode.

3.1.3. - Caractérisation du régime thermique établi

3.1.3.1. - DÉFINITION

Revenons maintenant sur le concept de régime établi, déjà évoqué au § 3.1, pour le préciser.

Une condition telle que $\partial T / \partial x = 0$ en tout point (comme pour la vitesse) reviendrait, sauf circonstance très particulière (voir § 3.3.1) à considérer un écoulement isotherme, ou un transfert purement conductif. Par contre, une similitude des profils de vitesse le long de l'écoulement semble constituer un critère acceptable, en prenant comme référence les deux températures significatives de l'écoulement : température de paroi T_p et température de mélange T_m (soit $\Delta T^0 = T_p - T_m$). D'autre part, puisque T dépend du champ de vitesse, le champ de température ne peut en général avoir un comportement asymptotique que s'il en est déjà ainsi pour la vitesse. A partir de ces constatations, il apparaît que la manière la plus simple de définir un "*régime thermique établi*" compatible avec un transfert convectif est de formuler la double condition :

1) Régime dynamique établi

(propriété 3.1)

2) Similitude des profils de température :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{T_p - T}{T_p - T_m} = 0 \quad (3.8a)$$

Nous verrons plus loin dans quelles conditions pratiques cette propriété est réalisée, mais une de ses conséquences va être examinée tout de suite. Notons enfin que si le régime dynamique établi est une chose assez courante, le régime thermique établi constitue une situation moins fréquente.

3.1.3.2. - CONSÉQUENCE

Soient y la distance à la paroi et L^0 la longueur de référence de l'écoulement. Posons :

$$\eta = y / L^0$$

La condition (3.8a) s'écrit encore :

$$\frac{T_p - T}{T_p - T_m} = f(\eta) \quad (\text{indépendante de } x) \quad (3.8b)$$

d'où :

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = -f'(\eta)(T_p - T_m)$$

En particulier, à la paroi :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = -f'(0)(T_p - T_m) \quad (3.8c)$$

Rappelons d'autre part l'expression du flux pariétal (3.7c) :

$$\varphi_p = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = h(T_p - T_m) \quad (3.8d)$$

ou encore :

$$-\frac{\lambda}{L^0} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = h(T_p - T_m)$$

En identifiant (3.8c) et (3.8d) il vient :

$$h = \frac{\lambda}{L^0} f'(0) = cte \quad (3.8e)$$

La condition de régime thermique établi (3.8a) implique donc la propriété : " h indépendant de x, constant sur la paroi".

3.2. - ADAPTATION DES ÉQUATIONS DE BILANS AUX ÉCOULEMENTS INTERNES

La relative proximité des parois par rapport à tout point du domaine fluide, qui est une caractéristique des écoulements internes, a pour conséquence une *structure dominante de type couche limite*, aussi bien pour le champ de vitesse (FEMM, Ch. 6) que pour le champ thermique. On est donc amené à reprendre les hypothèses du § 1.1.2.

Les géométries courantes correspondent aux canaux rectangulaires plats et aux tubes cylindriques. Voici les équations dynamiques et thermiques correspondantes.

3.2.1. - Équations en coordonnées cartésiennes

Dans un tube de section rectangulaire plate (épaisseur \ll largeur) on est en coordonnées cartésiennes bidimensionnelles, et avec une direction x longitudinale les équations sont analogues à celles du système (1.5) (voir également FEMM, § 6.5.2). Réécrivons-les néanmoins pour la clarté de l'exposé :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\
 U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\
 \frac{\partial p^*}{\partial y} &= 0 \\
 U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Mais quand on a affaire à un "*régime dynamique établi*", le système est allégé, et sachant que $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, il se réduit à :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial p^*}{\partial y} = 0 \\
 U \frac{\partial T}{\partial x} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

3.2.2. - Équations en coordonnées cylindriques

La formulation complète des équations de bilans en coordonnées cylindriques figure dans FEMM (Annexe 1.A.5). Si les conditions aux limites sont à symétrie axiale il reste dans les conditions présentes :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) &= 0 \\
 U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \\
 \frac{\partial p^*}{\partial r} &= 0 \\
 U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

et avec un régime dynamique établi :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial p^*}{\partial r} = 0 \\
 U \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2.3. - Conditions aux limites

Le transfert de chaleur convectif est bien entendu dépendant des conditions aux limites, dynamiques et thermiques, comme dans les écoulements externes.

Aux parois, on a toujours pour la vitesse :

$$U = 0 \quad ; \quad V = 0 \tag{3.13a}$$

mais en ce qui concerne la température, il y a une plus grande diversité de situations.

On retrouve tout d'abord les cinq familles de conditions déjà évoquées au chapitre 1, en particulier :

- Condition de 1^{ère} espèce (ou de Dirichlet) : T_p imposée (3.13b)

- Condition de 2^{ème} espèce (ou de Von Neumann) : φ_p imposée (3.13c)

- Condition de 3^{ème} espèce (ou de Fourier) : relation imposée entre T_p et φ_p par l'intermédiaire d'un coefficient d'échange (3.13d)

Mais outre le fait que les applications physiques correspondent souvent à des situations plus ou moins intermédiaires, il peut arriver ici que dans les géométries

où deux parois sont présentes (canaux plans et annulaires) les conditions soient différentes sur chacune d'elles.

Enfin, pour obtenir un régime thermique établi, des conditions spécifiques seront à respecter.

3.2.4. - Écoulements dissipatifs

Dans le fil du paragraphe précédent, et pour être complet, il faut ajouter que dans un certain nombre de cas les conditions aux limites ne sont pas les seules responsables du transfert convectif. De telles situations se rencontrent lorsqu'il existe une ou plusieurs sources volumiques de chaleur au sein du fluide, et en particulier quand la dissipation d'énergie mécanique en chaleur est significative dans l'écoulement. Cette production irréversible de chaleur, liée à la viscosité du fluide, est représentée par la "*fonction de dissipation*" Φ , qui s'ajoute au second membre de l'équation d'énergie (FEMM, équation 1.57), et donc par $\Phi / \rho C_p$ après division des deux membres par ρC_p .

En restant dans les approximations de la couche limite, Φ va se simplifier considérablement par rapport à sa formulation générale ; il reste :

- en coordonnées cartésiennes :

$$\Phi = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (3.14a)$$

et l'équation d'énergie (3.9) prend la forme :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_p} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (3.14b)$$

- en coordonnées cylindriques (FEMM, Annexe 1.A.5) :

$$\Phi = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \quad (3.15a)$$

avec cette fois comme équation d'énergie :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{\rho C_p} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \quad (3.15b)$$

3.2.5. - Adimensionnement des équations

Le problème de la similitude a été assez longuement évoqué dans le chapitre 1 à propos des écoulements externes. Le cadre général reste le même ici, en particulier pour ce qui concerne la caractérisation des critères de similitude. Il convient simplement d'adapter les grandeurs de référence à la situation présente.

3.2.5.1. - RÉFÉRENCE AUX SCALAIRES

En toute logique, la longueur de référence naturelle pour les écoulements internes est la longueur caractéristique \mathcal{L} (FEMM, § 6.6.1). En pratique, l'usage a imposé le "diamètre hydraulique" $D_h = 4\mathcal{L}$, ce qui ne change rien au fond :

$$L^0 = D_h = \frac{4 \times \text{section}}{\text{périmètre}} \quad (3.16a)$$

La vitesse de référence la plus représentative est la vitesse débitante :

$$V^0 = V_d \quad (3.16b)$$

qui sert également à construire la pression de référence :

$$p^0 = \rho V_d^2 \quad (3.16c)$$

Pour la température (ou plutôt le ΔT) de référence, les paramètres les plus significatifs sont la température de paroi T_p et la température de mélange T_m définie par (3.6), d'où le choix :

$$\Delta T^0 = |T_p - T_m| \quad (3.16d)$$

Les nombres de Reynolds et de Péclet (qui correspondent à des grandeurs de référence choisies dans l'écoulement) prennent donc la forme suivante :

$$\Re = \frac{V_d D_h}{\nu} \quad ; \quad Pe = \frac{V_d D_h}{a} = \Re Pr \quad (3.17)$$

et l'on notera qu'ils sont ici indépendants de l'abscisse x (du moins dans un canal de section constante).

Ajoutons à ces deux paramètres le critère de similitude relatif à la dissipation visqueuse, en relation avec la fonction de dissipation Φ (FEMM, § 2.4 et 2.5.3) :

$$\Gamma_{\phi v} = \frac{\nu V^0}{C_p \Delta T^0 L^0} = \frac{Ec}{\Re} \quad (3.18)$$

où le *nombre d'Eckert* Ec est un terme de couplage entre la diffusion de quantité de mouvement et la dissipation :

$$Ec = \frac{(V^0)^2}{C_p \Delta T^0} \quad (3.19)$$

c'est à dire dans le cas présent :

$$\Gamma_{\phi v} = \frac{\nu V_d}{C_p |T_p - T_m| D_h} \quad (3.20)$$

3.2.5.2. - RÉFÉRENCE AUX GRADIENTS

Dans le système de référence à la paroi (§ 1.1.3.4) les critères de similitude deviennent :

- coefficient de frottement :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho V_d^2} \quad (3.21)$$

- nombre de Stanton :

$$St = \frac{\varphi_p}{\rho C_p V_d |T_p - T_m|} = \frac{h}{\rho C_p V_d} \quad (3.22)$$

- anonyme (FEMM, §2.5.3), correspondant à Γ_{ϕ_v} (3.18) :

$$\Gamma_{\phi_\tau} = \frac{\tau_p}{\rho C_p |T_p - T_m|} = \frac{1}{2} C_f Ec \quad (3.23)$$

- et puis encore pour les fidèles du nombre de Nusselt :

$$Nu = \frac{h D_h}{\lambda} = \frac{\varphi_p D_h}{\lambda |T_p - T_m|} = St Pe \quad (3.24)$$

On remarquera que, contrairement à \Re et Pe , le nombre de Stanton possède une signification *locale* (comme en écoulement externe), du fait que dans le cas général T_p , T_m et φ_p sont des fonctions de x (et ceci même si le régime dynamique est établi). On peut en dire autant de Γ_{ϕ_τ} , et aussi de Γ_{ϕ_v} (§ précédent). Nous en reparlerons dans la suite.

3.3. - ÉCOULEMENTS ANISOTHERMES ENTRE DEUX PLANS PARALLÈLES

3.3.1. - Une première approche : l'écoulement de Couette

Le problème de Couette est un exemple classique en mécanique des fluides pour son intérêt didactique : il concerne l'entraînement d'un fluide entre deux plans parallèles dont l'un est fixe et l'autre mobile. L'aspect dynamique a été examiné dans FEMM, § 6.2.1.

3.3.1.1. - CHAMP DE TEMPÉRATURE DANS LE FLUIDE

Dans le cas général, où un gradient de pression motrice dp^*/dx est appliqué à l'écoulement, le champ de vitesse est décrit par la loi :

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} y^2 + \left(\frac{U_e}{e} - \frac{e}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \right) y \quad (3.25)$$

Les notations sont indiquées sur la figure 3.1.

Nous allons examiner ici le transfert convectif dans les conditions suivantes :

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{\text{H}} \left. \begin{array}{l}
 - \text{paroi mobile } (y = e) : \text{température imposée } T_e \\
 - \text{paroi fixe } (y = 0) : \text{température imposée } T_0 \\
 - \text{gradient de température } \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \forall y \\
 - \text{fonction de dissipation } \Phi \text{ prise en compte}
 \end{array} \right\} \quad (3.26)
 \end{array}$$

Tous les paramètres étant indépendants de x , le problème est unidimensionnel, et constitue un cas particulier de *régime thermique établi*.

Reprenons le bilan local d'énergie (3.14b) :


$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_p} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$$

Compte tenu des conditions imposées :

$$V = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

il nous reste, sachant que $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$:

$$\frac{d^2 T}{d y^2} = - \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{d U}{d y} \right)^2 \quad (3.27)$$

 Si nous avons négligé la dissipation Φ , le terme en $(\partial U / \partial y)^2$ serait absent et nous aurions simplement $d^2 T / d y^2 = 0$, c'est à dire une distribution linéaire de température, comme dans un problème purement conductif.

La vitesse U étant donnée par un polynôme de degré 2, on voit qu'en remplaçant (3.25) dans (3.27) et en intégrant deux fois on obtiendra pour la température T un polynôme d'ordre 4, assez lourd à manipuler, et dont les coefficients dépendront des données (en particulier T_0 , T_e , U_e et $d p^* / d x$).

Pour mener plus simplement le calcul à son terme, plaçons-nous dans un cas particulier : en liant le gradient de pression à la vitesse U_e , nous pouvons nous débarrasser de $d p^* / d x$. Posons donc (cf. dernier terme de U dans 3.25) :

$$\frac{U_e}{e} = cte \times \frac{e}{2 \mu} \frac{d p^*}{d x} \quad (3.28a)$$

et tant qu'à faire de simplifier, allons jusqu'au bout en prenant la constante égale à 1, ce qui revient à imposer un gradient de pression tel que :

$$\textcircled{\text{H}} \quad \frac{d p^*}{d x} = \frac{2 \mu}{e^2} U_e \quad (3.28b)$$

de sorte que (3.25) se réduit à :

$$U = \frac{U_e}{e^2} y^2 \quad (3.28c)$$

et que (3.27) devient :

$$\frac{d^2 T}{d y^2} = -\frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{2 U_e}{e^2} y \right)^2$$

Le champ de température est alors de la forme :

$$T = -\frac{4 \mu U_e^2}{\lambda e^4} \frac{y^4}{12} + A y + B$$

Sur la paroi fixe : $y = 0$ et $T = T_0$, d'où :

$$B = T_0$$

Sur la paroi mobile : $y = e$, $T = T_e$, et

$$A = \frac{T - T_0}{e} + \frac{1}{3} \frac{\mu U_e^2}{\lambda e}$$

soit :

$$T - T_0 = -\frac{1}{3} \frac{\mu U_e^2}{\lambda e^4} y^4 + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{1}{3} \frac{\mu U_e^2}{\lambda e} \right) y \quad (3.29)$$

La figure 3.1 illustre quelques unes des distributions de température possibles, selon les valeurs de U_e et le signe de $T_e - T_0$. Le cas limite $U_e = 0$ correspond évidemment à un transfert par conduction pure tel que $T - T_0 = (T_e - T_0) y / e$, que l'on retrouve d'ailleurs en l'absence de dissipation ($d^2 T / d y^2 = 0$, voir plus haut).

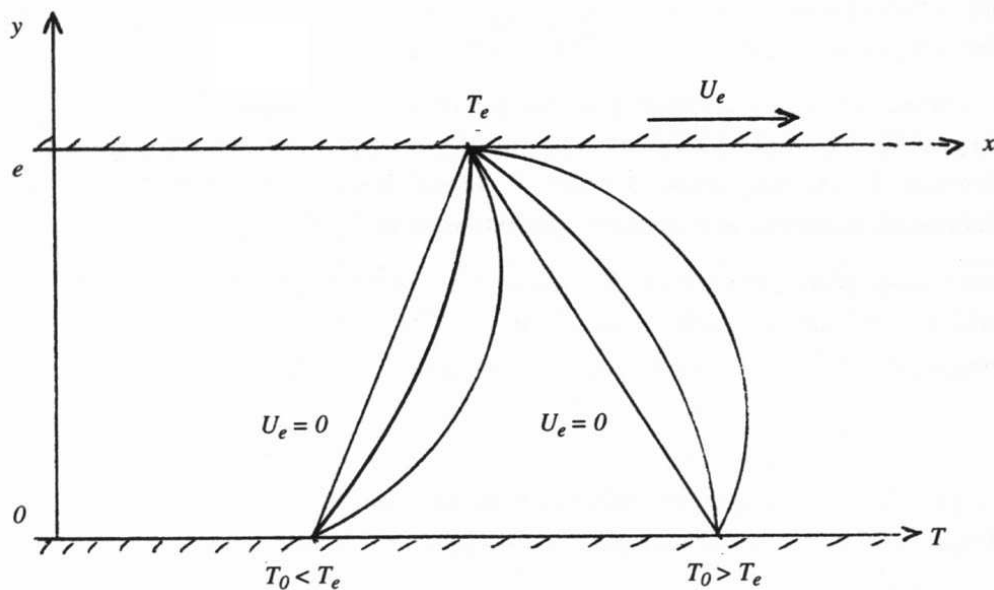


FIG. 3.1 – *Ecoulement de Couette avec parois à température imposée. Cas où $d p^* / d x = 2 \mu U_e / e^2$.*

3.3.1.2. - FLUX DE CHALEUR AUX PAROIS

Intéressons-nous maintenant aux transferts thermiques pariétaux. Les densités de flux de chaleur sur les deux parois seront définies respectivement par :

$$\varphi_{p0} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} ; \quad \varphi_{pe} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=e}$$

le même axe y ayant été choisi dans les deux expressions pour comparer plus facilement ces flux en valeur algébrique.

Sur la paroi fixe, il vient à partir de (3.29) :

$$\varphi_{p0} = -\frac{\lambda}{e} (T_e - T_0) - \frac{1}{3} \frac{\mu U_e^2}{e} \quad (3.30a)$$

Sur la paroi mobile :

$$\varphi_{pe} = \frac{1}{3} \frac{\mu U_e^2}{e^4} 4e^3 - \frac{\lambda}{e} (T_e - T_0) - \frac{1}{3} \frac{\mu U_e^2}{e}$$

c'est à dire :

$$\varphi_{pe} = -\frac{\lambda}{e} (T_e - T_0) + \frac{\mu U_e^2}{e} \quad (3.30b)$$

Les relations (3.30) montrent bien, dans les valeurs des flux, la part du ΔT imposé entre les deux parois (premier terme, conductif) et la part de la dissipation (second terme), les deux pouvant être de même signe ou de signe contraire selon les valeurs de $T_e - T_0$ et de U_e en particulier. On voit que la puissance dissipée ne se répartit pas de façon symétrique entre les deux parois, mais selon une proportion 3/1. Ceci provient du fait que le gradient de vitesse $\partial U / \partial y$ n'a pas la même valeur des deux côtés, à cause du gradient de pression. Le partage n'est égal que si dp^* / dx est nul, puisqu'alors le profil de vitesse est linéaire (cf. formule 3.25 et problème 3.1).

3.3.1.3. - ANNOTATIONS

Tel qu'il a été présenté ici, le modèle de Couette apparaît comme un problème d'école, trop schématique pour être réaliste.

Il n'est pourtant pas déconnecté de la réalité : si au lieu de deux plans parallèles nous envisageons deux cylindres coaxiaux dont l'entrefer est très petit par rapport au diamètre, alors nous sommes dans la géométrie classique des paliers en mécanique, la fonction Φ représentant l'énergie mécanique dissipée dans le lubrifiant qui remplit l'entrefer.

Reste le gradient de pression dp^* / dx qui pose problème puisqu'il est forcément nul si les cylindres sont parfaitement coaxiaux, l'écoulement étant refermé sur lui-même. En fait, dans un palier réel en rotation, les forces en présence imposent toujours une certaine excentration, qui est à l'origine d'un

gradient de pression. Bien que l'épaisseur e soit alors variable, on peut conserver l'hypothèse $V = 0$, de sorte que le problème reste unidimensionnel en première approximation.

3.3.2. - Écoulement à flux pariétal imposé

L'écoulement entre deux plans parallèles avec flux de chaleur imposé n'est guère différent de l'écoulement dans des tubes cylindriques, pour lesquels la méthode sera détaillée au § 3.4.1. Un récapitulatif pour différentes sections rectangulaires est présenté § 3.4.3.

Indiquons simplement le résultat. S'agissant d'un cas où il existe une solution qui correspond aux conditions du régime thermique établi, on a : $h = cte$ (§ 3.1.3). Le calcul donne :

$$\boxed{h = 2,06 \frac{\lambda}{b}} \quad (3.31)$$

la distance entre les parois étant égale à $2b$.

Ce résultat peut être exprimé sous forme adimensionnée par le nombre de Stanton :

$$St = \frac{h}{\rho C_p V_d} = \frac{2,06 \lambda}{b \rho C_p V_d} = 2,06 \frac{a}{b V_d} \quad (3.32a)$$

Le diamètre hydraulique de la section est ici (section rectangulaire plate, FEMM 6.107 et 6.115a) :

$$D_h = 4b \quad (3.32b)$$

En introduisant le nombre de Péclet :

$$Pe = \frac{V_d \times 4b}{a} = \Re Pr$$

on voit que :

$$St = \frac{8,24}{Pe} = \frac{8,24}{\Re Pr} \quad (3.32c)$$

Dans ce type de situation, on préfère souvent utiliser le nombre de Nusselt. En effet, si l'on ne s'attache pas spécialement à l'aspect "similitude", cela permet de manipuler une expression particulièrement simple puisque (cf. 3.24) :

$$Nu = \frac{h D_h}{\lambda} = St Pe$$

c'est à dire :

$$\boxed{Nu = 8,24} \quad (3.33)$$

Pour le domaine de validité de ce résultat, le lecteur se reportera au paragraphe 3.6.6.

3.3.3. - Écoulement à température de paroi imposée

Lorsque la température de paroi est fixée, indépendante de x , le champ de température possède encore une solution asymptotique du type "régime thermique établi". Toutefois la résolution est un peu plus laborieuse. Elle sera évoquée pour les tubes circulaires (§ 3.4.2).

Quand le fluide circule entre deux plans parallèles distants de $2b$, on trouve :

$$\boxed{h = 1,89 \frac{\lambda}{b}} \quad (3.34)$$

soit un coefficient d'échange légèrement plus faible que si φ_p est imposé. Et sous forme adimensionnelle :

$$St = \frac{7,54}{\Re Pr}$$

$$\boxed{Nu = 7,54} \quad (3.35)$$

Le calcul du flux φ_p est évoqué au § 3.4.3.

3.4. - ÉCOULEMENTS ANISOTHERMES DANS UN TUBE CYLINDRIQUE

3.4.1. - Flux pariétal imposé ; régime thermique établi

- ♣ On se propose d'étudier le transfert de chaleur dans un écoulement laminaire de fluide isochore, avec les données suivantes :
 - Conduite cylindrique rectiligne de rayon R
 - Régime dynamique établi (condition 3.1)
 - Flux de chaleur φ_p imposé à la paroi, indépendant de x

Le champ de température T va évoluer le long de la canalisation. On aura donc : $T = T(x, r)$.

Mais on peut se demander si, après une zone de transition à l'entrée, la forme des profils de température se stabilise pour faire apparaître une similitude le long de l'écoulement. Autrement dit, nous allons regarder si l'équation d'énergie (3.12) :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.36)$$

possède une solution compatible avec la condition de régime thermique établi :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{T_p - T}{T_p - T_m} = 0 \quad (3.37)$$

Nous avons vu qu'une conséquence de cette condition (§ 3.1.3) est que : $h = cte$. Puisque :

$$\varphi_p = h(T_p - T_m) = cte$$

il en résulte que :

$$T_p - T_m = cte \quad (3.38a)$$

de sorte que la spécification (3.37) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} (T_p - T) = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_p}{dx} = \frac{dT_m}{dx} \quad (3.38b)$$

- ◆ Essayons alors de raccrocher $\partial T / \partial x$ aux données du problème. Pour cela, nous allons écrire le bilan thermique sur une tranche dx de canalisation.

Quelque soit le régime considéré, le débit thermique transporté par le fluide à travers une section droite du tube est, d'après (3.5b) et (3.6c) :

$$q_e = \rho C_p \int_{S_0} T U dS = \rho C_p q_v T_m \quad (3.39a)$$

Compte tenu du flux φ_p qui traverse la surface latérale $d\Sigma$, le bilan thermique entre deux sections d'abscisses x et $x + dx$ s'établit ainsi :

$$\rho C_p q_v \{T_m(x + dx) - T_m(x)\} = \varphi_p d\Sigma \quad (3.39b)$$

où φ_p est compté positif si le flux de chaleur est dirigé de la paroi vers le fluide ; en outre, $d\Sigma = 2\pi R dx$. D'où

$$\rho C_p q_v \frac{dT_m}{dx} = 2\pi R \varphi_p \quad (3.40a)$$

et en introduisant la vitesse débitante V_d (3.4) qui vaut ici $q_v / \pi R^2$, il vient pour le gradient longitudinal de température :

$$\boxed{\frac{dT_m}{dx} = \frac{2\varphi_p}{\rho C_p V_d R}} \quad (3.40b)$$

expression valable dans tous les cas (y compris si $\varphi_p = \varphi_p(x)$).

On voit que lorsque $\varphi_p = cte$, T_m est une fonction linéaire de x .

- ♥ Prenons maintenant en compte le régime dynamique établi, ainsi que $\varphi_p = cte$. Sachant alors que le profil de vitesse dans un tube cylindrique a pour expression (FEMM, 6.16a et 6.17c) :

$$U = 2V_d \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (3.41)$$

en remplaçant la diffusivité a par $\frac{\lambda}{\rho C_p}$, et compte tenu des propriétés (3.38b) et (3.40b), l'équation en T (3.36) à résoudre prend la forme (après multiplication par r et simplification) :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{4 \varphi_p}{\lambda R} \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right)$$

Cette équation est intégrable. Il existe donc bien un régime thermique établi, au sens où nous l'avons entendu. Intégrons une première fois :

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{4 \varphi_p}{\lambda R} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right) + cte$$

Le flux de chaleur étant forcément nul sur l'axe, on a $\partial T / \partial r = 0$ pour $r = 0$, d'où $cte = 0$.

Après division par r suivie d'une seconde intégration, il vient :

$$T = \frac{4 \varphi_p}{\lambda R} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16 R^2} \right) + cte$$

Pour exprimer la constante, il est préférable de se référer à la température de paroi $T_p = T(r = R)$ plutôt qu'à la température T_0 sur l'axe, plus difficilement mesurable. Alors :

$$cte = T_p - \frac{4 \varphi_p}{\lambda R} \left(\frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{16} \right)$$

et finalement :

$$\boxed{T - T_p = \frac{\varphi_p}{\lambda R} \left(r^2 - \frac{r^4}{4R^2} - 3 \frac{R^2}{4} \right)} \quad (3.42a)$$

Représenté graphiquement, ce profil de température comporte un point d'inflexion (voir fig. 3.3).

En particulier, sur l'axe :

$$T_0 - T_p = - \frac{3 \varphi_p R}{4 \lambda} = cte \quad (3.42b)$$

♠ A partir de (3.41) et (3.42a), calculons maintenant la température de mélange, définie par (3.6c) :

$$T_m = \frac{I}{q_v} \int_{S_0} T U dS$$

ou encore, en allégeant le formalisme, puisque $\int_{S_0} U dS = q_v = cte$:

$$T_m - T_p = \frac{1}{q_v} \int_{S_0} (T - T_p) U \, dS \quad (3.43a)$$

Remplaçons $T - T_p$ et U , puis regroupons. Il vient :

$$\begin{aligned} T_m - T_p &= \frac{2V_d \varphi_p}{q_v \lambda R} \int_0^R \left(\frac{7}{4} r^2 - \frac{5}{4} \frac{r^4}{R^2} + \frac{1}{4} \frac{r^6}{R^4} - \frac{3R^2}{4} \right) 2\pi r \, dr \\ &= \frac{4\pi V_d \varphi_p}{q_v \lambda R} \left(-\frac{11}{96} R^4 \right) \end{aligned}$$

Puisque $q_v = \pi R^2 V_d$, la formule se réduit à :

$$T_m - T_p = -\frac{11}{24} \frac{R \varphi_p}{\lambda} \quad (3.43b)$$

et on constate que dans ce cas particulier, l'écart de température $T_m - T_p$ ne dépend pas de la vitesse du fluide.

Il ne reste plus qu'à raccorder ce résultat à la définition du coefficient d'échange :

$$h = \frac{\varphi_p}{(T_m - T_p)} = \frac{24}{11} \frac{\lambda}{R}$$

ou, puisque la longueur de référence est le diamètre hydraulique, ici D :

$$\boxed{h = \frac{48}{11} \frac{\lambda}{D} \approx 4,36 \frac{\lambda}{D}} \quad (3.44)$$

Sous forme adimensionnée, on peut donner soit le nombre de Nusselt $Nu = h D / \lambda$:

$$\boxed{Nu = 4,36} \quad (3.45a)$$

soit le nombre de Stanton $St = Nu / \Re Pr = Nu / Pe$:

$$St = \frac{4,36}{Pe} \quad (3.45b)$$

On voit que dans tous les cas, le problème ne fait intervenir que deux paramètres significatifs : λ et D .

3.4.2. - Température de paroi imposée ; régime thermique établi

Examinons à présent le cas où c'est la température de paroi qui est fixée. Nous allons voir que le calcul présente un peu plus de difficultés que lorsque le flux est imposé. Nous comparerons ensuite les deux situations.

3.4.2.1. - UNE PROPRIÉTÉ DU CHAMP DE TEMPÉRATURE EN RÉGIME ÉTABLI

Dans le paragraphe 3.1.3, nous avons codifié la notion de régime thermique établi, qui repose en particulier sur la condition (3.8a) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{T_p - T}{T_p - T_m} = 0$$

En calculant explicitement cette dérivée, on fait apparaître une propriété de la température, indépendante des conditions aux limites, qui peut rendre quelques services [Kays et Crawford]. En effet, l'expression ci-dessus se développe ainsi (le symbole ' désignant la dérivation par rapport à x) :

$$\frac{(T'_p - T')(T_p - T_m) - (T_p - T)(T'_p - T'_m)}{(T_p - T_m)^2} = 0$$

Si le régime est établi, T est partout soit supérieure, soit inférieure à T_p ; on ne peut donc pas avoir $T_p - T_m = 0$, et la relation précédente se traduit par la nullité du numérateur, soit après simplification :

$$T'_p (T - T_m) + T' (T_m - T_p) + T'_m (T_p - T) = 0$$

ou encore :

$$T' = T'_p \frac{T - T_m}{T_p - T_m} + T'_m \frac{T_p - T}{T_p - T_m} \quad (3.46a)$$

Ecrivons la première des deux fractions sous la forme :

$$\frac{T - T_m}{T_p - T_m} = \frac{(T_p - T_m) + T - T_m - (T_p - T_m)}{T_p - T_m} = 1 + \frac{T - T_p}{T_p - T_m} \quad \text{ou} \quad = 1 - \frac{T_p - T}{T_p - T_m}$$

Alors, (3.46a) devient :

$$T' = T'_p - \frac{T_p - T}{T_p - T_m} T'_p + \frac{T_p - T}{T_p - T_m} T'_m \quad (3.46b)$$

et se présente donc comme une relation entre les dérivées $\partial T / \partial x$, $\partial T_p / \partial x$, $\partial T_m / \partial x$ et le champ adimensionné $(T_p - T) / (T_p - T_m)$. Celle-ci va nous servir dès à présent pour les calculs dans les canaux à température de paroi imposée.

3.4.2.2. - PROFIL LONGITUDINAL DE TEMPÉRATURE

Comme point de départ, reportons-nous à l'équation de bilan thermique (3.40b) :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{2 \varphi_p(x)}{\rho C_p V_d R}$$

valable, rappelons-le, en toutes circonstances.

Remplaçons d'abord $\varphi_p(x)$ par sa formulation (3.7c), qui fait intervenir la température de paroi T_p :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{2h(T_p - T_m)}{\rho C_p V_d R} \quad (3.47a)$$

Ⓜ L'hypothèse $T_p = cte$ s'introduit ici. Sous cette condition, on a $dT_m \equiv d(T_m - T_p)$ et la relation précédente s'écrit également :

$$\frac{d(T_m - T_p)}{T_m - T_p} = -\frac{2h}{\rho C_p V_d R} dx = -2St \frac{dx}{R} \quad (3.47b)$$

Ⓜ où l'on a de surcroît $h = cte$ si l'on se place dans une zone de régime thermique établi (propriété 3.8e).

L'intégration de (3.47) est alors immédiate et donne :

$$\boxed{T_m - T_p = (T_0 - T_p) \exp\left(-2St \frac{x}{R}\right)} \quad (3.48)$$

en désignant par T_0 la température de mélange au début de la zone de régime établi (soit en $x = 0$).



C'est ici que la relation (3.46b) va nous être utile : si l'on prend $T_p = cte$ (c'est à dire $T_p' = 0$), elle se simplifie et devient :

$$T' = \frac{T_p - T}{T_p - T_m} T_m'$$

ou encore :

$$\frac{T'}{T - T_p} = \frac{T_m'}{T_m - T_p} \quad (3.49a)$$

et puisque $T_p = cte$:

$$\frac{d(T - T_p)}{T - T_p} = \frac{d(T_m - T_p)}{T_m - T_p} \quad (3.49b)$$

Compte tenu de (3.47), il vient après intégration :

$$\boxed{T - T_p = (T - T_p)_{x=0} \exp\left(-2St \frac{x}{R}\right)} \quad (3.50)$$

Les résultats (3.48) et (3.50) font donc apparaître une évolution exponentielle des températures parallèlement à l'axe du tube.

3.4.2.3. - PROFIL TRANSVERSAL DE TEMPÉRATURE

En ce qui concerne la distribution de température dans une section droite, on constate que la formule (3.50) est de la forme :

$$T - T_p = G(r) e^{-\beta x} \quad (3.51a)$$

$$\text{en posant : } \beta = \frac{2St}{R} \quad (3.51b)$$

Le problème se ramène donc à la détermination de la fonction $G(r)$. Il faut pour cela résoudre l'équation d'énergie (3.12) :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.52a)$$

De (3.51), on tire :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\beta G(r) e^{-\beta x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{dG}{dr} e^{-\beta x}$$

ce qui donne en reportant dans (3.52a), avec $U = 2V_d (1 - r^2/R^2)$ (cf. relation 3.41) :

$$-2V_d \beta \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) G(r) = \frac{a}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) \quad (3.52b)$$

Malheureusement, la présence de la fonction $G(r)$ au premier membre nous empêche d'intégrer analytiquement cette équation, comme nous avons pu le faire avec φ_p fixé (§ 3.4.1). Une solution serait bien de choisir a priori une forme analytique intégrable pour $G(r)$, c'est à dire ici un polynôme. Mais pour avoir une description assez fidèle du champ de température vers la paroi, il faut au moins un polynôme de degré 3, et même 4 de préférence comme dans la relation (3.42a). Pourtant cette voie est impraticable car nous n'avons pas assez de conditions aux limites pour déterminer tous les coefficients d'un tel polynôme.

Si l'on veut rester dans un cadre analytique, il n'y a qu'une porte de sortie : procéder par approximations successives à partir d'une distribution initiale à peu près réaliste. Cette distribution existe : c'est celle que nous avons trouvée avec la condition de flux φ_p imposée. On adopte donc pour démarrer le processus la fonction (3.42a) :

$$G(r) = \frac{\varphi_p}{\lambda R} \left(r^2 - \frac{r^4}{4R^2} - \frac{3}{4} R^2 \right)$$

Remplaçons maintenant $G(r)$ dans le premier membre de (3.52b). Cela donne :

$$-2V_d \beta \frac{\varphi_p}{\lambda R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \left(r^2 - \frac{r^4}{4R^2} - \frac{3R^2}{4} \right) = \frac{a}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) \quad (3.53)$$

Nous avons cette fois entre les mains une équation intégrable en r , qui va fournir une première estimation de $G(r)$, et donc de $T - T_p$ (en utilisant évidemment la condition à la limite $T = T_p = cte$ pour $r = R$).

Cette solution provisoire va alors être réinjectée dans le premier membre de (3.52b), ce qui conduira après intégration à une seconde estimation plus précise de $G(r)$ et ainsi de suite. A chaque étape, on est en mesure de contrôler la convergence en calculant, à partir de $G(r)$, la température de mélange et la densité de flux φ_p , d'où le coefficient h . Le calcul est un peu long et nous nous limiterons ici à la première itération, les suivantes n'apportant rien d'original.

Donc nous développons et nous intégrons une première fois (3.53), ce qui donne après regroupement des termes (rappelons que β a été défini en 3.51b) :

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{2V_d \beta \varphi_p}{a \lambda R} \left(-\frac{3R^2}{8} r + \frac{7}{16} r^3 - \frac{5}{24R^2} r^5 + \frac{1}{32R^4} r^7 \right) \quad (3.54a)$$

(la constante d'intégration est nulle vu que $dG/dr = 0$ sur l'axe).

En intégrant à nouveau il vient une première estimation du profil de température :

$$G(r) = (T - T_p)_{1^{ère} \text{ iter}} \quad (3.54b)$$

$$= -\frac{2V_d \beta \varphi_p}{a \lambda R} \left(-0,1875 R^2 r^2 + 0,1094 r^4 - 0,0347 \frac{r^6}{R^2} + 0,0039 \frac{r^8}{R^4} + 0,109 R^4 \right)$$

où la dernière constante est déterminée à partir de $G(R) = 0$ ($\Leftrightarrow T = T_p$).

Mais parallèlement, l'expression du flux à la paroi permet d'accéder à la première estimation du coefficient d'échange :

$$\varphi_p = \lambda \left(\frac{dG}{dr} \right)_{r=R}$$

soit après calcul, à partir de (3.54a) :

$$\varphi_p = -\lambda \frac{2V_d}{a} \beta \frac{\varphi_p}{\lambda R} (-0,116 R^3)$$

et en remplaçant β (qui contient h , cf. 3.51b), $a = \lambda / \rho C_p$ et $R = D/2$:

$$h \approx 3,81 \frac{\lambda}{D} \quad \text{ou} \quad Nu \approx 3,81$$

La convergence est pratiquement atteinte dès la seconde itération, et la limite s'établit à :

$$\boxed{h \approx 3,66 \frac{\lambda}{D} \quad ; \quad Nu \approx 3,66} \quad (3.55a)$$

ou encore :

$$St = \frac{3,66}{Pe} \quad (3.55b)$$

Le champ de température est assez correctement décrit par le polynôme (3.54b) et possède la propriété de présenter un point d'inflexion (fig. 3.3, § 3.6.1).



Nous reviendrons sur le calcul pratique de φ_p au paragraphe 3.4.3.5.

3.4.3. - Régimes établis : modes opératoires et compléments

3.4.3.1. - CAS DES SECTIONS RECTANGULAIRES

Dans les conditions de régime établi et de température ou de flux imposé à la paroi, le calcul de h est également possible pour des sections rectangulaires. Toutefois il n'y a plus uniformité du coefficient d'échange sur le périmètre de la section, et les valeurs données ci-dessus représentent la moyenne de Nu sur ce périmètre (Nu_φ flux imposé ; Nu_T température imposée).

Conformément à nos notations antérieures, les dimensions de la section sont notées : $2b \times l$. Les valeurs de Nu dépendent du rapport de forme $l/2b$.

$l/2b$	Nu_φ	Nu_T
1	3,61	2,98
1,43	3,73	3,08
2	4,12	3,39
3	4,79	3,96
4	5,33	4,44
8	6,49	5,60
Canal plan Une face isolée	5,38	4,86

tout ceci avec :

$$Nu = \frac{h D_h}{\lambda} = St Pe \quad [\text{réf. : Kays et Crawford}]$$

3.4.3.2. - DOMAINE DE VALIDITÉ

Les résultats qui ont été donnés pour les régimes établis laissent dans l'ombre une question pratique importante : à partir de quelle distance de l'entrée sont-ils valables ?

La réponse dépend en partie des conditions dynamiques et thermiques appliquées à l'entrée de la canalisation, et elle sera détaillée lorsque nous étudierons les régimes non établis (§ 3.6). On peut toutefois donner un ordre de

grandeur moyen, en considérant que la condition de régime thermique établi est vérifiée à partir d'une distance L_e de l'entrée, telle que :

$$\begin{aligned} \frac{L_e}{D} &\gtrsim 0,08 Pe && \text{(tube circulaire)} \\ \frac{L_e}{D_h} &\gtrsim 0,014 Pe && \text{(canal plan)} \end{aligned} \quad (3.56)$$

D'autres informations numériques sont données dans le problème 3.4.

3.4.3.3. - GRANDEURS LOCALES ET GRANDEURS GLOBALES

- ♣ En compulsant la littérature on a souvent l'impression que, lorsque St ou Nu a été déterminé, tout est dit. Mais l'usager n'est pas de cet avis. Il a, lui, des flux ou des températures à calculer, et un nombre sans dimension ne lui suffit pas !

La suite logique des opérations ramène donc à la formule (3.7c) que nous écrirons *localement* :

$$\varphi_{p,x} = h_x (T_{p,x} - T_{m,x}) \quad (3.57)$$

Mais contrairement à ce qui se passe dans les écoulements externes, où la température de référence T_∞ est généralement une constante, nous avons ici une température de mélange $T_{m,x}$ qui dépend de x , ce qui complique la situation. En outre, on s'intéresse d'habitude à des grandeurs globales sur un tronçon de longueur L : flux total ou flux moyen, température de mélange à l'entrée et à la sortie, température moyenne de paroi. On est donc conduit à prendre (3.57) en moyenne. Sachant que $h = cte$ en régime établi, l'application de la moyenne sur le segment $[0, L]$ aux deux membres de l'équation se symbolise par :

$$\langle \varphi_{p,x} \rangle = h \langle T_{p,x} - T_{m,x} \rangle \quad (3.58a)$$

ou, avec des notations plus simples :

$$\varphi_p = h (T_p - T_m) \quad (3.58b)$$

φ_p , T_p et T_m désignant à présent les valeurs moyennes sur le tronçon considéré.

- ◆ Ceci est spécialement important pour les échangeurs, où les calculs sont presque toujours effectués sur la base d'une approche globale.



Précisément, s'agissant d'échangeurs, quel type de condition à la paroi est le mieux adapté ?

- Avec les échangeurs à fluide isotherme (évaporateurs ou condenseurs) on est assez près de la condition $T_p = cte$. C'est souvent le cas aussi pour les appareils à circulation co-courant.

- Avec les autres échangeurs, bien que les situations soient très diverses, on est plus proche de la condition $\varphi_p = cte$ car le gradient $d\varphi_p/dx$ est généralement

assez faible. La condition $\varphi_p = cte$ est même rigoureusement vérifiée dans les appareils à contre-courant lorsque les débits thermiques unitaires q_{tc} et q_{tf} sont égaux (E.T, § 2.3.4) puisqu'alors $T_{cx} - T_{fx} = cte$, T_{cx} et T_{fx} variant linéairement. Elle constituera une très bonne approximation toutes les fois que q_{tc} et q_{tf} ne seront pas trop différents. Elle pourra encore être satisfaite si la paroi est par exemple chauffée par effet Joule ou soumise à un rayonnement uniforme.

♥ Une dernière question se pose ici : peut-on dire qu'une condition à la paroi est "meilleure" qu'une autre ?

Nous avons vu que dans un tube circulaire $Nu = 3,66$ avec $T_p = cte$ et $4,36$ avec $\varphi_p = cte$, soit environ 20% de mieux. Pour un même écart $T_p - T_m$ (local ou moyen), le mécanisme du transfert de chaleur est donc plus performant dans la seconde disposition, puisque le flux transféré sera plus élevé. C'était déjà le cas avec un écoulement externe (§ 1.2.4).

Examinons maintenant les modes opératoires liés à l'emploi de la formule (3.58), qui fait intervenir en particulier l'évaluation, exacte ou approchée, des grandeurs globales.

3.4.3.4. - UTILISATION PRATIQUE DE Nu OU St AVEC φ_p UNIFORME

La densité de flux pariétale étant uniforme, l'écart de température $\Delta T(x) = T_{px} - T_{mx}$ est constant (relation 3.43b) ; il suffit donc de le connaître en un point, soit à l'entrée de la zone établie (ΔT_0) soit à la sortie (ΔT_s). En outre, T_{px} et T_{mx} varient linéairement (cf. 3.40b). Comme il est fréquent de se référer aux températures moyennes, on aura donc :

$$\varphi_p = h(T_p - T_m) \tag{3.59a}$$

et

$$h = \frac{Nu \lambda}{D_h} = St \rho C_p V_d$$

avec :



$$T_p = \frac{T_{p0} + T_{ps}}{2} \quad \text{température moyenne de paroi} \tag{3.59b}$$

$$T_m = \frac{T_0 + T_s}{2} \quad \text{température moyenne de mélange} \tag{3.59c}$$

A noter que la situation $\varphi_p = cte$ ne signifie pas nécessairement que φ_p soit connu : ainsi dans les échangeurs où c'est fréquemment une grandeur à déterminer.

3.4.3.5. - UTILISATION PRATIQUE DE Nu OU St AVEC T_p UNIFORME

Ici, les choses sont un peu moins simples que dans le cas précédent.

Lorsque la température de paroi est imposée uniforme, la température de mélange $T_{m,x}$ est une fonction exponentielle de x . Il faut la déterminer pour connaître localement le flux $\varphi_{p,x}$.

Le calcul de la densité de flux moyenne φ_p sur la paroi d'un tube de longueur L passe par celui de la température moyenne de mélange T_m [Incropera]. D'après (3.48) on a :

$$T_p - T_{m,x} = (T_p - T_0) e^{-2St \frac{x}{R}} \quad (3.60a)$$

En particulier, à la sortie ($x = L$) :

$$T_p - T_s = (T_p - T_0) e^{-2St \frac{L}{R}} \quad (3.60b)$$

La moyenne a pour expression

$$T_p - T_m = (T_p - T_0) \frac{1}{L} \int_0^L e^{-2St \frac{x}{R}} dx$$

soit :

$$T_p - T_m = -(T_p - T_0) \frac{R}{2St L} \left(e^{-2St \frac{L}{R}} - 1 \right) \quad (3.61)$$

De (3.60b) on tire :

$$2St \frac{L}{R} = \ln \frac{T_p - T_0}{T_p - T_s}$$

et :

$$1 - e^{-2St \frac{L}{R}} = \frac{(T_p - T_0) - (T_p - T_s)}{T_p - T_0}$$

d'où la température moyenne de mélange T_m en fonction des températures d'entrée et de sortie (avec $\Delta T_0 = T_p - T_0$ et $\Delta T_s = T_p - T_s$), tirée de (3.61) :

$$T_p - T_m = \frac{\Delta T_0 - \Delta T_s}{\ln \left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T_s} \right)} \quad (3.62)$$

expression généralement appelée "différence de température logarithmique moyenne" ΔT_{LM} .

La densité de flux moyenne a ainsi pour valeur :

$$\boxed{\varphi_p = h \frac{\Delta T_0 - \Delta T_s}{\ln \left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T_s} \right)} = h \Delta T_{LM}} \quad (3.63a)$$

et le flux total Φ :

$$\Phi = \varphi_p \Sigma \quad (3.63b)$$

($\Sigma =$ surface latérale de la canalisation $= \pi D L$)



Seulement, attention : dans les formulaires, lorsque le problème de la température de référence est explicitement abordé (ce qui n'est pas toujours le cas), on entend très souvent par "température moyenne de mélange" une température linéarisée, à savoir :

$$\langle T_m \rangle = \frac{T_0 + T_s}{2} \quad (3.64a)$$

(c'est d'ailleurs ce que nous avons nous-mêmes indiqué dans E.T., § 4.1.5). Le flux moyen à la paroi est alors évalué par :

$$\langle \varphi_p \rangle \approx h \left(T_p - \frac{T_0 + T_s}{2} \right) \quad (3.64b)$$

Dans une majorité d'applications, l'approximation est raisonnable. Ainsi, avec $\Delta T_0 / \Delta T_s < 2$, l'écart entre (3.64b) et (3.63a) est inférieur à 5%. Mais cet écart augmente très vite avec $\Delta T_0 / \Delta T_s$; il est supérieur à 30% si $\Delta T_0 / \Delta T_s \approx 10$. On ne doit donc pas utiliser la moyenne linéarisée (3.64a) sans discernement.

Rappelons toutefois que (3.64a) est la valeur exacte de la moyenne quand $\varphi_p = cte$ (§ précédent).

3.5. - ÉCOULEMENTS DANS LES CONDUITS ANNULAIRES

3.5.1. - Caractères particuliers

Les sections annulaires se rencontrent classiquement dans les échangeurs bitubes, mais également dans des réchauffeurs où le tube central est constitué par une résistance électrique.

La notion de régime établi se transpose sans modification, avec les mêmes conséquences (en particulier $h = cte$). Cependant le problème est ici plus vaste et plus complexe car l'écoulement est limité par deux parois au lieu d'une seule (paroi intérieure ou convexe, de rayon R_1 ; paroi extérieure ou concave, de rayon R_2) (fig. 3.2), les conditions aux limites thermiques étant en règle générale différentes en R_1 et en R_2 . Par exemple, une disposition usuelle consiste à isoler la paroi extérieure, et à appliquer une condition d'échange donnée ($\varphi_p = cte$ ou $T_p = cte$) à la paroi intérieure.

Les calculs analytiques sont analogues à ceux qui ont été effectués avec les sections circulaires ou planes, mais sensiblement plus lourds du fait que l'expression de U est moins simple (voir FEMM, 6.10) et qu'il y a deux conditions aux limites. Aussi nous nous bornerons à regarder deux points

particuliers. Des résultats numériques ont été donnés dans E.T. (§ 4.4). On en trouvera de plus complets dans d'autres ouvrages [Kakaç 1995, Taine et Petit 1990, Kays 1993].

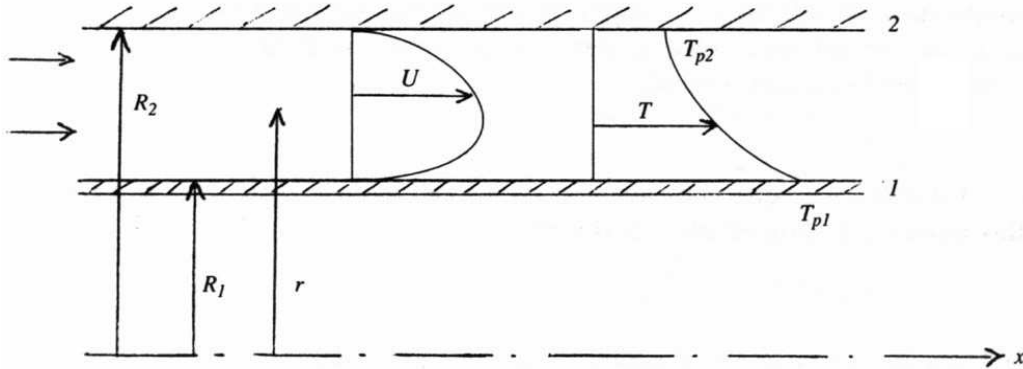


FIG. 3.2 – Régime établi dans un conduit annulaire : exemple avec paroi extérieure isolée et fluide réchauffé ($T_{p2} < T_{p1}$).

3.5.2. - Densités de flux imposées aux parois

Soient φ_{p1} et φ_{p2} les densités de flux locales sur les deux parois. Le bilan thermique sur une tranche de longueur dx s'écrit :

$$\rho C_p q_v \{T_m(x+dx) - T_m(x)\} = \varphi_{p1} d\Sigma_1 + \varphi_{p2} d\Sigma_2 \quad (3.65)$$

où $d\Sigma_1$ et $d\Sigma_2$ sont les aires des parois 1 et 2 :

$$d\Sigma_1 = 2\pi R_1 dx \quad ; \quad d\Sigma_2 = 2\pi R_2 dx$$

et avec :

$$q_v = S V_d = \pi (R_2^2 - R_1^2) V_d$$

On en déduit :

$$\frac{dT_m}{dx} = 2 \frac{\varphi_{p1} R_1 + \varphi_{p2} R_2}{\rho C_p V_d (R_2^2 - R_1^2)} \quad (3.66)$$

Lorsque φ_{p1} et φ_{p2} sont indépendants de x , on retrouve la propriété $dT_m/dx = cte$: la température de mélange évolue linéairement le long de l'écoulement.

De même, la condition de régime thermique établi, analysée au § 3.4.1, se transpose aisément et conduit à :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT_{p1}}{dx} = \frac{dT_{p2}}{dx} = \frac{dT_m}{dx} \quad (3.67)$$

3.5.3. - Températures imposées aux parois

Remplaçons dans (3.66) φ_{p1} et φ_{p2} par leurs expressions en fonction des températures :

$$\begin{aligned}\varphi_{p1} &= h_1 (T_{p1} - T_m) \\ \varphi_{p2} &= h_2 (T_{p2} - T_m)\end{aligned}$$

ce qui donne en regroupant :

$$\frac{dT_m}{dx} = 2 \frac{(h_1 T_{p1} R_1 + h_2 T_{p2} R_2) - T_m (h_1 R_1 + h_2 R_2)}{\rho C_p V_d (R_2^2 - R_1^2)}$$



Pour faire apparaître un écart de température, il faut ici introduire une seconde température de référence T_r , qui combine les paramètres caractéristiques aux deux parois. Posons par exemple :

$$h_1 T_{p1} R_1 + h_2 T_{p2} R_2 = T_r (h_1 R_1 + h_2 R_2) \quad (3.68a)$$

soit :

$$T_r = \frac{h_1 T_{p1} R_1 + h_2 T_{p2} R_2}{h_1 R_1 + h_2 R_2} = cte \quad (3.68b)$$

alors :

$$\frac{dT_m}{dx} = 2 (T_r - T_m) \frac{h_1 R_1 + h_2 R_2}{\rho C_p V_d (R_2^2 - R_1^2)}$$

soit encore :

$$\frac{d(T_m - T_r)}{T_m - T_r} = -2 \frac{h_1 R_1 + h_2 R_2}{\rho C_p V_d (R_2^2 - R_1^2)} dx$$

d'où :

$$T_m - T_r = (T_0 - T_r) \exp \left\{ -2 \frac{h_1 R_1 + h_2 R_2}{\rho C_p V_d (R_2^2 - R_1^2)} x \right\} \quad (3.69)$$

On retrouve une loi de même forme que (3.48), mais pour l'écart de température $T - T_r$, au lieu de $T - T_p$.

3.6. - RÉGIMES NON ÉTABLIS DANS LES CANALISATIONS

3.6.1. - Aspects physiques

Au fil des paragraphes 1 à 5, nous avons traité des régimes dits "établis" (définition 3.8), en précisant qu'ils constituent une catégorie relativement minoritaire, vu le caractère assez contraignant des hypothèses auxquelles ils doivent satisfaire.

Il nous faut donc maintenant tenir compte de toutes les circonstances usuelles où ces conditions ne sont pas remplies, et qui se subdivisent schématiquement en deux groupes : soit le régime dynamique est établi et le régime thermique non établi (par exemple avec chauffage ou refroidissement sur une partie seulement d'une canalisation longue), soit ils ne sont établis ni l'un ni l'autre, dès lors qu'on ne se trouve pas suffisamment loin en aval d'une singularité (entrée, coude, changement de section, etc., cf. FEMM, Ch. 5).

A titre d'exemple, nous avons choisi un cas parmi les nombreuses situations possibles : celui d'un canal plan (ou circulaire) où le régime dynamique est établi (avec un profil de vitesse parabolique) et où le fluide est à la même température T_e que la paroi ; en aval d'une abscisse $x=0$, on impose une température de paroi $T_p = cte \neq T_e$ (fig. 3.3). A partir de là, une couche limite thermique se développe, qui atteindra l'axe de la canalisation en x_{et} . Sur le tronçon $[0, x_{et}]$, le champ de température n'est pas établi ; au-delà de x_{et} , on retrouve le cas étudié aux paragraphes 3.3.3 et 3.4.2.

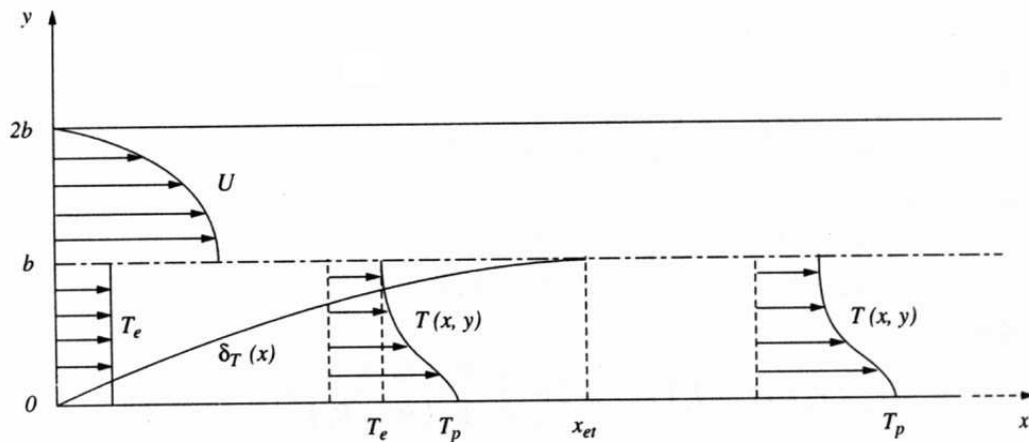


FIG. 3.3 – Zone d'établissement d'un régime thermique. Température de paroi $T_p = cte > T_e$ imposée à partir de $x=0$. Le profil de vitesse (établi) est représenté sur la moitié supérieure de la section

Pour résoudre les problèmes de régimes non établis, on dispose des moyens déjà mis en œuvre dans les couches limites (méthode différentielle, méthode semi-intégrale) mais également, dans plusieurs cas particuliers, de procédés analytiques qui conduisent à exprimer les températures sous forme de développement en série.

Le cas particulier illustré par la figure 3.3 est couramment désigné par l'expression Problème de Graetz (celle-ci incluant pour certains auteurs les

écoulements à profil de vitesse uniforme, ou écoulements piston), et c'est sur lui que nous allons d'abord nous pencher.

3.6.2. - Tube circulaire, $T_p = cte$, régime dynamique établi

3.6.2.1. - FORMULATION DU PROBLÈME

♣ Nous porterons spécialement notre attention sur l'exemple suivant :

- Tube circulaire. Régime laminaire établi.
- Ecoulement amont isotherme.
- Température de paroi $T_p = cte$ imposée à partir d'une abscisse $x = 0$.
- Ecoulement sans couplage thermique.

Le profil de vitesse est alors (cf. 3.41) :

$$U = 2V_d \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (3.70a)$$

En toute rigueur, le champ de température étant maintenant bidimensionnel, le bilan local d'enthalpie est exprimé par la relation (1.3) (transposée en coordonnées cylindriques):

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial r} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \quad (3.70b)$$

Toutefois, dans la plupart des circonstances, les approximations de la couche limite sont encore vérifiées, et nous admettrons donc que:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.70c)$$

En outre, nous avons ici : $V = 0$

De ce fait, le champ de température est toujours exprimé par (3.12) :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.70d)$$

La température du fluide est donc solution de l'équation :

$$2V_d \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.70e)$$

avec comme conditions aux limites :

- à l'entrée de la zone non isotherme :

$$x = 0 \quad , \quad T(0, r) = T_e \quad (3.71a)$$

- à la paroi :

$$r = R \quad , \quad T(x, R) = T_p = cte \quad (3.71b)$$

- sur l'axe, flux nul :

$$r = 0 \quad \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad (3.71c)$$

- ◆ Il est souvent un peu plus commode de travailler avec des grandeurs sans dimension. Nous poserons donc :

$$r^+ = \frac{r}{R} \quad ; \quad x^+ = \frac{x}{X} \quad ; \quad \theta^+ = \frac{T - T_p}{T_e - T_p} = \theta^+(x^+, r^+) \quad (3.72)$$

où X est une abscisse de référence qui sera précisée tout à l'heure.

Cette façon d'adimensionner, qui paraît à première vue anodine, soulève pourtant une question délicate en ce qui concerne la similitude. En effet, la méthode générale développée dans FEMM (Ch. 2) pour la mise en évidence des critères de similitude impose pratiquement le choix d'une même longueur de référence dans les différentes directions de coordonnées. Or ici, suivant en cela l'usage, nous avons pris deux longueurs de référence R et X , ce qui se révélera avantageux pour la résolution analytique, mais qui pourrait poser problème pour l'interprétation en termes de similitude.

Heureusement, nous nous trouvons dans un cas particulier où le terme de transport (premier membre de l'équation (3.70d)) ne contient que $\partial T / \partial x$ (outre r/R qui est déjà sans dimension). Mais si nous avions établissement simultané des régimes dynamiques et thermiques, le premier membre de l'équation contiendrait deux termes ($U \frac{\partial T}{\partial x}$ et $V \frac{\partial T}{\partial r}$) qui seraient inévitablement affectés de coefficients différents à cause du choix $X \neq R$. Cependant, même ici, nous aurons une longueur de référence dans l'équation de quantité de mouvement (D) et une autre dans l'équation d'énergie (X), ce qui n'est pas absolument cohérent.

- ♥ Quoi qu'il en soit, l'équation (3.70e) va devenir (sachant que $T_p = cte$) :

$$2V_d (1 - r^{+2}) \frac{T_e - T_p}{X} \frac{\partial \theta^+}{\partial x^+} = \frac{a}{r^+ R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ R \frac{T_e - T_p}{R} \frac{\partial \theta^+}{\partial r^+} \right)$$

c'est à dire, après regroupement :

$$\frac{2V_d R^2}{a X} \frac{\partial \theta^+}{\partial x^+} = \frac{1}{r^+ (1 - r^{+2})} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \theta^+}{\partial r^+} \right) \quad (3.73a)$$

En conservant la démarche qui conduit à la définition des critères de similitude, nous choisirons X de telle sorte que le coefficient du premier membre (qui est sans dimension) soit égal à 1 :

$$\frac{2V_d R^2}{a X} = 1 \quad (3.73b)$$

d'où l'abscisse de référence :

$$X = \frac{2V_d R^2}{a} = \frac{V_d \cdot 2R}{a} R = Pe R$$

ou encore, puisque neuf fois sur dix c'est le diamètre D qui sert à caractériser une section circulaire :

$$X = \frac{Pe D}{2} \quad (3.73c)$$

Finalement, nos coordonnées adimensionnées seront donc :

$$\boxed{x^+ = \frac{l}{Pe R} \frac{x}{R} = \frac{2}{Pe D} \frac{x}{D}} \quad \text{et} \quad r^+ = \frac{r}{R} \quad (3.74)$$

et l'équation (3.73a) prend la forme :

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial x^+} = \frac{l}{r^+ (1 - r^{+2})} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \theta^+}{\partial r^+} \right) \quad (3.75a)$$

avec, comme condition aux limites adimensionnées (cf. 3.71) :

$$\begin{aligned} x^+ = 0 & \quad , \quad \theta^+(0, r^+) = l \\ r^+ = 1 & \quad , \quad \theta^+(x^+, 1) = 0 \\ r^+ = 0 & \quad , \quad \left(\frac{\partial \theta^+}{\partial r^+} \right)_{r^+=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.75b)$$



Signalons au passage deux dénominations relatives à x^+ que l'on trouve parfois dans la littérature, à savoir :

$$\text{"nombre de Cameron"} \text{ pour désigner } \frac{l}{Pe D} \frac{x}{D} = \frac{l}{2} x^+ \quad (3.76a)$$

$$\text{"nombre de Graetz"} \quad Gz = \frac{\pi}{4} Pe \frac{D}{x} = \frac{\pi}{2 x^+} \quad (3.76b)$$

cette dernière définition ayant en fait pour origine :

$$Gz = \frac{q_m C_p}{\lambda x} \approx \frac{\text{flux axial}}{\text{flux transversal}}$$

3.6.2.2. - PRINCIPE D'UNE RÉOLUTION ANALYTIQUE

Le modèle constitué par l'équation et les conditions aux limites (3.75) peut être résolu analytiquement. La méthode utilisée repose sur le principe de séparation des variables x^+ et r^+ . On cherche si le problème possède une solution de la forme :

$$\theta^+(x^+, r^+) = \Phi(x^+) \Psi(r^+) \quad (3.77)$$

Reportons dans (3.75a). Il vient :

$$\Psi \frac{d\Phi}{dx^+} = \frac{\Phi}{r^+ (1 - r^{+2})} \frac{d}{dr^+} \left(r^+ \frac{d\Psi}{dr^+} \right)$$

soit en séparant Φ et Ψ :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dx^+} = \frac{1}{\Psi r^+(1-r^{+2})} \frac{d}{dr^+} \left(r^+ \frac{d\Psi}{dr^+} \right) \quad (3.78)$$

Les deux membres de cette équation sont indépendants. La condition d'existence d'une solution non triviale est donc que chacun d'eux soit égal à une même constante K .

La solution de la première équation est alors de forme exponentielle. La constante de séparation K est donc obligatoirement négative, faute de quoi Φ ne serait pas bornée quand $x^+ \rightarrow \infty$. Nous poserons donc pour plus de clarté : $K = -\lambda^2$. Finalement, le système à résoudre se présente ainsi :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dx^+} = -\lambda^2 \quad (3.79a)$$

$$\frac{d}{dr^+} \left(r^+ \frac{d\Psi}{dr^+} \right) = -\lambda^2 r^+(1-r^{+2})\Psi \quad (3.79b)$$

avec des conditions aux limites (3.75b) reformulées en Φ et Ψ compte tenu de (3.77) :

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 1 \\ \psi(1) &= 0 \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r^+} \right)_{r^+=0} &= 0 \end{aligned} \quad (3.79c)$$

3.6.2.3. - EXPRESSION DE LA SOLUTION

La résolution du système (3.79) est présentée dans ses grandes lignes en annexe 3.1. Nous n'en donnerons ici que les points essentiels.

Les relations (3.79b) et (3.79c) constituent un système de Sturm-Liouville. Il existe un ensemble infini discret de valeurs propres réelles λ_n qui le satisfont. Les fonctions propres ψ correspondantes sont notées $\psi_n(r^+)$; elles sont orthogonales vis-à-vis de la fonction de pondération $r^+(1-r^{+2})$.

Ensuite, à chaque valeur propre λ_n correspond une solution particulière Φ_n de l'équation en Φ (3.79a), telle que :

$$\frac{1}{\Phi_n} \frac{d\Phi_n}{dx^+} = -\lambda_n^2$$

soit :

$$\Phi_n = B_n e^{-\lambda_n^2 x^+} \quad (3.80a)$$

Une solution particulière du problème est donc de la forme :

$$\theta_n^+ \approx \psi_n e^{-\lambda_n^2 x^+} \quad (3.80b)$$

et la solution générale s'obtient en faisant la somme de toutes les solutions particulières. Elle se présente donc comme une série :

$$\theta^+(x^+, r^+) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(r^+) e^{-\lambda_n^2 x^+} \quad (3.81a)$$

où les coefficients C_n se calculent à partir des relations d'orthogonalité des ψ_n , et des conditions aux limites (Annexe 3.A.1). Le retour aux grandeurs dimensionnées donne encore :

$$\frac{T(x, r) - T_p}{T_e - T_p} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n\left(\frac{r}{R}\right) e^{-\lambda_n^2 \frac{l}{Pe} \frac{2x}{D}} \quad (3.81b)$$

De là, on accède à la température de mélange, au flux pariétal et au nombre de Stanton (ou Nusselt) local en revenant aux définitions : ainsi, pour le flux :

$$\varphi_{p,x} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R}$$

soit, du fait que $dr^+ / dr = l/R = 2/D$

$$\varphi_{p,x} = \frac{2\lambda(T_e - T_p)}{D} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{d\psi_n}{dr^+} \right)_{r^+=l} e^{-\lambda_n^2 \frac{l}{Pe} \frac{2x}{D}} \quad (3.82a)$$

On pose habituellement :

$$A_n = \frac{\left(\frac{d\varphi_n}{dr^+} \right)_{r^+=l}}{\lambda_n \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial \lambda_n} \right)_{r^+=l}} \quad (3.82b)$$

d'où, avec (3.A.24) (Annexe 3.1) :

$$C_n \left(\frac{d\psi_n}{dr^+} \right)_{r^+=l} = -2A_n \quad (3.82c)$$

et finalement :

$$\varphi_{p,x} = -\frac{4\lambda}{D} (T_e - T_p) \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \frac{l}{Pe} \frac{2x}{D}} \quad (3.83)$$

A l'appui de cette remarque, on rappellera que Nu_x est impérativement associé à un ΔT de référence, qui est choisi égal à $T_p - T_{m,x}$, $T_{m,x}$ désignant la température de mélange locale. Pour l'utiliser, il faut donc calculer aussi $T_{m,x}$, qui est fonction de x . Le résultat est le suivant :

$$\theta_{m,x}^+ = \frac{T_{m,x} - T_p}{T_e - T_p} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 x^+} \quad (3.84a)$$

De la sorte, on peut encore écrire le flux :

$$\varphi_{p,x} = h_x (T_p - T_{m,x}) = Nu_x \frac{\lambda}{D} (T_e - T_p) \theta_{m,x}^+ \quad (3.84b)$$

où l'on a fait apparaître le coefficient d'échange local h_x .

De (3.83) on déduit également une formulation adimensionnée :

$$\varphi_{p,x}^+ = \frac{\varphi_{p,x} D}{\lambda (T_e - T_p)} \quad (3.84c)$$

Alors :

$$Nu_x = \frac{\varphi_{p,x}^+}{\theta_{m,x}^+} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 x^+}}{2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 x^+}} \quad (3.85)$$

3.6.2.4. - ANALYSE DES RÉSULTATS

Pour la série (3.81), les valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1 \dots$ et les coefficients $A_0, A_1 \dots$ ont été calculés numériquement [détails et références : Kakaç et Yener, 1995]. Pratiquement, une précision suffisante pour la majorité des applications est atteinte en prenant les cinq premiers termes, sauf à proximité de l'entrée ($x^+ \lesssim 0,03$) où la prise en compte d'un plus grand nombre de termes s'avère indispensable. Les dix premiers coefficients sont donnés sur le tableau 3.1.

n	λ_n	C_n	A_n
0	2,704	1,466	0,749
1	6,68	- 0,802	0,544
2	10,67	0,587	0,463
3	14,67	- 0,475	0,415
4	18,67	0,404	0,382
5	22,66	- 0,355	0,358
6	26,66	0,319	0,339
7	30,65	- 0,290	0,324
8	34,67	0,268	0,311
9	38,66	- 0,249	0,299

Tableau 3.1 - Constantes du problème de Graetz pour un écoulement laminaire dans un tube cylindrique (valeurs arrondies).

Les paramètres $\theta_{m,x}^+, \varphi_{p,x}^+$ et Nu_x figurent dans le tableau 3.2, en fonction de l'abscisse x^+ (3.74). On observe en particulier que lorsque x^+ devient assez grand (régime établi), Nu_x a pour limite :

$$Nu_{\infty} = \frac{\lambda_0^2}{2} = 3,656$$

x^+ ou L^+	θ_{mx}^+	φ_{px}^+	Nu_x	θ_m^+	φ_p^+	Nu	θ_h^+	ΔT_{LM}^+	ΔT_{lin}^+
0,005	0,894	6,946	7,77	0,935	10,26	11,06	0,93	0,946	0,947
0,010	0,836	5,116	6,12	0,90	8	8,84	0,90	0,916	0,918
0,020	0,752	3,80	4,96	0,846	6,13	7,1	0,864	0,87	0,876
0,040	0,628	2,625	4,18	0,766	4,6	5,79	0,795	0,80	0,814
0,080	0,459	1,73	3,768	0,652	3,36	4,85	0,693	0,695	0,73
0,1	0,396	1,467	3,709	0,607	3	4,63	0,648	0,652	0,698
0,2	0,19	0,694	3,657	0,444	2,02	4,15	0,487	0,488	0,595
0,4	0,044	0,160	3,656	0,272	1,19	3,90	0,30	0,30	0,522
0,5	0,021	0,077	3,656	0,224	0,98	3,85	0,254	0,254	0,511
∞			3,656			3,656			

Tableau 3.2 – Problème de Graetz ($T_p = cte$). Grandeurs locales et grandeurs moyennes adimensionnées. Formules

(3.84), (3.85) et (3.88) à (3.92), avec $x^+ = \frac{2}{Pe} \frac{x}{D}$

valeur très proche de celle qui a été calculée directement ($Nu = 3,66$, formule 3.55). En outre, on voit que le régime établi est atteint au voisinage de $L^+ = 0,1$ (à mieux que 2% près) (cf. Problème 3.4).

Il apparaît également que la densité de flux locale $\varphi_{p,x}$ est maximale à l'entrée de la zone anisotherme, et diminue quand x augmente. Le calcul montre qu'il en est de même pour Nu_x (voir Fig. 3.4).

Enfin, l'écart de température $\theta_{m,x}^+$ et le flux local $\varphi_{p,x}^+$ deviennent pratiquement nuls pour $L^+ \gtrsim 0,5$. Au-delà, l'écoulement est quasi-isotherme. Toute longueur de canalisation supplémentaire est donc absolument inopérante au point de vue thermique. Une longueur $L^+ \approx 0,5$ peut donc être considérée comme un "maximum utile".

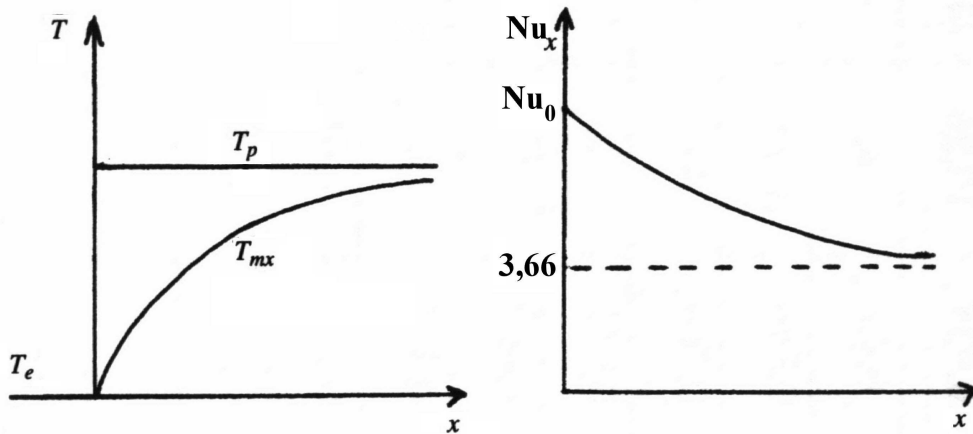


FIG. 3.4 – Ecoulements à température de paroi imposée : évolution des températures et du nombre de Nusselt local dans la zone d'entrée ($Nu_x \rightarrow Nu_0$ fini quand $x \rightarrow 0$).

3.6.3. - Définition et utilisation de valeurs moyennes sur un segment de canalisation

3.6.3.1. - PROBLÈMES POSÉS PAR LES DÉFINITIONS

Dans beaucoup d'applications, et en particulier dans les calculs d'échangeurs, on est principalement intéressé par les valeurs moyennes du flux pariétal et de la température sur une longueur L de tube.

Mais la définition et l'utilisation de ces grandeurs moyennes soulèvent une série de questions qui sont bien souvent passées sous silence, et dont les conséquences sont loin d'être négligeables.

Première difficulté : lorsqu'on passe par l'intermédiaire de Nu et h , la définition même des moyennes pose problème. En effet, partons de l'expression classique :

$$\varphi_{p,x} = h_x (T_p - T_{m,x}) \quad (3.86a)$$

et prenons-la en valeur moyenne sur le segment $[0, L]$. En notant provisoirement cette opération par $\langle \dots \rangle$ ($\langle \varphi_{p,x} \rangle, \dots$) cela donne :

$$\langle \varphi_{p,x} \rangle = \langle h_x (T_p - T_{m,x}) \rangle \quad (3.86b)$$



relation parfaitement inutilisable puisqu'elle ne permet pas de séparer coefficient d'échange moyen et température moyenne de mélange, du fait que h_x et $T_{m,x}$ dépendent tous deux de x .

On peut tourner la difficulté en écrivant :

$$\langle \varphi_{p,x} \rangle = h_x (T_p - \langle T_{m,x} \rangle) \quad \text{et} \quad Nu = \frac{h D}{\lambda} \quad (3.87)$$

ce qui définit un coefficient d'échange h qui n'est pas la moyenne arithmétique de la fonction h_x (et de même pour le nombre de Nusselt : $Nu \neq \langle Nu_x \rangle$).

Le problème est que personne n'a adopté cette formulation, qui présente il est vrai un inconvénient : le calcul montre en effet que lorsque $x \rightarrow \infty$, le Nusselt ainsi défini tend vers une valeur limite voisine de 4,30 et par conséquent différente de la valeur 3,66 calculée en régime établi.

Quoi qu'il en soit, dans toute la bibliographie (et bien que cela ne soit généralement pas précisé) les valeurs numériques données pour Nu et h correspondent à la moyenne arithmétique de h_x entre $x=0$ et $x=L$, c'est à dire, en partant de (3.84) et (3.85), à :

$$h = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \quad ; \quad Nu = \frac{h D}{\lambda} \quad (3.88a)$$

soit :

$$Nu = \frac{1}{2L} \int_0^L \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 x}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 x}} dx \quad (3.88b)$$



Mais alors, cette définition est non moins inutilisable que la précédente puisqu'on ne dit pas avec quelle température moyenne il faut l'associer pour calculer le flux total (qui est en dernier ressort le seul paramètre utile, avec la température).

En fait, à l'expression (3.87) de h correspond une température conventionnelle T_h telle que :

$$\varphi_p = h (T_p - T_h) \quad (3.88c)$$

avec :

$$\varphi_p = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_{p,x} dx = \frac{4\lambda}{DL} (T_p - T_e) \int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \frac{1-2x}{Pe D}} dx$$

soit :

$$\varphi_p = 2Pe \frac{\lambda}{L} (T_p - T_e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 L^+}) \quad (3.89a)$$

En conséquence, cette température "moyenne" conventionnelle s'écrit :

$$T_p - T_h = \frac{\varphi_p}{h} \quad (3.89b)$$

Pour passer à une écriture adimensionnée, posons, en accord avec (3.84) :

$$\theta_h^+ = \frac{T_p - T_h}{T_p - T_e} \quad (3.90a)$$

$$\varphi_p^+ = \frac{\varphi_p L D}{\lambda (T_p - T_e)} \quad (3.90b)$$

$$\varphi_p^+ = \frac{4}{L^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 L^+}) \quad (3.90c)$$

Alors, conformément à (3.88b) et (3.89b) :

$$\theta_h^+ = \frac{\varphi_p}{h (T_p - T_e)} = \frac{\varphi_p^+}{Nu} \quad (3.91)$$

Quant à la moyenne arithmétique de $\theta_{m,x}^+$ (ou de $T_{m,x}$), elle aurait pour expression :

$$\theta_m^+ = \frac{\langle T_{m,x} \rangle - T_p}{T_e - T_p} = \frac{1}{L} \int_0^L \theta_{m,x}^+ dx = \frac{8}{L^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^4} (1 - e^{-\lambda_n^2 L^+}) \quad (3.92)$$

où l'on rappelle que $L^+ = \frac{2}{Pe} \frac{L}{D}$.

Le tableau 3.2 donne les valeurs arrondies de tous ces paramètres pour plusieurs longueurs de canalisation. Leur analyse suscite quatre remarques :

1 - Les valeurs moyennes ont été obtenues avec un développement à 20 termes et un pas d'intégration de 1.10^{-4} . Elles diffèrent un peu de celles qui sont citées dans la littérature.

2 - Le nombre de Nusselt moyen Nu (calculé selon la formule 3.88b) varie fortement pour les faibles valeurs de L^+ . A partir de $L^+ \approx 0,2$, il devient très proche de sa valeur asymptotique 3,656.

3 - La température moyenne θ_m^+ n'est pas extrêmement différente de la température conventionnelle définie par (3.91), ce qui est heureux : l'écart entre

les deux, insignifiant pour les faibles valeurs de L^+ , atteint environ 13% pour $L^+ \approx 0,5$.

4 - Une très bonne approximation de Nu (3.88) est obtenue avec la formule suivante :

$$Nu = 3,66 + \frac{0,127}{x^+ + 0,0635(x^+)^{1/3}} \quad (3.93)$$

3.6.3.2. – UTILISATION DE MOYENNES APPROCHÉES DANS LES CALCULS D'INGÉNIERIE ¹

Les choses en seraient restées là si les besoins ouverts par le génie thermique n'allaient dans le sens de calculs moins précis, mais plus simples et plus rapides. Concrètement, cette demande se fait sentir dans deux directions :

- l'utilisation symétrique des températures d'entrée T_e et de sortie T_s de la canalisation (T_s à l'abscisse $x = L$).

- l'emploi d'une température moyenne approchée, plus simple que la formule (3.91).



A cela on doit ajouter que très souvent, des valeurs numériques ou des formules de St et Nu (telles que 3.88 ou Tableau 3.2) sont proposées sans aucune information sur la température de référence à laquelle elles sont associées. L'utilisateur est évidemment conduit à en fabriquer une lui-même.

Concernant le premier point, la température à la sortie ($x = L$) est d'après (3.84a) :

$$T_s - T_p = 8(T_e - T_p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 L^+} \quad (3.94)$$

tandis qu'à l'entrée $T_e - T_p$ est en général donnée.

Pour le second point, on s'inspire assez souvent du résultat obtenu en régime établi (où le profil de $T_{m,x}$ est une exponentielle pure) en approchant la série (3.94) par une seule exponentielle. Dans ce cas, l'utilisation simultanée de T_e , T_s , T_p et de cette approximation conduit à un écart de température moyen identique à la différence de température logarithmique moyenne (3.62) :

$$T_m - T_p \approx \Delta T_{LM} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_s}{\ln\left(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_s}\right)} \quad (3.95a)$$

où :

$$\Delta T_e = T_e - T_p \quad ; \quad \Delta T_s = T_s - T_p \quad (3.95b)$$

¹ Se prononce en français ingénierie et non inngénierie comme on l'entend trop souvent.

On obtient alors une valeur approchée du flux en écrivant d'après (3.63) :

$$\varphi_p \approx h \Delta T_{LM} = Nu \frac{\lambda}{D} \Delta T_{LM} = \varphi_{pLM} \quad (3.96)$$

relation dans laquelle Nu est fourni par le tableau 3.2, à partir de sa définition (3.88).

Pour apprécier la qualité de l'approximation, le plus simple est de calculer la température logarithmique adimensionnée :

$$\Delta T_{LM}^+ = \frac{\Delta T_{LM}}{T_p - T_e} \quad (3.97)$$

et de la comparer à la température moyenne conventionnelle θ_h^+ . C'est ce qui a été fait sur le tableau 3.2, où l'on constate que ces deux grandeurs sont très proches l'une de l'autre.



On peut donc calculer le flux facilement et avec une très bonne précision en utilisant l'écart de température logarithmique moyen.

Enfin, il est parfois conseillé de linéariser l'écart de température (cf. § 3.4.3.5), en le remplaçant par :

$$\Delta T_{lin}^+ = \frac{1}{T_p - T_e} \frac{\Delta T_e + \Delta T_s}{2} = \frac{1}{2(T_p - T_e)} \left\{ T_p - \frac{T_e + T_s}{2} \right\} \quad (3.98)$$

La mise en correspondance de θ_h^+ et de ΔT_{lin}^+ (tableau 3.2) montre que cette linéarisation conduit à surévaluer le flux. L'écart est acceptable jusqu'à $L^+ \approx 0,08$; au-delà il devient excessif. Cela provient à l'évidence de ce que $\Delta T_{lin}^+ \rightarrow 0,5$ quand $L^+ \rightarrow \infty$ (moyenne arithmétique de 1 et 0 !) alors que $\theta_h^+ \rightarrow 0$. Toutefois cette conclusion doit être nuancée dans la mesure où, en réalité, les variations de température et de flux à l'entrée sont toujours moins brutales que ce que donne la théorie, ne serait-ce que parce qu'il y a toujours une conduction longitudinale et transversale dans la paroi. Les formules approchées données pour les calculs d'échangeurs tiennent généralement compte de cette situation.

3.6.4. - Tube circulaire, $\varphi_p = cte$, régime dynamique établi

Examinons maintenant le cas d'un régime thermique non établi avec flux imposé à la paroi. Le profil de vitesse est toujours supposé parabolique. En amont du tronçon considéré, le fluide est isotherme, sa température T_e est égale à celle de la paroi : $T_e = T_{pe}$. Dans la zone non isotherme ($x > 0$) le champ de température se développe, la température de mélange $T_{m,x}$ et celle de la paroi $T_{p,x}$ évoluent en fonction de x .

- ♣ Une fois encore, nous sommes confrontés à un problème de température de référence. Non pas pour la caractérisation du coefficient d'échange à la paroi, qui

sera toujours défini par $\varphi_p = h_x (T_{mx} - T_{px})$, mais pour l'adimensionnement de T . Il nous faut faire le rapport de deux écarts de température, et ici la définition utilisée dans le paragraphe précédent :

$$\frac{T(x,r) - T_{px}}{T_{mx} - T_{px}}$$

est inapplicable, à la fois parce que tous les termes dépendent de x (le problème n'a pas de solutions affines), et parce que à l'entrée $T_{mx} - T_{px} = 0$.

Au numérateur, le plus simple est de prendre $T(x,r) - T_e$ puisque la température est uniforme à l'entrée. Quant au dénominateur, le seul moyen est d'y placer une grandeur homogène à une température et construite à partir des paramètres significatifs du problème (la même technique est utilisée en convection naturelle, § 5.5.3.4). Avec une condition de flux imposé, on prend habituellement [cf. Zukauskas] :

$$\Delta T^0 = \frac{\varphi_p D}{\lambda} \quad (3.99)$$

grandeur proportionnelle à l'écart radial de température que l'on aurait par conduction pure dans le fluide. De cette façon, la température adimensionnée sera ici :

$$\Theta^+ = \lambda \frac{T(x,r) - T_e}{\varphi_p D} \quad (3.100)$$

◆ L'équation à résoudre est toujours (3.70e) :

$$2V_d \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

dans laquelle on introduit x^+ , r^+ et Θ^+ , ce qui donne après simplification :

$$\frac{2V_d R^2}{a X} \frac{\partial \Theta^+}{\partial x^+} = \frac{1}{r^+ (1 - r^{+2})} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \Theta^+}{\partial r^+} \right)$$

On peut donc encore prendre pour longueur de référence (3.73c) :

$$X = \frac{2V_d R^2}{a} = Pe \frac{D}{2}$$

et on retombe sur l'équation (3.75a), où θ^+ est remplacée par Θ^+ :

$$\frac{\partial \Theta^+}{\partial x^+} = \frac{1}{r^+ (1 - r^{+2})} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial \Theta^+}{\partial r^+} \right) \quad (3.101a)$$

mais avec des conditions aux limites qui sont maintenant :

- à l'entrée :

$$x^+ = 0 \quad \Theta^+ = 0 \quad \forall r^+ \in [0, 1] \quad (3.101b)$$

- sur l'axe :

$$r^+ = 0 \quad \frac{\partial \Theta^+}{\partial r^+} = 0 \quad (3.101c)$$

- à la paroi, flux imposé $\varphi_p = \lambda \partial T / \partial r$:

$$r^+ = 1 \quad \frac{\partial \Theta^+}{\partial r^+} = \frac{\lambda}{\varphi_p D} \frac{\partial T}{\partial r} R = 0,5 \quad (3.101d)$$

♥ La résolution est encore basée sur la méthode de Sturm-Liouville [Siegel, 1958]. (Cf. Annexe 3.1). On obtient :

$$\Theta_{mx}^+ - \Theta_{px}^+ = \frac{\varphi_p D}{\lambda} \left\{ \frac{11}{48} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{A_n \beta_n^4} e^{-\beta_n^2 x^+} \right\} \quad (3.102)$$

ou en revenant aux températures dimensionnées :

$$T_{mx} - T_{px} = \frac{\lambda}{\varphi_p D} (\Theta_{mx}^+ - \Theta_{px}^+) \quad (3.103)$$

La série peut être calculée correctement avec les sept premiers termes, dont les constantes sont données dans le tableau (3.3).

D'autre part, la température de mélange T_{mx} évolue ici selon une loi simple. En effet, le flux φ_p à la paroi étant imposé, le bilan global d'énergie est le même en régime établi et en régime non établi. De ce fait, la démonstration de la formule (3.40b) reste valable (§ 3.4.1) et on a toujours :

$$\frac{dT_{mx}}{dx} = \frac{2\varphi_p}{\rho C_p V_d R} = cte$$

d'où :

$$T_{mx} - T_e = \frac{2\varphi_p}{\rho C_p V_d R} x \quad (3.104)$$

mais par contre la propriété $dT(x, r) / dx = cte$ n'est plus vérifiée. En particulier : $dT_{px} / dx \neq cte$.



Mais la validité de (3.104) est indépendante des répartitions de température puisque cette relation représente en fait le bilan intégral d'énergie sur une longueur x de canalisation.

n	A_n	β_n^2
0	$7,63 \cdot 10^{-3}$	25,68
1	$2,058 \cdot 10^{-3}$	83,86
2	$0,901 \cdot 10^{-3}$	174,2
3	$0,487 \cdot 10^{-3}$	296,5
4	$0,297 \cdot 10^{-3}$	450,9
5	$0,207 \cdot 10^{-3}$	637
6	$0,147 \cdot 10^{-3}$	856

Tableau 3.3 - Zone d'entrée d'un tube cylindrique avec φ_p imposé. Constantes du problème thermique.

L'allure générale des profils longitudinaux de température est indiquée sur la figure 3.5.

D'autre part, on peut définir un nombre de Nusselt local :

$$Nu_x = \frac{h_x D}{\lambda} = \frac{\varphi_p D}{\lambda (T_{mx} - T_{px})} \quad (3.105a)$$

ou encore, conséquence du choix de ΔT^0 (formule 3.99) :

$$Nu_x = \frac{l}{\Theta_{mx}^+ - \Theta_{px}^+} \quad (3.105b)$$

Les valeurs numériques correspondantes sont reportées sur le tableau 3.4 en fonction de x^+ . Notons en particulier que lorsque $x^+ \rightarrow \infty$, on retrouve la valeur asymptotique $Nu = 48/11 = 4,36$ correspondant au régime établi (§ 3.4.1). En outre, la comparaison avec le tableau 3.2 montre que Nu_x est toujours plus grand à flux imposé qu'à température imposée.

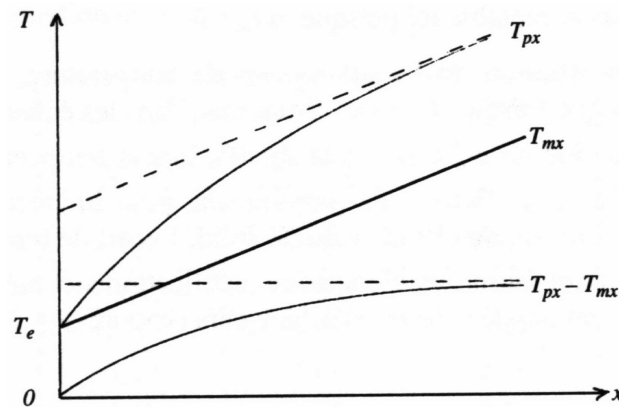


FIG. 3.5 - Zone d'entrée d'un tube avec flux φ_p uniforme. Evolution des températures (cas où $T_p > T_m$).

x^+ ou L^+	$\Theta_{mx}^+ - \Theta_{px}^+$	Nu_x
0,005	0,0724	13,81
0,01	0,096	10,40
0,02	0,124	8,06
0,04	0,152	6,56
0,06	0,174	5,76
0,08	0,186	5,37
0,1	0,196	5,11
0,2	0,218	4,59
0,4	0,225	4,45
∞	0,229	4,36

Tableau 3.4 - Zone d'entrée d'un tube cylindrique avec flux φ_p imposé. Grandeurs locales adimensionnées.

- ♠ Reste la question des grandeurs moyennes sur un tronçon $[0, L]$. Elle est sans objet en ce qui concerne le flux à la paroi, puisque $\varphi_p = cte$. De même pour la température de mélange : puisque T_{m_x} varie linéairement avec x (relation 3.104), sa moyenne T_m est évidemment :

$$T_m = \frac{1}{2}(T_e + T_s)$$

Par contre, pour l'écart de température $T_{m_x} - T_{p_x}$ et pour le nombre de Nusselt, on retombe sur le même problème que dans le cas précédent (§ 3.6.3). De plus, le calcul de Nu moyen est compliqué ici par le fait que $Nu_x \rightarrow \infty$ quand $x^+ \rightarrow 0$. Enfin, on doit signaler que l'écart de température logarithmique moyen :

$$\Delta T_{LM} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_s}{\ln\left(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_s}\right)}$$

(cf. 3.95a) n'est pas acceptable ici puisque $\Delta T_e = 0$.

Quant à la linéarisation de l'écart moyen de température, elle appelle les mêmes remarques que lorsque $T_p = cte$. Toutefois, dans les échangeurs, si l'on se trouve dans la situation où $\varphi_p \approx cte$ cela signifie que la température de mélange est linéaire dans les deux fluides. Par conséquent, pour le calcul du coefficient global d'échange entre fluide chaud et fluide froid, l'écart de température $T_c - T_f$ sera bien linéaire. Ceci fournit un élément de justification aux méthodes de calcul habituellement recommandées pour les échangeurs (voir aussi § 3.4.3.5).

3.6.5. - Établissement simultané des régimes dynamique et thermique : exemple avec $T_{m_x} - T_{p_x} = cte$

Si les conditions thermiques à la paroi sont appliquées dès l'entrée de la canalisation, il se développe à la fois une couche limite dynamique et une couche limite thermique : ni le régime dynamique ni le régime thermique ne sont établis, sauf à une distance suffisante de l'entrée.

En général, pour les calculs, on se base sur des profils de vitesse et de température uniformes dans la section d'entrée, ce qui est souvent assez loin de la réalité, mais il faut bien adopter des hypothèses simples.

Les résultats montrent que, par rapport aux situations où le régime hydraulique est établi, la double mise en place des champs de vitesse et de température se traduit par une *augmentation sensible du coefficient d'échange local* h_x au voisinage de l'entrée (de 30 à 50%). L'écart s'atténue ensuite pour devenir nul quand les deux régimes sont établis

On observe cependant que l'hypothèse " U uniforme à l'entrée" (champ de vitesse dit "de Langhaar") est le cas le plus favorable ; toute autre distribution de vitesse plus réaliste conduit à une augmentation moindre de h_x . Les valeurs expérimentales courantes sont donc comprises entre les deux extrêmes à "profil d'entrée parabolique" et à "profil d'entrée uniforme".

A titre d'exemple nous donnons (tableau 3.5) Nu_x et Nu moyen pour U uniforme à l'entrée, dans le cas où $T_{m_x} - T_{p_x} = cte = T_m - T_p$. C'est une situation dont nous n'avons pas encore parlé : en régime établi elle ne se distingue pas de la condition $\varphi_p = cte$ (§ 3.4.1) mais près d'une entrée elle correspond assez bien aux échangeurs à contre-courant ou à courants croisés quand les débits thermiques unitaires des deux fluides ne sont pas trop différents.

Le gros avantage de cet exemple est que, puisque l'écart $T_{m_x} - T_{p_x}$ est constant, le calcul de sa moyenne est vite fait ; il n'y a aucune question à se poser sur la meilleure approximation de $T_m - T_p$.

$x^+ = \frac{l}{Pe} \frac{2x}{D}$	Nu_x	Nu
0,005	11,80	17,81
0,010	8,36	13,76
0,020	6,40	10,48
0,040	5,21	8,08
0,080	4,56	6,44
0,10	4,48	6,06
0,4	4,39	4,82
∞	4,36	4,36

Tableau 3.5 - Grandeur locales et moyennes avec $T_{m_x} - T_{p_x} = cte$, profils de vitesse et de température uniformes à l'entrée.

3.6.6. - Longueur d'établissement

Une question pratique souvent posée est celle-ci : à partir de quelle distance de l'entrée peut-on considérer que le régime thermique est établi ?

La question a été évoquée au paragraphe 3.4.3.2 où nous avons indiqué pour la longueur d'établissement L_e dans un tube circulaire un ordre de grandeur donné par $L_e / D \approx 0,08 Pe$.

Nous sommes maintenant en mesure de disposer d'informations plus précises à partir des tableaux 3.2, 3.4 et 3.5. Si nous admettons comme critère conventionnel que le régime établi est atteint pour :

$$\frac{Nu_x}{Nu_\infty} > 0,95$$

on voit que la longueur d'établissement L_e correspondante est la suivante :

$$\left. \begin{array}{l} T_p = cte \quad : \quad x_e^+ \approx 0,070 \quad ; \quad \frac{L_e}{D} \approx 0,035 Pe \\ \varphi_p = cte \quad : \quad x_e^+ \approx 0,2 \quad ; \quad \frac{L_e}{D} \approx 0,1 Pe \\ T_{mx} - T_{px} = cte \quad : \quad x_e^+ \approx 0,070 \quad ; \quad \frac{L_e}{D} \approx 0,035 Pe \end{array} \right\} \quad (3.106)$$

Rappelons que $x^+ = \frac{2}{Pe} \frac{x}{D}$ et $Pe = \Re Pr$.

Quelques compléments numériques se trouvent dans le problème 3.4.

3.7. - ÉCOULEMENTS AVEC COUPLAGE THERMIQUE

3.7.1. - Retour sur la thermodépendance

Tous les fluides voient leur viscosité et leur conductivité thermique varier plus ou moins avec la température. Les conséquences de ce phénomène ont déjà été évoqués dans le chapitre 1 : la propriété $\mu(T)$ entraîne un couplage entre les champs de vitesse et de température (§ 1.2.5), et ceci quelle que soit la géométrie. Le problème se pose donc aussi dans les écoulements internes.

Plus précisément, dans les canalisations, la thermodépendance a souvent pour effet d'interdire l'existence d'un régime établi *stricto sensu*. En effet, sauf dans des cas très particuliers (cf. problème 3.3), la température de mélange du fluide n'est pas constante le long de l'écoulement. Les variations de viscosité qui en résultent ont alors pour conséquence une modification progressive du profil de vitesse, ce qui se traduit en toute rigueur par $V \neq 0$ et $\partial U / \partial x \neq 0$, et nous ramène à l'équation de bilan (3.70b). Certains auteurs ont bien effectué des calculs en admettant en première approximation soit un régime dynamique établi, soit un "régime semi-établi" (défini par $V \approx 0$ et $\partial U / \partial x \neq 0$). En outre, sous diverses hypothèses (concernant notamment la forme de la loi $\mu(T)$), on arrive à trouver des cas de régimes établis, ou assimilés (Problèmes 3.2 et 3.3).

Mais quoi qu'il en soit, la thermodépendance introduit de toutes façons des complications supplémentaires. Pour cette raison, on a cherché à formuler les

résultats d'une façon synthétique et approchée en adaptant un terme correctif aux expressions de φ_p , St ou C_f obtenues pour des fluides de propriétés constantes.

3.7.2. - Écoulements de liquides ; tubes circulaires

Dans les écoulements de liquides, la température affecte essentiellement la viscosité dynamique μ . A la suite de travaux tant expérimentaux que numériques, on admet habituellement une correction sur le nombre de Stanton (ou de Nusselt) de la forme :

$$St = St_m \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14} \quad (3.107)$$

où μ_m et St_m sont évalués à la température de mélange T_m , tandis que μ_p est prise à la température de la paroi (localement ou en moyenne sur la longueur du conduit).

Cette adaptation s'applique à tous les cas déjà envisagés dans ce chapitre. L'exposant de μ_m / μ_p dépend légèrement de la fonction $\mu(T)$ et des conditions aux limites, mais la valeur $0,14$ retenue constitue une bonne moyenne.

Pour le coefficient de frottement, une formulation analogue convient aussi, avec toutefois un exposant différent selon que le fluide est chauffé ou refroidi :

- Si $T_p < T_m$ (fluide refroidi)

$$C_f = C_{f m} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{-0,5} \quad (3.108a)$$

- Si $T_p > T_m$ (fluide chauffé)

$$C_f = C_{f m} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{-0,58} \quad (3.108b)$$

Il apparaît à la lecture de ces formules que l'effet de la thermodépendance est sensiblement plus marqué sur le coefficient de frottement (et par conséquent sur la perte de charge) que sur le transfert de chaleur, et qu'il est en outre inversé (exposant de μ_m / μ_p positif pour St et négatif pour C_f).

On doit bien prendre garde ici au fait que la règle s'applique aux nombres sans dimension C_f et St , et non pas à la contrainte τ_p ou au flux φ_p . Pour la transposer à τ_p ou φ_p , il faut tenir compte du fait que, si les conditions aux limites sont identiques, le débit ne sera pas le même avec la viscosité réelle et avec une viscosité uniforme prise à T_m (cf. problème 3.3). Les grandeurs sans dimension tiennent compte de ce décalage puisqu'elles sont rapportées à la vitesse débitante réelle.

Les modifications du champ de vitesse à l'origine des corrections (3.107 et 3.108) sont schématisées sur la figure 3.6, dans le cas d'un liquide. On voit que, à débit constant, le gradient de vitesse à la paroi est plus important quand le fluide est chauffé (courbe 2) ce qui est compensé par une diminution de U dans la partie centrale, imposée par la conservation du débit. L'inverse se produit si le fluide est refroidi (courbe 3).

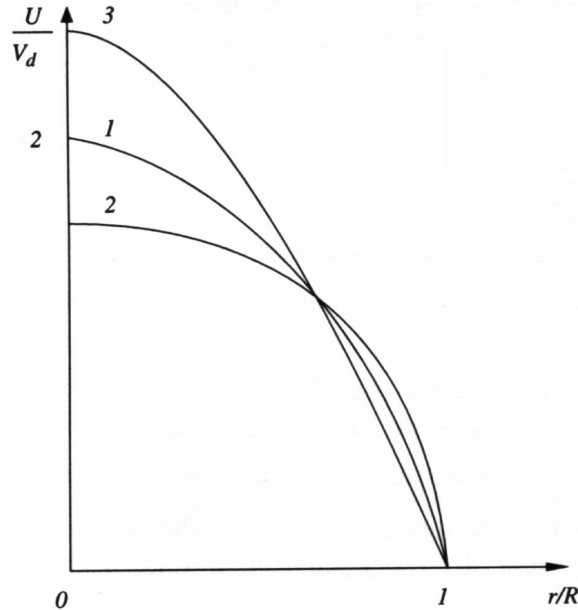


FIG. 3.6 – Influence du gradient de température sur le profil de vitesse dans un écoulement de liquide. 1 : viscosité constante $\mu = \mu(T_m)$; 2 : $\mu = \mu(T)$ avec $T_p > T_m$; 3 : $\mu = \mu(T)$ avec $T_p < T_m$.

On pourrait être tenté d'en déduire (en considérant toujours un liquide) que le frottement pariétal augmente si le fluide est chauffé et diminue s'il est refroidi. Mais il n'en est rien, du fait que la viscosité μ varie en sens contraire. Si bien que en définitive $\tau_p = \mu \partial U / \partial y$ est plus faible dans le cas $T_p > T_m$; il en est de même pour le coefficient de frottement et pour la perte de charge.

Toujours à propos du profil de vitesse, revenons rapidement sur l'hypothèse "régime semi-établi" utilisée dans certains calculs : admettre $V \approx 0$ et $\partial U / \partial x \neq 0$ ne permet pas de satisfaire à l'équation de continuité, et donc à la conservation du débit. Il faut donc être relativement prudent avec ce genre d'approximation, en s'assurant qu'elle n'introduit pas une dérive excessive.

Pour en revenir à l'ampleur des corrections, illustrons-la sur un exemple : dans le cas de l'eau, où μ est divisée par 2 entre $10^\circ C$ et $40^\circ C$, on trouve (avec $T_p = 10^\circ C$ et $T_m = 40^\circ C$) :

$$St = 0,91 St_m \quad (\text{soit } -9\% \text{ de correction})$$

$$C_f = 1,41 C_{f_m} \quad (\text{soit } +41\% \text{ de correction})$$

Ces chiffres sont encore amplifiés avec des fluides comme les huiles, dont la viscosité varie beaucoup plus fortement en fonction de T .

3.7.3. - Écoulements de liquides entre deux plans parallèles

Dans un conduit rectangulaire plat, l'influence de la thermodépendance sur le champ de vitesse est qualitativement la même que dans un tube cylindrique (fig. 3.6). Toutefois, les informations précises sur les écoulements de liquides thermodépendants entre deux plans parallèles sont plus parcellaires et les conclusions moins nettes.

Ainsi, en se basant sur une loi $\mu(T)$ de forme exponentielle, Arnaud et Fortier [1975] montrent l'existence d'un régime établi. Les corrections sur C_f et St sont données sous forme graphique, mais leur exploitation permet de les présenter d'une manière analogue à (3.107). Cela donne :

$$St \approx St_m \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,10} \quad (3.109a)$$

$$C_f \approx C_{f_m} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{-0,52} \quad (\text{pour } T_p < T_m) \quad (3.109b)$$

Les valeurs des exposants sont donc ici proches de celles que nous avons rencontrées dans les tubes circulaires, particulièrement pour C_f .

Par contre, en s'appuyant sur un certain nombre de résultats expérimentaux, Zukauskas recommande de prendre :

$$St = St_m \left(\frac{Pr_m}{Pr_p} \right)^{0,25} \quad (3.109c)$$

ce qui, pour les liquides, se ramène pratiquement à une correction en $(\mu_m / \mu_p)^{0,25}$. L'écart est important avec l'estimation précédente.

Enfin, l'usage est plutôt de conserver la même correction en $(\mu_m / \mu_p)^{0,14}$ que dans les tubes circulaires, mais sans que cette règle apparaisse très solidement fondée.

3.7.4. - Écoulements de gaz ; tubes cylindriques

Tous les auteurs s'accordent pour dire que la thermodépendance a une faible influence sur les transferts de chaleur dans les écoulements de gaz. On peut donc soit la négliger purement et simplement, soit pour des écarts de température importants, conserver la correction en $(\mu_m / \mu_p)^{0,14}$ sur St .

En ce qui concerne le coefficient de frottement, il semble sensiblement proportionnel à $(\mu_m / \mu_p)^{-1}$:

$$C_f \approx C_{f m} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{-1} \equiv C_{f m} \frac{\mu_p}{\mu_m} \quad (3.110)$$

3.7.5. - Pour conclure

Etant donnée la ressemblance des formules correctives entre écoulements externes (Ch. 1) et écoulements internes, on peut se demander s'il y a lieu de relier les deux cas, du moins qualitativement. En fait, la réponse est négative. Une comparaison avec les écoulements externes serait purement formelle et non significative puisque ni les températures ni les vitesses de référence ne sont les mêmes dans les deux géométries.

ANNEXES AU CHAPITRE 3

3.A.1. - SOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLÈME DE GRAETZ

Nous détaillons ici la résolution analytique du problème suivant (§ 3.6.2) : régime dynamique établi, température T_p uniforme imposée à la paroi à partir d'une abscisse $x=0$. Il s'agit d'obtenir le champ de température dans la zone d'établissement du régime thermique.

a) - *Ligne de départ*

Le système à résoudre est constitué par les équations et les conditions aux limites (3.79) que nous réécrivons ci-dessous :

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dx^+} = -\lambda^2 \quad (3.A.1)$$

$$\frac{d}{dr^+} \left(r^+ \frac{d\Psi}{dr^+} \right) = -\lambda^2 r^+ (1-r^{+2}) \Psi \quad (3.A.2)$$

$$\Phi(0)=1 \quad ; \quad \Psi(1)=0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r^+} \right)_{r^+=0} = 0 \quad (3.A.3)$$

La solution de la première équation est de type exponentiel. C'est la seconde équation qui requiert d'abord notre attention.

b) - *Principe des développements asymptotiques*

Sur $[a, b] \in \mathbb{R}$, toute fonction $f(y)$ qui possède les propriétés les plus classiques de régularité peut être exprimée sous la forme d'un développement asymptotique, c'est à dire d'une somme infinie de termes (ou série) :

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n f_n(y) \quad (3.A.4)$$

où $f_n(y)$ est un ensemble de fonctions orthogonales par rapport à une fonction densité $u(y) > 0$, tel que :

$$\int_a^b u(y) f_m(y) f_n(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ N_n & \text{si } m = n \end{cases} \quad (3.A.5)$$

Les constantes N_n sont égales à 1 dans le cas où l'ensemble a été normalisé.

Les coefficients C_n sont déterminés par multiplication des deux membres de (3.A.4) par $u(y) f_n(y)$ et intégration, en tenant compte de la propriété d'orthogonalité :

$$C_n = \frac{\int_a^b u(y) f(y) f_n(y) dy}{\int_a^b u(y) f_n^2(y) dy} = \frac{1}{N_n} \int_a^b u(y) f(y) f_n(y) dy \quad (3.A.6)$$

Lorsque la fonction densité $u(y) = 1$, les C_n sont les coefficients de Fourier de la série.

Si maintenant la fonction étudiée est une fonction de deux variables séparées, représentée symboliquement par :

$$\theta(x, r) = \Phi(x) \psi(r) \quad (3.A.7)$$

Φ et ψ peuvent être considérées comme des vecteurs de composantes Φ_n et ψ_n , et le développement s'écrira :

$$\theta(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \Phi_n(x) \psi_n(r) \quad (3.A.8)$$

c) - *Nature du problème*

Un problème de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left\{ s(y) \frac{d\psi}{dy} \right\} + \{ t(y) + \lambda^2 u(y) \} \psi(y) &= 0 \\ y \in [a, b] & \\ \alpha_1 \psi(a) + \alpha_2 \psi'(a) &= 0 \\ \beta_1 \psi(b) + \beta_2 \psi'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (3.A.9)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont des constantes données, $s(y), t(y), u(y)$ des fonctions données dérivables, λ un paramètre non spécifié, un tel problème donc est un système de Sturm-Liouville. Il possède en général un ensemble infini de solutions

non triviales $\psi_n(x)$ correspondant à des valeurs particulières λ_n du paramètre λ . Les λ_n sont les valeurs propres du système et les ψ_n ses fonctions propres.

Si $s(y)$ et $t(y)$ sont réelles, les valeurs propres sont également réelles, et les fonctions propres forment un ensemble orthogonal par rapport à la fonction densité $u(y)$.

Il est aisé de vérifier que le système (3.A.2 et 3.A.3) est un système de Sturm-Liouville, en procédant aux correspondances suivantes dans l'équation (3.A.9) :

$$\begin{aligned} y &\Rightarrow r^+ & ; & & s(y) &\Rightarrow r^+ & ; & & t(y) &= 0 \\ u(y) &\Rightarrow r^+ (1-r^{+2}) & > 0 & & & & & & & \end{aligned} \quad (3.A.10)$$

et aux bornes :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \psi(0) + \alpha_2 \psi'(0) &= 0 & & \text{d'après (3.A.3)} \\ \beta_1 \psi(1) + \beta_2 \psi'(1) &= 0 & & \text{vérifiée avec } \beta_2 = 0 \end{aligned}$$

Les fonctions propres ψ_n sont les solutions du système :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr^+} \left(r^+ \frac{d\psi_n}{dr^+} \right) &= -\lambda_n^2 r^+ (1-r^{+2}) \psi_n \\ \psi_n(1) &= 0 & ; & & \psi_n'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.A.11)$$

D'autre part, en prenant maintenant en compte notre première équation (3.A.1), à chaque valeur propre λ_n de (3.A.11) correspond une solution Φ_n telle que :

$$\frac{1}{\Phi_n} \frac{d\Phi_n}{dx^+} = -\lambda_n^2 \quad (3.A.12)$$

soit :

$$\Phi_n \approx e^{-\lambda_n^2 x^+} \quad (3.A.13)$$

La solution générale du problème se présentera alors sous la forme d'un développement du type (3.A.8) :

$$\theta^+(x^+, r^+) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \Phi_n(x^+) \psi_n(r^+) \quad (3.A.14)$$

ceci en application du principe de superposition : si t_1, \dots, t_n sont des solutions d'un système différentiel linéaire et homogène, toute combinaison linéaire des t_j est également solution, la solution générale étant celle qui satisfait les conditions aux limites.

d) - *Orthogonalité des fonctions propres ψ_n*

Selon (3.A.5) et (3.A.10) nous voulons montrer que :

$$\int_0^1 r^+ (1-r^{+2}) \psi_n(r^+) \psi_m(r^+) dr^+ = 0 \quad \text{si } m \neq n \quad (3.A.15)$$

Considérons deux solutions propres ψ_n et ψ_m de (3.A.11) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr^+} \left(r^+ \frac{d\psi_n}{dr^+} \right) &= -\lambda_n^2 r^+ (1-r^{+2}) \psi_n \\ \frac{d}{dr^+} \left(r^+ \frac{d\psi_m}{dr^+} \right) &= -\lambda_m^2 r^+ (1-r^{+2}) \psi_m\end{aligned}$$

Multiplions la première relation par ψ_m , la seconde par ψ_n , et soustrayons membre à membre :

$$\psi_m \frac{d}{dr^+} \left(r^+ \frac{d\psi_n}{dr^+} \right) - \psi_n \frac{d}{dr^+} \left(r^+ \frac{d\psi_m}{dr^+} \right) = -(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) r^+ (1-r^{+2}) \psi_n \psi_m$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{d}{dr^+} \left\{ r^+ \left(\psi_m \frac{d\psi_n}{dr^+} - \psi_n \frac{d\psi_m}{dr^+} \right) \right\} = (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) r^+ (1-r^{+2}) \psi_n \psi_m \quad (3.A.16)$$

Intégrons les deux membres sur l'intervalle $[0, I]$. On obtient :

$$\left[r^+ \left\{ \psi_m \frac{d\psi_n}{dr^+} - \psi_n \frac{d\psi_m}{dr^+} \right\} \right]_0^I = (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^I r^+ (1-r^{+2}) \psi_n \psi_m dr^+ \quad (3.A.17)$$

Or, d'après (3.A.11) :

$$\psi_m(I) = \psi_n(I) = 0$$

Le premier membre est donc nul, et la propriété (3.A.15) est vérifiée, C.Q.F.D.

e) - *Calcul des coefficients C_n*

Revenons à la solution générale du problème :

$$\theta^+(x^+, r^+) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \Phi_n(x^+) \psi_n(r^+) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 x^+} \psi_n(r^+) \quad (3.A.18)$$

A l'entrée de la zone anisotherme ($x^+ = 0$) on a (cf. 3.75b) :

$$\theta^+(0, r^+) = I$$

soit en utilisant provisoirement l'indice m :

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \psi_m(r^+) = I \quad (3.A.19)$$

Multiplions les deux membres par $r^+(1-r^{+2})\psi_n$ et intégrons sur $[0, I]$. En vertu de la propriété d'orthogonalité (3.A.15) il reste :

$$\int_0^I C_n r^+ (1-r^{+2}) \psi_n^2 dr^+ = \int_0^I r^+ (1-r^{+2}) \psi_n dr^+$$

c'est à dire :

$$C_n = \frac{\int_0^I r^+ (1-r^{+2}) \psi_n dr^+}{\int_0^I r^+ (1-r^{+2}) \psi_n^2 dr^+} = \frac{N_n}{D_n} \quad (3.A.20)$$

Calculons d'abord le *numérateur* N_n en intégrant simplement l'équation (3.A.11) :

$$\int_0^1 \frac{d}{dr^+} \left(r^+ \frac{d\psi_n}{dr^+} \right) dr^+ = -\lambda_n^2 \int_0^1 r^+ (1-r^{+2}) \psi_n dr^+$$

soit :

$$N_n = \int_0^1 r^+ (1-r^{+2}) \psi_n dr^+ = -\frac{1}{\lambda_n^2} \left[r^+ \frac{d\psi_n}{dr^+} \right]_0^1$$

ou encore :

$$N_n = -\frac{1}{\lambda_n^2} \left(\frac{d\psi_n}{dr^+} \right)_{r^+=1} \quad (3.A.21)$$

Examinons ensuite le *dénominateur* D_n de (3.A.20).

Pour cela, nous partons de la relation (3.A.17) établie en étudiant l'orthogonalité des fonctions propres. Remplaçons la grandeur discrète λ_n par une grandeur continue λ :

$$(\lambda^2 - \lambda_n^2) \int_0^1 r^+ (1-r^{+2}) \psi_n(r^+) \psi(r^+) dr^+ = \left[r^+ \left\{ \psi \frac{d\psi_n}{dr^+} - \psi_n \frac{d\psi}{dr^+} \right\} \right]_0^1$$

et faisons tendre λ vers λ_n :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \int_0^1 r^+ (1-r^{+2}) \psi_n \psi dr^+ = \int_0^1 r^+ (1-r^{+2}) \psi_n^2 dr^+ = D_n$$

On a ainsi :

$$D_n = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{\left[r^+ \left\{ \psi \frac{d\psi_n}{dr^+} - \psi_n \frac{d\psi}{dr^+} \right\} \right]_0^1}{\lambda^2 - \lambda_n^2} \quad (3.A.22)$$

Si $\lambda \rightarrow \lambda_n$, en considérant ψ comme une fonction de λ , un développement au premier ordre donne :

$$\psi = (\lambda - \lambda_n) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_n}$$

Rappelant d'autre part que $\psi_n(1) = 0$, on obtient simplement :

$$D_n = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{(\lambda - \lambda_n) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_n, r^+=1} \left(\frac{d\psi_n}{dr^+} \right)_{r^+=1}}{(\lambda - \lambda_n)(\lambda + \lambda_n)}$$

et en abrégant par commodité l'écriture de la dérivée selon λ :

$$D_n = \frac{1}{2\lambda_n} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial \lambda_n} \frac{d\psi_n}{dr^+} \right)_{r^+=1} \quad (3.A.23)$$

Finalement, de (3.A.20, 21 et 23) on tire :

$$C_n = -\frac{I}{\lambda_n^2} \left(\frac{d\psi_n}{dr^+} \right)_{r^+=1} \frac{2\lambda_n}{\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda_n} \frac{d\psi_n}{dr^+} \right)_{r^+=1}}$$

$$C_n = -\frac{2}{\lambda_n \left(\frac{\partial\psi_n}{\partial\lambda_n} \right)_{r^+=1}} \quad (3.A.24)$$

f) - *Calcul numérique des valeurs propres λ_n et des C_n*

Partons de l'équation (3.A.2) développée :

$$\frac{d\Psi}{dr^+} + r^+ \frac{d^2\Psi}{dr^{+2}} + \lambda^2 r^+ (1 - r^{+2}) \Psi = 0$$

Nusselt a montré l'existence d'une solution qui est une série en puissances de λr^+ , soit :

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\lambda r^+)^n \quad (3.A.25)$$

Reportons dans l'équation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n n (r^+)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} r^+ b_n \lambda^n n (n-1) (r^+)^{n-2} + \lambda^2 r^+ (1 - r^{+2}) \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n (r^+)^n = 0$$

On regroupe et simplifie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n \lambda^n (r^+)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^{n+2} (r^+)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^{n+2} (r^+)^{n+3} = 0$$

Divisons par $\lambda^2 r^+$ et posons temporairement $\xi = \lambda r^+$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n \xi^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \xi^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda^2} \xi^{n+2} = 0$$

Décalons les indices pour avoir ξ^k partout, ce qui est plus commode :

$$\sum_{k=-2}^{\infty} (k+2)^2 b_{k+2} \xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi^k - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_{k-2}}{\lambda^2} \xi^k = 0$$

Enfin, faisons apparaître explicitement les premiers termes des séries (le tout premier est nul puisque $k+2=0$ pour $k=-2$) :

$$b_1 \xi^{-1} + (4b_2 + b_0) + (9b_3 + b_1) \xi + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ (k+2)^2 b_{k+2} + b_k - \frac{b_{k-2}}{\lambda^2} \right\} \xi^k = 0 \quad (3.A.26)$$

Cette équation doit être vérifiée pour tout ξ . Les coefficients de chacun des termes doivent donc être nuls :

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= -\frac{b_0}{4} \\ b_3 &= 0 \\ &\text{-----} \\ b_{k+2} &= \frac{1}{(k+2)^2} \left(\frac{b_{k-2}}{\lambda^2} - b_k \right) \quad (k \geq 2) \end{aligned} \quad (3.A.27)$$

Ceci entraîne en particulier que tous les b_j d'indice impair sont nuls. On peut donc écrire finalement, selon (3.A.25) :

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} (\lambda r^+)^{2n} \quad (3.A.28)$$

expression dans laquelle les b_{2n} ($n > 0$) dépendent de b_0 , qui n'est pas encore précisé. D'autre part λ est déterminée par la condition à la limite (3.A.3) :

$$\psi(1) = 0$$

Il y a donc interdépendance entre λ et b_0 . De ce fait nous pouvons choisir arbitrairement b_0 , et on a convenu de prendre :

$$b_0 = 1$$

d'où :

$$b_2 = -\frac{1}{4}, \quad b_{2n} = \frac{1}{4n^2} \left(\frac{1}{\lambda^2} b_{2n-4} - b_{2n-2} \right) \quad (3.A.29)$$

et la condition $\psi(1) = 0$ s'écrit :

$$\psi(1) = 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4} \right) \lambda^4 + \dots = 0 \quad (3.A.30)$$

Cette équation possède un nombre infini de racines λ_n qui sont les valeurs propres du problème. Sa résolution s'apparente à la recherche des zéros d'un polynôme. Les premières racines ont été données dans le tableau 3.1.

A partir du moment où les λ_n sont connues, le calcul de C_n (formule 3.A.24) est immédiat puisqu'on a selon (3.A.25) :

$$\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial \lambda_n} \right)_{r^+=1} \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)_{\substack{r^+=1 \\ \lambda=\lambda_n}} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} (2m) \lambda_n^{2m-1} \quad (3.A.31)$$

où l'on prendra garde à bien dissocier l'indice n correspondant à λ_n et l'indice de sommation, désigné ci-dessus par m .

L'application de (3.A.24) conduit au résultat cherché pour les C_n .

PROBLÈMES

PROBLÈME 3.1

Énoncé

On considère un écoulement entre deux plans parallèles dont l'un est fixe, et l'autre animé d'une vitesse U_e selon la direction x . La distance e entre les deux plans est constante, et la direction perpendiculaire aux plans est notée y . Les températures de parois sont imposées : $T_0 (y=0)$ et $T_e (y=e)$. Le gradient de pression $\partial p^* / \partial x$ est nul, et on considère que le problème est unidimensionnel. La fonction de dissipation Φ est prise en compte ($\Phi = \mu (\partial U / \partial y)^2$ dans un écoulement unidimensionnel).

1 - Déterminer les profils de vitesse U et de température T entre les deux plaques.

2 - On définit le ΔT de référence par $\Delta T^0 = T_e - T_0$, et on pose : $T^+ = (T - T_0) / (T_e - T_0)$ ($T_e - T_0$ peut être positif ou négatif). Choisir les autres grandeurs de référence et exprimer T^+ en fonction de y^+ et de nombres sans dimension significatifs du problème étudié.

3 - Tracer l'allure de quelques courbes $T^+(y^+)$. Déterminer à quelles conditions T^+ présente un extrémum entre les deux plaques. Interpréter physiquement les différents profils possibles de T^+ .

4 - Calculer les flux pariétaux φ_{p0} et φ_{pe} (en valeur algébrique). Montrer que les nombres de Stanton St_0 et St_e s'expriment en fonction de Pe , Ec et \mathfrak{R} .

5 - Application numérique. Le fluide est une huile de lubrification : $\lambda = 0,145 \text{ W/m.K}$; $\mu = 0,032 \text{ Pa.s}$. Le système est un palier de diamètre intérieur 20 mm et d'épaisseur $e = 1 \text{ mm}$. Le cylindre intérieur est supposé fixe ; le cylindre extérieur tourne à $N = 6000 \text{ tours/mn}$. On impose $T_e - T_0 = 10^\circ \text{ C}$. Calculer φ_{p0} et φ_{pe} .

Solution

1 - Si le problème est unidimensionnel : $V = 0$ et $U = U(y)$, soit $\partial U / \partial x = 0$. De même $T = T(y)$ et $\partial T / \partial x = 0$.

Avec les données, l'équation de quantité de mouvement (3.9) devient :

$$0 = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

et (3.14b), qui contient la fonction de dissipation, s'écrit :

$$0 = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_p} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$$

Première équation :

L'intégration donne : $U = A y + B$ (profil linéaire)

Conditions aux limites :

$$y = 0 \quad , \quad U = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad (\text{paroi fixe})$$

$$y = e \quad , \quad U = U_e \quad \Rightarrow \quad A = \frac{U_e}{e} \quad (\text{paroi mobile})$$

d'où le profil de U :

$$U = \frac{U_e}{e} y \tag{1}$$

Deuxième équation :

On remplace U par (1) et a par $\lambda / \rho C_p$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{U_e}{e} \right)^2$$

$$T = -\frac{\mu}{\lambda} \frac{U_e^2}{e^2} \frac{y^2}{2} + \alpha y + \beta$$

Le profil de température est parabolique.

Conditions aux limites

$$y = 0 \quad , \quad T = T_0 \quad \Rightarrow \quad \beta = T_0$$

$$y = e \quad , \quad T = T_e \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\mu}{2\lambda} \frac{U_e^2}{e}$$

d'où le profil de T :

$$T - T_0 = -\frac{\mu}{2\lambda} \frac{U_e^2}{e^2} y^2 + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\mu}{2\lambda} \frac{U_e^2}{e} \right) y \tag{2}$$

2 - Les grandeurs de référence qui restent à choisir sont L^0 et V^0 . Il est logique de prendre :

$$L^0 = e \quad ; \quad V^0 = U_e$$

d'où les grandeurs auxiliaires :

$$y^+ = \frac{y}{e} \quad ; \quad U^+ = \frac{U}{U_e}$$

Ecrivons l'équation (2) sous forme adimensionnelle :

$$\frac{T-T_0}{T_e-T_0} = -\frac{\mu}{2\lambda} \frac{U_e^2}{T_e-T_0} \frac{y^2}{e^2} + \left(1 + \frac{\mu}{2\lambda} \frac{U_e^2}{T_e-T_0}\right) \frac{y}{e}$$

soit :

$$T^+ = -\frac{\mu}{2\lambda} \frac{U_e^2}{T_e-T_0} y^{+2} + \left(1 + \frac{\mu}{2\lambda} \frac{U_e^2}{T_e-T_0}\right) y^+$$

Ecrivons :

$$\frac{\mu}{2\lambda} \frac{U_e^2}{T_e-T_0} = \frac{\mu C_p}{2\lambda} \frac{U_e^2}{C_p (T_e-T_0)}$$

On reconnaît deux nombres sans dimension :

- le nombre de Prandtl : $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$

- le nombre d'Eckert : $Ec = \frac{U_e^2}{C_p (T_e-T_0)} = \frac{(V^0)^2}{C_p \Delta T^0}$

Donc :

$$T^+ = -\frac{1}{2} Pr Ec y^{+2} + \left(1 + \frac{1}{2} Pr Ec\right) y^+ \tag{3}$$

3 - Les courbes T^+ sont des arcs de paraboles. Leur forme ne dépend que du produit $Pr Ec$. Dans le cas limite où $Ec = 0$ (conduction pure sans dissipation), T^+ est linéaire. Notons que le sens de la concavité des courbes est donné par le signe de $d^2 T^+ / d y^{+2}$. Par exemple, si ce terme est négatif, la concavité est tournée vers les basses valeurs de T^+ , donc ici vers la gauche ($-Pr Ec < 0 \Leftrightarrow Pr Ec > 0$)

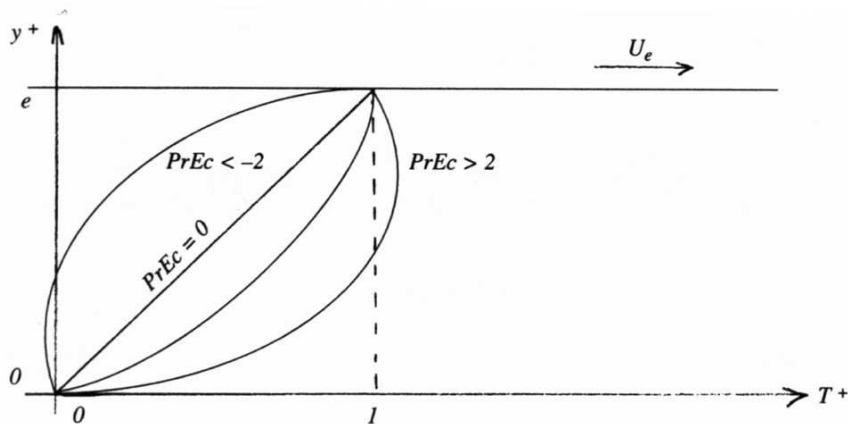


FIG. P.3.1.

$$\frac{dT^+}{dy^+} = -Pr Ec y^+ + 1 + \frac{1}{2} Pr Ec$$

$$\frac{dT^+}{dy^+} = 0 \quad \text{pour} \quad y^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{Pr Ec}$$

Entre les deux parois : $0 < y^+ < 1$. On a un extrênum dans cette zone si :

$$0 < \frac{1}{2} + \frac{1}{Pr Ec} < 1$$

soit :

$$\underline{Pr Ec < -2}$$

ou

$$\underline{Pr Ec > 2}$$

Interprétation : si $-2 < Pr Ec < 2$, les flux à travers les parois sont de même sens. Si $|Pr Ec| > 2$, ils sont de sens contraire : une partie de flux est donc dirigée vers la paroi chaude.

4 - D'après l'équation (2) :

$$\frac{dT}{dy} = \frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\mu}{2\lambda} \frac{U_e^2}{e} - \frac{\mu}{\lambda} \frac{U_e^2}{e^2} y$$

d'où les flux aux parois :

$$\varphi_{p0} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\lambda \frac{T_e - T_0}{e} - \mu \frac{U_e^2}{2e} \quad (4)$$

$$\varphi_{pe} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=e} = -\lambda \frac{T_e - T_0}{e} + \mu \frac{U_e^2}{2e} \quad (5)$$

La chaleur dissipée se distribue ici pour moitié entre les deux faces.

$$\text{Par définition : } St = \frac{\varphi_p}{\rho C_p V^0 \Delta T^0}$$

A la paroi fixe :

$$St_0 = \frac{\varphi_{p0}}{\rho C_p U_e (T_e - T_0)} = -\frac{\lambda}{e} \frac{1}{\rho C_p U_e} - \frac{1}{2} \frac{\mu U_e^2}{e \rho C_p U_e (T_e - T_0)}$$

$$= -\frac{a}{e U_e} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{e U_e} \frac{U_e^2}{C_p (T_e - T_0)}$$

On reconnaît :

$$\text{- le nombre de Péclet : } Pe = \frac{e U_e}{a} = \frac{L^0 V^0}{a}$$

$$\text{- le nombre de Reynolds : } \Re = \frac{e U_e}{\nu}$$

plus Ec déjà cité.

$$St_0 = -\frac{1}{Pe} - \frac{Ec}{2\Re}$$

Sur la paroi mobile :

$$St_e = -\frac{1}{Pe} + \frac{Ec}{2\Re}$$

5 - La vitesse relative des deux surfaces est :

$$U_e = \pi D \frac{N}{60} \quad \text{en } m/s$$

le diamètre extérieur D ayant pour valeur $20 + 2 \times 1 \text{ mm} = 22 \text{ mm}$

$$U_e = \pi 2,2 \cdot 10^{-2} \times \frac{600}{60} = 6,91 \text{ m/s}$$

(4) et (5) donnent :

$$\varphi_{p0} = -0,145 \frac{10}{10^{-3}} + 0,032 \frac{(6,91)^2}{2 \cdot 10^{-3}} = -1450 + 764$$

$$\varphi_{p0} = -686 \text{ W/m}^2$$

$$\underline{\underline{\varphi_{pe} = -1450 - 764 = -2214 \text{ W/m}^2}}$$

Les deux flux sont dirigés vers la partie fixe.

Commentaires

1) Les expressions de St font bien apparaître la superposition des deux phénomènes : conduction thermique (pour laquelle le critère de similitude est $\Gamma_a = 1/Pe$, relation 1.9) et dissipation visqueuse (pour laquelle le critère de similitude est $\Gamma_{\phi_v} = Ec/\Re$, relation 3.18).

On retrouverait d'ailleurs ces deux critères dans T^+ en écrivant :

$$Pr Ec = \Re Pr \frac{Ec}{\Re} = Pe \frac{Ec}{\Re}$$

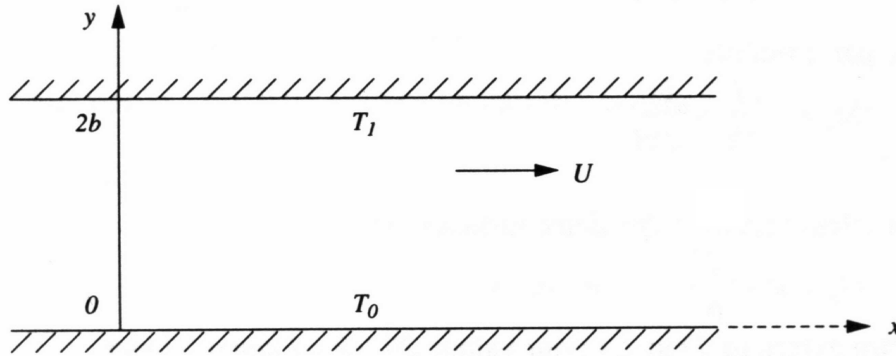
2) Dans l'exemple numérique, on voit que le flux "dissipatif" représente (en valeur absolue) environ 50% du flux conductif.

PROBLÈME 3.2

Énoncé

On considère un écoulement laminaire de liquide entre deux parois planes parallèles, distantes de $2b$. Un gradient de pression motrice $j = dp^*/dx < 0$

uniforme est imposé. Les deux parois sont à des températures fixées : T_0 en $y=0$, T_1 en $y=2b$.



La viscosité du fluide dépend de la température, sous la forme linéarisée : $\mu(T) = A(T - T_0) + B$. La fonction de dissipation Φ est négligée.

1 - En admettant l'existence d'un régime établi stabilisé (c'est à dire indépendant de x), calculer les distributions de température $T(y)$ et de viscosité $\mu(y)$ dans l'écoulement (on posera : $\alpha = A(T_1 - T_0)/2b$). Préciser les expressions de $\mu_0 = \mu(y=0)$ et $\mu_1 = \mu(y=2b)$.

2 - Pour le champ de vitesse, montrer qu'il existe une solution $U(y)$ compatible avec le résultat de la question 1. Calculer $U(y)$ (développer puis regrouper les termes pour présenter le résultat final). On rappelle les règles suivantes :

fonction	primitive
$\frac{1}{y+K}$	$\ln y+K $
$\ln y+K $	$(y+K)\ln y+K - (y+K)$

3 - Le fluide est de l'eau. On donne : $T_0 = 10^\circ \text{C}$, $T_1 = 40^\circ \text{C}$, $b = 2,5 \text{ mm}$, $j = -60 \text{ Pa/m}$.

Exprimer $\mu(T)$ et $\mu(y)$. Calculer les contraintes pariétales τ_{p0} et τ_{p1} en $y=0$ et $y=2b$ (en valeur absolue). Tracer approximativement (sans calculs supplémentaires) l'allure de la courbe $U(y)$.

N.B. : il est recommandé d'écrire $(dU/dy)_{y=0}$ et $(dU/dy)_{y=2b}$ en fonction de j , α , μ_0 et μ_1 .

4 - Commenter les résultats obtenus sur $T(y)$ et $U(y)$. Qu'y aurait-il de changé si l'on imposait T_0 sur une paroi et φ_{p1} sur l'autre ?

Solution

1 - Dans un écoulement bidimensionnel de fluide isochore, l'équation d'enthalpie est la relation (1.3) :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

Les conditions fixées correspondent à :

$$V = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

Il reste :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

soit :

$$\boxed{T(y) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2b} y} \quad (4)$$

La distribution de la température est linéaire.

La viscosité a pour valeur à l'ordonnée y :

$$\mu(y) = \mu[T(y)] = A\{T(y) - T_0\} + B$$

D'après (4) :

$$\mu(y) = A \frac{T_1 - T_0}{2b} y + B$$

et avec la définition de $\alpha = A \frac{T_1 - T_0}{2b}$:

$$\boxed{\mu(y) = \alpha y + B} \quad (5)$$

En particulier :

$$\mu(0) = \mu_0 = B \quad (6)$$

$$\mu(2b) = \mu_1 = 2b \alpha + B = A(T_1 - T_0) + B \quad (7)$$

2 - Partons de l'équation de quantité de mouvement :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{j}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

avec $j = \frac{d p^*}{d x}$. Ici : $\nu = \nu(y) = \frac{\mu(y)}{\rho}$

Les conditions d'écoulement établi imposent :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad ; \quad V = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

d'où :

$$U = U(y)$$

et :

$$\mu(y) \frac{d^2 U}{d y^2} = j$$

$$\frac{d^2 U}{d y^2} = \frac{j}{\alpha y + B} = \frac{j}{\alpha} \frac{1}{y + \frac{B}{\alpha}}$$

Cette équation s'intègre ainsi :

$$\frac{dU}{d y} = \frac{j}{\alpha} \ln \left| y + \frac{B}{\alpha} \right| + C_1$$

Une seconde intégration donne

$$U = \frac{j}{\alpha} \left\{ \left(y + \frac{B}{\alpha} \right) \ln \left| y + \frac{B}{\alpha} \right| - \left(y + \frac{B}{\alpha} \right) \right\} + C_1 y + C_2$$

Prenons en considération les conditions aux limites :

a) $y = 0$: $U = 0$

On en déduit :

$$C_2 = \frac{B j}{\alpha^2} \left\{ 1 - \ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| \right\}$$

b) $y = 2b$: $U = 0$

$$0 = \frac{j}{\alpha} \left\{ \left(2b + \frac{B}{\alpha} \right) \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| - \left(2b + \frac{B}{\alpha} \right) \right\} + 2b C_1 + \frac{B j}{\alpha^2} \left\{ 1 - \ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| \right\}$$

d'où l'expression de la constante C_1 :

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{j}{2b \alpha} \left\{ \left(2b + \frac{B}{\alpha} \right) \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| - \left(2b + \frac{B}{\alpha} \right) \right\} - \frac{B j}{2b \alpha^2} \left\{ 1 - \ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| \right\} \\ &= \frac{j}{2b \alpha} \left(2b + \frac{B}{\alpha} \right) \left(1 - \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| \right) - \frac{B j}{2b \alpha^2} \left\{ 1 - \ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| \right\} \\ &= \frac{j}{\alpha} \left(1 - \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| \right) + \frac{B j}{2b \alpha^2} \left\{ \ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| - \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| \right\} \end{aligned}$$

Reportons dans l'expression de U :

$$\begin{aligned} U &= \frac{j}{\alpha} \left\{ \left(y + \frac{B}{\alpha} \right) \ln \left| y + \frac{B}{\alpha} \right| - \left(y + \frac{B}{\alpha} \right) \right\} + \frac{j}{\alpha} \left(1 - \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| \right) y \\ &+ \frac{B j}{2b \alpha^2} \left(\ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| - \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| \right) y + \frac{B j}{\alpha^2} \left(1 - \ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| \right) \end{aligned}$$

On regroupe les termes en développant préalablement, et il vient :

$$U = \frac{j}{\alpha} \left(y + \frac{B}{\alpha} \right) \ln \left| y + \frac{B}{\alpha} \right| + \left\{ \frac{Bj}{2b\alpha^2} \left(\ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| - \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| \right) - \frac{j}{\alpha} \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| \right\} y - \frac{Bj}{\alpha^2} \ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| \quad (8)$$

On voit qu'il existe bien une solution analytique du champ de vitesse correspondant à un régime établi.

3 - Calculons d'abord le gradient de vitesse :

$$\frac{dU}{dy} = \frac{j}{\alpha} \ln \left| y + \frac{B}{\alpha} \right| + \frac{j}{\alpha} + \frac{Bj}{2b\alpha^2} \left\{ \ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| - \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| \right\} - \frac{j}{\alpha} \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| \quad (9)$$

A la paroi $y=0$, en regroupant les termes :

$$\left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} = \frac{j}{\alpha} + \frac{j}{\alpha} \ln \left| \frac{B}{2b\alpha + B} \right| + \frac{Bj}{2b\alpha^2} \ln \left| \frac{B}{2b\alpha + B} \right|$$

ou encore, puisque d'après la question (1) :

$$\frac{B}{2b\alpha + B} = \frac{\mu_0}{\mu_1} \quad \text{et} \quad B = \mu_0 \quad (10)$$

$$\left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} = \frac{j}{\alpha} + \frac{j}{\alpha} \left(1 + \frac{\mu_0}{\mu_1 - \mu_0} \right) \ln \frac{\mu_0}{\mu_1} \quad (11)$$

A la paroi $y=2b$, le premier et le dernier terme de dU/dy se simplifient ; il reste :

$$\left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=2b} = \frac{j}{\alpha} + \frac{Bj}{2b\alpha^2} \ln \left| \frac{B}{2b\alpha + B} \right|$$

$$\left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=2b} = \frac{j}{\alpha} + \frac{\mu_0 j}{\alpha(\mu_1 - \mu_0)} \ln \frac{\mu_0}{\mu_1} \quad (12)$$

Les contraintes pariétales ont pour expression :

$$\tau_{p0} = \mu_0 \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} \quad \text{et} \quad \tau_{p1} = \mu_1 \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=2b} \quad (13)$$

Le fluide étant de l'eau, on trouve dans les tables :

- Pour $T_0 = 10^\circ C$: $\mu_0 = 1,30.10^{-3} Pa.s$

- Pour $T_1 = 40^\circ C$: $\mu_1 = 0,65.10^{-3} Pa.s$

En fonction de la température :

$$\mu(T) = A(T - T_0) + B$$

avec :

$$B = \mu_0 = 1,30.10^{-3}$$

et :

$$A = \frac{\mu_1 - \mu_0}{T_1 - T_0} = -2,166.10^{-5}$$

$$\mu(T) = -2,166.10^{-5} (T - T_0) + 1,30.10^{-3} \quad (14)$$

En fonction de y (cf. question 1) :

$$\mu(y) = \alpha y + B$$

avec :

$$\alpha = \frac{A(T_1 - T_0)}{2b} = \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{2b} = -\frac{0,65.10^{-3}}{5.10^{-3}}$$

$$\alpha = -0,13 \quad (15)$$

$$\mu(y) = -0,13 y + 1,30.10^{-3} \quad (16)$$

Ainsi, dans les expressions des gradients de vitesse, nous avons : $\frac{\mu_0}{\mu_1} = 2$ et

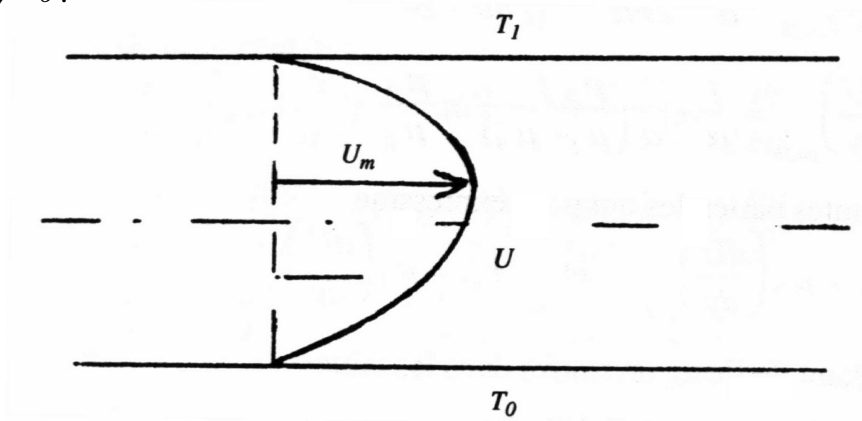
$\frac{\mu_0}{(\mu_1 - \mu_0)} = -2$. Le calcul donne :

$$\left(\frac{dU}{dy}\right)_{y=0} = 141,6 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad \left(\frac{dU}{dy}\right)_{y=2b} = -178 \text{ s}^{-1}$$

$$\tau_{p0} = 1,30.10^{-3} \times 141,6 = \underline{0,184 \text{ Pa}}$$

$$\tau_{p1} = 0,65.10^{-3} \times 178 = \underline{0,1156 \text{ Pa}}$$

Allure approximative du profil de vitesse : la pente est plus grande en $y = 2b$ qu'en $y = 0$.



4 - La distribution de température correspond à un transfert purement conductif, non influencé par la thermodépendance du fluide.

La contrainte de viscosité est plus élevée sur la paroi froide que sur la paroi chaude, bien que le gradient de vitesse soit plus faible. Cela est dû au fait que la viscosité varie plus fortement que dU/dy , et en sens contraire (cf. § 3.7.2).

Il n'y aurait rien de changé avec T_0 et φ_{p1} imposés. La relation $d^2T/dy^2 = 0$ resterait valable, donc T serait toujours linéaire. On aurait simplement $T(y) = T_0 + \frac{\varphi_p y}{\lambda}$ d'où $T_1 = T_0 + \frac{2b \varphi_p}{\lambda}$.

PROBLÈME 3.3

Cet exercice est complémentaire du problème 3.2.

Énoncé

Les données sont les mêmes que dans le problème 3.2, sauf : $\mu(T) = cte = \mu$.

1 - Calculer la température de mélange de l'écoulement. Le résultat est-il explicable de façon simple ?

2 - Avec les données du problème 3.2 (question 3), et avec une viscosité évaluée à T_m ($\mu(T_m) = \mu_m$), calculer la vitesse débitante V_d . Déterminer également la contrainte pariétale et le coefficient de frottement. On en profitera pour vérifier que l'écoulement est bien laminaire.

3 - On revient maintenant au cas où $\mu(T) = A(T - T_0) + B$. Calculer la vitesse débitante.

4 - Calculer les coefficients de frottement C_{f0} et C_{f1} sur les deux parois, ainsi que le coefficient moyen C_f sur l'ensemble des parois.

5 - On cherche pour C_f une loi de la forme : $C_f = C_{fm} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^\alpha$ où C_{fm} est le coefficient de frottement calculé avec $\mu = \mu_m$ (question 2), μ_p étant évaluée à la température de paroi. Déterminer α pour la paroi chaude et pour la paroi froide. Commenter l'ensemble des résultats.

Solution

1 - D'après FEMM (6.13a), dans le système de coordonnées choisi, le profil de vitesse a pour expression :

$$U = \frac{j}{2\mu} (y^2 - 2by)$$

La température est la même que dans le problème 3.2.

Considérons une section de l'écoulement, de largeur unité. La température de mélange est définie par :

$$T_m = \frac{1}{q_v} \int_0^{2b} T U \, dy$$

Calculons d'abord l'intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_v} \int_0^{2b} T U \, dy &= \int_0^{2b} \left\{ T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2b} y \right\} \frac{j}{2\mu} (y^2 - 2by) \, dy \\ &= \frac{j}{2\mu} \left[T_0 \frac{y^3}{3} - 2bT_0 \frac{y^2}{2} + \frac{T_1 - T_0}{2b} \frac{y^4}{4} - (T_1 - T_0) \frac{y^3}{3} \right]_0^{2b} \\ T_m &= -\frac{1}{q_v} \frac{j}{2\mu} \times \frac{2}{3} b^3 (T_0 + T_1) \end{aligned}$$

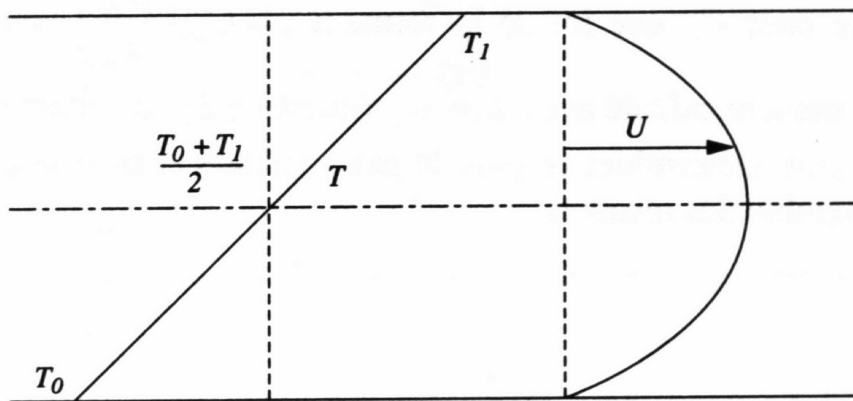
Le débit q_v est obtenu à partir de FEMM (6.14a) (avec $l = 1$) :

$$q_v = -\frac{2}{3} \frac{b^3}{\mu} j$$

La température de mélange a donc pour valeur :

$$\boxed{T_m = \frac{T_0 + T_1}{2}}$$

Sachant que la vitesse U est symétrique par rapport au milieu du tube, et que l'écart de température $T - T_m$ est antisymétrique, on voit que par rapport à la référence T_m les débits d'énergie dans les deux moitiés de l'écoulement sont égaux et de signe contraire. La température de l'écoulement homogénéisé est donc logiquement $T_m = (T_0 + T_1)/2$.



2 - Par définition : $V_d = q_v / S$, avec ici $S = 2b \times 1$ et $\mu = \mu_m$, ce qui donne en prenant toutes les grandeurs en valeur absolue :

$$V_d = \frac{2}{3} \frac{b^3}{\mu_m} j \frac{1}{2b} = \frac{1}{3} \frac{b^2}{\mu_m} j$$

On calcule μ_m à $T_m = (T_0 + T_1)/2 = 25^\circ C$:

$$\mu_m = 0,975 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

$$V_d = \frac{1}{3} \frac{(2,5 \cdot 10^{-3})^2}{0,975 \cdot 10^{-3}} \times 60 \quad (\text{avec } b = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})$$

$$\underline{V_d = 0,128 \text{ m/s}}$$

D'après l'expression de la vitesse U , on obtient pour le frottement à la paroi (identique en $y=0$ et $y=2b$) :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} = \mu \frac{jb}{\mu} = jb$$

$$\tau_p = 60 \times 2,5 \cdot 10^{-3}$$

$$\underline{\tau_p = 0,15 \text{ Pa}}$$

et pour le coefficient de frottement

$$C_f = \frac{2\tau_p}{\rho V_d^2} = \frac{2 \times 0,15}{10^3 \times (0,128)^2}$$

$$\underline{C_f = 18,31 \cdot 10^{-3}}$$

Vérifions le nombre de Reynolds. Entre deux plans parallèles, le diamètre hydraulique est $D_h = 2 \times 2b$, d'où :

$$\Re = \frac{\rho V_d D_h}{\mu_m} = \frac{\rho V \times 2 \times 2b}{\mu_m} = \frac{10^3 \times 0,128 \times 2 \times 5 \cdot 10^{-3}}{0,975 \cdot 10^{-3}}$$

$$\Re \approx 1300$$

L'écoulement est bien laminaire.

3 - Calculons d'abord le débit-volume dans une section $2b \times l$:

$$q_v = \int_0^{2b} U \, dy$$

La vitesse U a été déterminée dans le problème 3.2. Ecrivons-la provisoirement :

$$U = \frac{j}{\alpha} \left(y + \frac{B}{\alpha} \right) \ln \left| y + \frac{B}{\alpha} \right| + K_1 y + K_2$$

En intégrant directement les deux derniers termes, il vient :

$$q_v = \frac{j}{\alpha} \int_0^{2b} \left(y + \frac{B}{\alpha} \right) \ln \left| y + \frac{B}{\alpha} \right| \, dy + 2b^2 K_1 + 2b K_2$$

La première expression s'intègre par parties :

$$q_v = \frac{j}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \left(y + \frac{B}{\alpha} \right)^2 \ln \left| y + \frac{B}{\alpha} \right| - \frac{1}{4} \left(y + \frac{B}{\alpha} \right)^2 \right]_0^{2b} + 2b^2 K_1 + 2b K_2$$

soit en remplaçant K_1 et K_2 :

$$q_v = \frac{j}{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \left(2b + \frac{B}{\alpha} \right)^2 \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| - \frac{1}{4} \left(2b + \frac{B}{\alpha} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{B^2}{\alpha^2} \ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| + \frac{1}{4} \frac{B^2}{\alpha^2} \right\} \\ + 2b^2 \left\{ \frac{Bj}{2b\alpha^2} \left(\ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| - \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| \right) - \frac{j}{\alpha} \ln \left| 2b + \frac{B}{\alpha} \right| \right\} + 2b \left\{ -\frac{Bj}{\alpha^2} \ln \left| \frac{B}{\alpha} \right| \right\}$$

On regroupe les termes, et on introduit $\mu_0 = B$ et $\mu_1 = 2b\alpha + B$. Le résultat final est :

$$\frac{q_v}{j} = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \left(\frac{\mu_1}{\alpha} \right)^2 - 4b^2 \right\} \ln \left| \frac{\mu_1}{\alpha} \right| + \frac{1}{4\alpha^3} (\mu_0 - \mu_1) (\mu_0 + \mu_1) \\ - \frac{\mu_0}{\alpha^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\alpha} + 2b \right) \ln \left| \frac{\mu_0}{\alpha} \right| + \frac{b\mu_0}{\alpha^2} \ln \frac{\mu_0}{\mu_1}$$

Avec les valeurs numériques, on obtient :

$$\frac{q_v}{j} = -10,93.10^{-6}$$

et donc pour la vitesse :

$$V_d = \frac{q_v}{S} = \frac{10,93.10^{-6} j}{2b \times l} = \frac{10,93.10^{-6} \times 60}{5.10^{-3}}$$

$$\underline{V_d = 0,131 \text{ m/s}}$$

4 - Les contraintes aux parois ont été calculées dans l'exercice précédent : $\tau_{p0} = 0,184 \text{ Pa}$ et $\tau_{p1} = 0,1156 \text{ Pa}$.

On en déduit les coefficients de frottement :

- sur la paroi froide :

$$C_{f0} = \frac{2\tau_{p0}}{\rho V_d^2} = \frac{2 \times 0,184}{10^3 \times (0,131)^2}$$

$$\underline{C_{f0} = 21,44.10^{-3}}$$

- sur la paroi chaude :

$$C_{f1} = \frac{2\tau_{p1}}{\rho V_d^2} = \frac{2 \times 0,1156}{10^3 \times (0,131)^2}$$

$$\underline{C_{f1} = 13,47.10^{-3}}$$

- valeur moyenne sur les deux parois :

$$C_f = \frac{C_{f0} + C_{f1}}{2} = \frac{21,44 + 13,47}{2} \times 10^{-3}$$

$$\underline{C_f = 17,45.10^{-3}}$$

5 - On a trouvé avec $\mu = cte = \mu_m$ (question 2) : $C_{fm} = 18,31 \cdot 10^{-3}$

- sur la paroi froide :

$$C_{f0} = C_{fm} \left(\frac{\mu_m}{\mu_0} \right)^\alpha \quad \text{ou} \quad 21,44 = 18,31 \left(\frac{0,975}{1,3} \right)^\alpha$$

$$\underline{\alpha = -0,547}$$

- sur la paroi chaude :

$$C_{f1} = C_{fm} \left(\frac{\mu_m}{\mu_1} \right)^\alpha \quad \text{ou} \quad 13,47 = 18,31 \left(\frac{0,975}{0,65} \right)^\alpha$$

$$\underline{\alpha = -0,76}$$

Interprétation des résultats :

a) Dans le cas présent, la thermodépendance du fluide a très peu d'influence sur le coefficient de frottement global ($17,45 \cdot 10^{-3}$ contre $18,31 \cdot 10^{-3}$ avec μ_m , soit une baisse de $\approx 4\%$), l'augmentation du frottement sur la paroi froide étant presque exactement compensée par sa diminution sur la paroi chaude ($\approx \pm 16\%$). A vitesse fixée, la perte de charge est proportionnelle à C_f , donc également peu dépendante de $\mu(T)$.

b) Les valeurs de l'exposant α calculées dans la question 5 sont en accord avec les données de la littérature : 1) $\alpha < 0$ et $|\alpha|$ plus élevé lorsque le liquide est chauffé ; 2) $\alpha \approx -0,52$ si le fluide est refroidi (Arnaud et Fortier).

Commentaires

Les deux exercices 3.2 et 3.3 développent l'un des rares exemples où l'on peut obtenir une solution entièrement analytique pour un écoulement de fluide thermodépendant. Le calcul conduit également à une solution analytique pour la température de mélange, dont la valeur numérique est très proche de $(T_0 + T_1)/2$.

PROBLÈME 3.4 : Régimes thermiques non établis

Énoncé

On considère un tube de diamètre D et de longueur L , dont la paroi est chauffée à une température uniforme T_p . Dans la section d'entrée, le fluide est à une température uniforme T_e . Le champ de vitesse est supposé établi.

L'objet de l'exercice est d'évaluer numériquement certains paramètres dans les cas suivants :

Cas N°	Fluide	T_m (°C)	D (mm)	$T_p - T_e$ (°C)
1.a	air	20	15	40
1.b	air	20	45	40
2.a	air	100	15	40
2.b	air	100	45	40
3.a	eau	20	5	30
3.b	eau	20	10	30
4.a	eau	60	5	30
4.b	eau	60	10	30

Les températures T_m indiquées sont des températures moyennes de mélange.

Dans tous les cas, le nombre de Reynolds est fixé, égal à 10^3 .

1 - Calculer pour chaque cas la vitesse débitante de l'écoulement et la longueur de canalisation correspondant à $L^+ = 0,1$.

2 - Pour les cas 1.a, 3.a et 4.a, on se propose de comparer quatre longueurs de canalisations, à savoir $L^+ = 0,02$; $0,04$; $0,1$ et $0,2$. Calculer dans chaque situation la densité de flux moyenne φ_p et le flux total échangé Φ .

3 - Uniquement pour les cas 1.a et 4.a, en se fixant $L^+ = 0,1$ calculer la température de sortie T_s et l'écart $T_s - T_e$. Calculer le flux moyen φ_p en linéarisant la température de mélange et en adoptant l'hypothèse d'un tube long. Comparer avec les résultats de la question 2.

4 - On impose maintenant à la paroi un flux uniforme $\varphi_p = 11720 \text{ W/m}^2$. A l'entrée, la température T_e du fluide est égale à la température T_{pe} de la paroi. Dans le cas 4.a, quelle longueur de tube est nécessaire pour obtenir une température de sortie telle que $T_s - T_e = 18,1^\circ \text{C}$? Analyser et interpréter le résultat.

Solution

1 - La vitesse débitante V_d sera obtenue à partir du nombre de Reynolds $\Re = 10^3$.

$$V_d = \frac{\Re \nu}{D} = \frac{1000 \nu}{D}$$

La longueur adimensionnée x^+ (ou L^+) est définie par (3.74) :

$$L^+ = \frac{2}{Pe} \frac{L}{D} = \frac{2}{\Re Pr} \frac{L}{D}$$

En fixant $L^+ = 0,1$ on détermine L .

Les caractéristiques thermophysiques à utiliser sont Pr , ν et λ (nécessaire ensuite pour le calcul de φ_p). Les tables donnent :

Cas N°	Pr	ν (m^2/s)	λ ($W/m.K$)
1	0,7	$15,1 \cdot 10^{-6}$	0,0255
2	0,7	$23,06 \cdot 10^{-6}$	0,033
3	7	$1 \cdot 10^{-6}$	0,597
4	3	$0,475 \cdot 10^{-6}$	0,651

On trouve pour V_d et L les valeurs suivantes :

Cas	1.a	1.b	2.a	2.b	3.a	3.b	4.a	4.b
V_d (m/s)	1	0,33	1,53	0,51	0,2	0,1	0,095	0,0475
L (m)	0,525	1,575	0,525	1,575	1,75	3,5	0,75	1,5

2 - Le flux pariétal moyen φ_p est tiré de (3.90b):

$$\varphi_p = \frac{\lambda}{D} (T_p - T_e) \varphi_p^+$$

φ_p^+ étant donné dans le tableau 3.2.

Le flux total échangé à travers la surface latérale est :

$$\Phi = \varphi_p \cdot \pi D L$$

Les longueurs L correspondant aux valeurs données de L^+ se déduisent immédiatement de la question 1. Les résultats sont récapitulés ci-dessous.

Cas 1.a :

$$D = 15 \text{ mm} \quad ; \quad \frac{\lambda}{D} = 1,7 \quad ; \quad T_p - T_e = 40^\circ \text{ C}$$

L^+	L (m)	φ_p^+	φ_p (W/m^2)	Φ (W)
0,02	0,105	6,13	417	2,0
0,04	0,210	4,6	313	3,1
0,1	0,525	3	204	5
0,2	1,050	2,02	137	6,75

Cas 1.b :

$$D = 45 \text{ mm} \quad ; \quad \frac{\lambda}{D} = 0,567 \quad ; \quad T_p - T_e = 40^\circ \text{ C}$$

L^+	$L(m)$	φ_p^+	$\varphi_p (W/m^2)$	$\Phi (W)$
0,02	0,315	6,13	139	6,2
0,04	0,630	4,6	104,5	9,3
0,1	1,575	3	68	15
0,2	3,15	2,02	45,9	20,5

Cas 3.a :

$$D = 5 \text{ mm} \quad ; \quad \frac{\lambda}{D} = 119,4 \quad ; \quad T_p - T_e = 30^\circ \text{ C}$$

L^+	$L(m)$	φ_p^+	$\varphi_p (W/m^2)$	$\Phi (W)$
0,02	0,35	6,13	21960	121
0,04	0,70	4,6	16480	181
0,1	1,75	3	10750	295
0,2	3,5	2,02	7235	398

Cas 4.a :

$$D = 5 \text{ mm} \quad ; \quad \frac{\lambda}{D} = 130,2 \quad ; \quad T_p - T_e = 30^\circ \text{ C}$$

L^+	$L(m)$	φ_p^+	$\varphi_p (W/m^2)$	$\Phi (W)$
0,02	0,15	6,13	23950	53,4
0,04	0,30	4,6	17970	84,6
0,1	0,75	3	11720	138
0,2	1,5	2,02	7890	186

3 - De (3.84a) on tire :

$$T_p - T_{m_x} = \theta_{m_x}^+ (T_p - T_e)$$

La température de sortie T_s correspond à $x = L$

$$T_p - T_s = \theta_{mL}^+ (T_p - T_e) \quad \text{avec } L^+ = 0,1$$

Le tableau 3.2 donne : $\theta_{mL}^+ = 0,396$

Cas 1.a :

$$T_p - T_e = 40^\circ \text{ C} \quad ; \quad T_p - T_s = 0,396 \times 40$$

$$\underline{T_p - T_s = 15,85^\circ \text{ C}} \quad \text{et} \quad \underline{T_s - T_e = 24,15^\circ \text{ C}}$$

A partir de (3.88a) et (3.88c) on exprime φ_p en fonction de Nu et de la température moyenne conventionnelle T_h :

$$\varphi_p = Nu \frac{\lambda}{D} (T_p - T_h)$$

Linéariser T_m revient à poser : $T_h = \frac{T_e + T_s}{2}$

d'où :

$$T_p - T_h = \frac{(T_p - T_e) + (T_p - T_s)}{2}$$

L'hypothèse d'un tube long implique $Nu = 3,66$ (formule 3.55a). On a donc :

$$\varphi_p = 3,66 \times 1,7 \times \frac{40 + 15,85}{2}$$

$$\varphi_p = 173,6 \text{ W/m}^2$$

Le calcul rigoureux (question 2) a donné : $\varphi_p = 204$. Dans le cas présent, le calcul approché sous-estime le flux de 14,7%.

Cas 4.a : $T_p - T_e = 30^\circ \text{ C}$; $T_p - T_s = 0,396 \times 30$

$T_p - T_s = 11,9^\circ \text{ C}$ et $T_s - T_e = 18,1^\circ \text{ C}$

$$\varphi_p = 3,66 \times 130,2 \times \frac{30 + 11,9}{2}$$

$$\varphi_p = 9985 \text{ W/m}^2$$

On a trouvé à la question 2 : $\varphi_p = 11720$. La sous-estimation est presque identique : 14,5%.

4 - La longueur nécessaire est obtenue à partir du bilan intégral d'énergie dans la canalisation (formule 3.104b) :

$$T_s - T_e = \frac{2\varphi_p}{\rho C_p V_d R} L \quad \text{d'où} \quad L = \frac{\rho C_p V_d R}{2\varphi_p} (T_s - T_e)$$

On a ici : $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$; $C_p = 4180 \text{ J/kg.K}$, $V_d = 0,095 \text{ m/s}$ et $R = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, avec $T_s - T_e = 18,1^\circ \text{ C}$.

$$\underline{L = 0,77 \text{ m}}$$

La valeur choisie pour φ_p correspond au flux moyen calculé dans le cas 4.a avec $L^+ = 0,1$. La longueur correspondante était 0,75 m.

Le bilan intégral étant correct, la différence entre les deux valeurs de L doit être attribuée à la méthode théorique (par l'intermédiaire de φ_p^+). Dans ce cas particulier, l'écart est de 2,7%. Il peut venir en particulier de l'approximation (3.70c) qui est à la base du calcul analytique. Le flux théorique calculé est légèrement surévalué.