

Chapitre 1

CONVECTION FORCÉE EXTERNE

Ce remarquable ouvrage est rempli d'aperçus nouveaux autant que philosophiques. Il est instructif parce qu'à chaque pas le lecteur est invité à fouler les plates-bandes de la science pure, et à en extraire une masse de conséquences pratiques et variées, si tant est qu'il soit possible d'extraire une conséquence d'une plate-bande.

CHRISTOPHE

"L'idée fixe du savant Cosinus"

De façon classique, on distingue dans les fluides en mouvement des écoulements libres, des écoulements internes et des écoulements externes. Cette classification structurelle est dictée par la géométrie des domaines fluides. Dans les écoulements libres tels que jets et panaches, les conditions aux limites sont rejetées à l'infini, sauf au voisinage de la source. Au contraire, les écoulements internes sont essentiellement confinés entre des parois. Les écoulements externes occupent une position intermédiaire, avec à la fois des conditions à l'infini et des conditions de paroi.

Dans ce premier chapitre, on étend la méthode différentielle à des écoulements externes anisothermes, d'abord avec des fluides dont les propriétés thermophysiques sont supposées indépendantes de la température, puis avec des fluides réels thermodépendants.

1.1. - LE CONCEPT DE COUCHE LIMITE THERMIQUE

1.1.1. - Approche expérimentale

L'exemple le plus simple d'écoulement externe est celui d'un fluide qui arrive à vitesse uniforme U_∞ parallèlement à une paroi plane. Au voisinage de la surface, il s'établit un gradient de vitesse, dû au phénomène de viscosité : plus on se rapproche de la paroi, plus le fluide est freiné, la vitesse étant nulle à la surface (condition d'adhérence à la paroi). Ceci conduit à une structure de "*couche limite*", où une redistribution dans le champ de vitesse s'accompagne d'une diffusion de quantité de mouvement, soit par un mécanisme visqueux (couche limite laminaire), soit par un mécanisme tourbillonnaire (couche limite turbulente). Par commodité on définit de façon conventionnelle une "*épaisseur de couche limite dynamique δ* " correspondant en gros à la zone dans laquelle la variation de vitesse est la plus marquée (FEMM, Ch 4 et 5).

Si le fluide et la paroi sont à la même température, le phénomène physique est de nature uniquement dynamique. Mais supposons par exemple que l'écoulement incident soit à une température uniforme T_∞ , et que la surface soit maintenue à une température T_p également uniforme mais différente de T_∞ . En explorant le champ de température T perpendiculairement à la plaque, selon l'ordonnée y , on observera une variation progressive de T_p à T_∞ , d'abord rapide puis de plus en plus lente à mesure qu'on pénètre dans l'écoulement. La figure 1.1.a. illustre le cas où T_p est supérieure à T_∞ . La région dans laquelle T varie de façon significative est appelée "*couche limite thermique*".

Il saute aux yeux que la définition précédente a un caractère bien vague. Le problème était d'ailleurs le même avec la couche limite dynamique, et il sera abordé dans le même esprit, à savoir une définition conventionnelle de "*l'épaisseur de couche limite δ_T* ".

Tout d'abord, pour situer la température T relativement aux conditions aux limites T_p et T_∞ , on introduit la grandeur adimensionnée :

$$\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = T^+ \quad (1.1a)$$

qui est positive et inférieure à 1 $\forall T_p$ et T_∞ .

Nous déciderons alors que, à l'abscisse L (selon la coordonnée parallèle à l'écoulement), la couche limite thermique possède une épaisseur $\delta_T(L)$ telle que :

$$\frac{T(\delta_T) - T_p}{T_\infty - T_p} = T^+(\delta_T) = 0,99 \quad (1.1b)$$

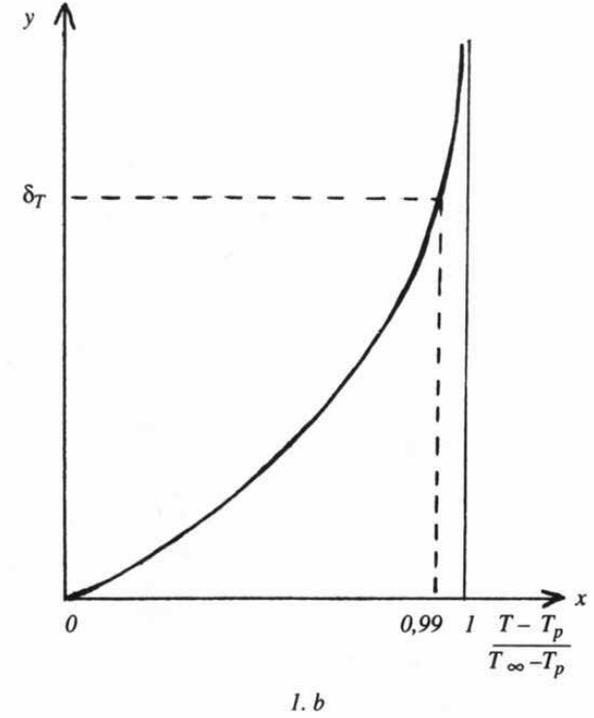
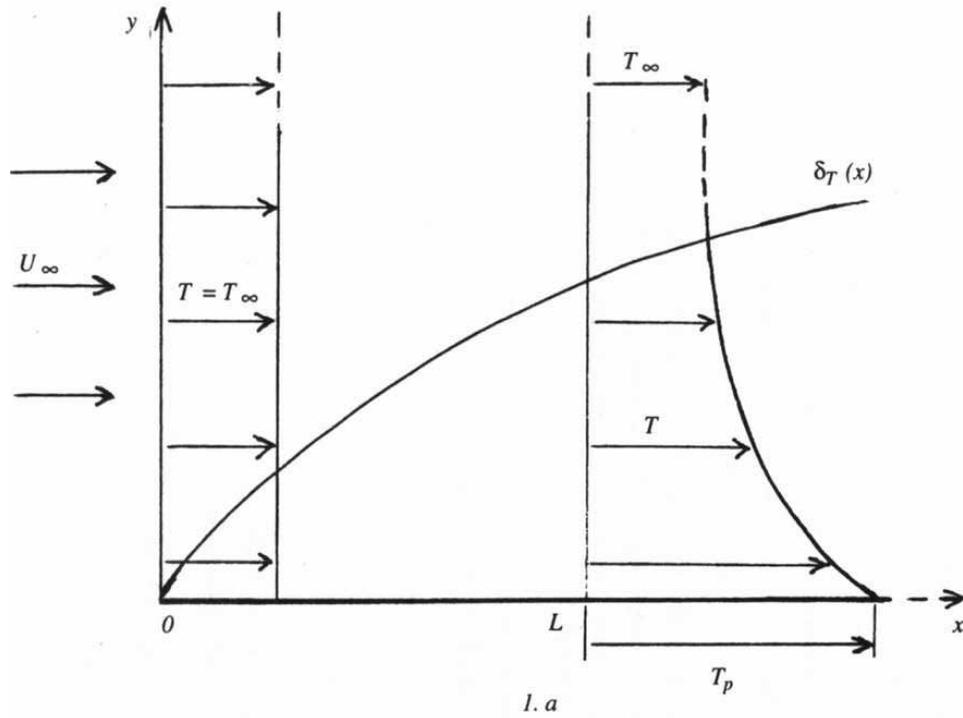


FIG. 1.1 – Couche limite thermique. 1a : répartition transversale de température $T - T_p$ à une distance L de l'origine ($T_p > T_\infty$) et évolution de l'épaisseur de couche limite thermique δ_T . 1b : caractérisation de δ_T ; la notation T signifie " $T(y)$ pour L donnée".

Autrement dit, à l'ordonnée δ_T , l'écart de température par rapport à la surface est égal à 99% de l'écart total $T_\infty - T_p$ (fig. 1.1b). Cette condition normative est tout à fait générale, et ne fait pas référence aux caractéristiques dynamiques de la couche limite, qui peut être laminaire ou turbulente. La définition de δ repose d'ailleurs sur les mêmes bases (FEMM, Ch. 4 et 5).

L'expérience montre que δ_T évolue le long de la paroi, et que la couche limite thermique s'épaissit quand on s'éloigne du bord d'attaque (fig. 1.1a). En cela, son comportement est parallèle à celui de la couche limite dynamique, du moins dans ce cas particulier. A l'origine, le profil de température est uniforme ; puis l'influence de T_p se fait sentir progressivement dans le fluide, ce qui se traduit par l'apparition d'un gradient de température, accompagné d'un flux de chaleur dirigé de la paroi vers le fluide ou du fluide vers la paroi selon le signe de $T_\infty - T_p$. Ainsi, de même que la couche limite dynamique est l'expression d'une diffusion de quantité de mouvement, la couche limite thermique résulte de la diffusion thermique dans le fluide en mouvement.

Les épaisseurs de couche limite δ et δ_T dépendront donc des propriétés thermophysiques du fluide : viscosité cinématique ν pour δ , diffusivité thermique a pour δ_T , et, sauf cas particulier, δ_T sera différente de δ . Enfin, bien évidemment, si fluide et paroi sont à la même température, il n'y a plus de couche limite thermique.

Sur la base de cette interprétation physique, on se doute a priori que dans la couche limite laminaire la condition $a \ll \nu$ se traduira par une couche limite thermique moins épaisse que la couche limite dynamique, et vice-versa. C'est donc en fait le rapport ν/a , c'est-à-dire le nombre de Prandtl Pr , qui va gouverner le rapport δ/δ_T . Les calculs qui vont suivre, ainsi que l'expérience, confirmeront la validité de ce raisonnement. Dans la couche limite turbulente, les choses seront un peu plus compliquées car il faudra faire intervenir, en plus de ν et de a , des diffusivités turbulentes ν_t et a_t caractéristiques de la structure dynamique de l'écoulement.

1.1.2. - Équations de la couche limite thermique laminaire

Il s'agit maintenant de dépasser l'aspect qualitatif et d'envisager le calcul du champ de température au voisinage de la paroi, qui permettra en particulier d'atteindre le flux de chaleur ϕ_p à la surface.

Pour ce faire, nous allons adopter des conditions un peu plus générales que dans l'exemple qui nous a servi d'introduction. Les spécifications seront les mêmes pour l'écoulement incident, à savoir :

- écoulement permanent, parallèle à la paroi
- unidimensionnel (vitesse U_∞)

- isotherme (température T_∞)

mais nous n'imposerons aucune contrainte particulière à la température de surface :

$$T_p = T_p(x) \text{ quelconque}$$

et nous ajouterons une hypothèse concernant le fluide, en admettant qu'il est isochore, et que ses caractéristiques thermophysiques sont indépendantes de la température, soit :

$$\rho = Cte ; \mu = Cte ; \lambda = Cte$$

$$\text{d'où : } \nu = \mu / \rho = Cte \text{ et } a = \lambda / \rho C_p = Cte \quad (1.2a)$$

Compte tenu des conditions (1.2a), le bilan d'enthalpie dans le fluide s'exprime par la relation suivante (d'après FEMM 1.57, et en négligeant la dissipation Φ) :

$$\rho C_p \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} T = \lambda \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} T = \lambda \Delta T \quad (1.2b)$$

ou encore sous forme scalaire, dans un écoulement bidimensionnel, et après division par ρC_p :

$$\boxed{U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)} \quad (1.3)$$

Dans la couche limite, cette équation va pouvoir être légèrement simplifiée. En effet, on observe que le gradient thermique reste étroitement localisé à proximité de la surface : si l'abscisse x est mesurée depuis le point de départ du phénomène thermique, on a toujours $\delta_T(x) \ll x$. Quantitativement, cela se traduit par l'existence de gradients de température beaucoup plus importants dans la direction y que dans la direction x .

Ⓜ De cette analyse nous tirerons un principe général en formulant les "*hypothèses de la couche limite thermique*" :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.4)$$

⚠ A vrai dire, la seconde approximation peut être mise en défaut au voisinage immédiat de la paroi si la température pariétale $T_p(x)$ n'est pas une fonction linéaire de x (voir à ce propos Ch. 2, § 2.4.1). Mais la majorité des problèmes se place dans le cadre des approximations (1.4).

Le second membre de (1.3) va donc se trouver débarrassé du terme $\partial^2 T / \partial x^2$. Par contre, dans le premier membre, nous ne pouvons opérer aucune comparaison des deux termes dans la mesure où l'on a aussi $V \ll U$ d'après les hypothèses de la couche limite dynamique. Contentons-nous donc de la simplification précédente, qui donne comme équation d'énergie dans la couche limite :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Par ailleurs, on sait que le champ de vitesse est solution des équations de la couche dynamique (équation de continuité plus équations de quantité de mouvement, FEMM, Chap. 4). L'ensemble du phénomène, dynamique et thermique, est finalement décrit par le système suivant :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1.5a)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (1.5b)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0 \quad (1.5c)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.5d)$$

A ce stade du raisonnement, il y a une question qui surgit de manière inévitable : quelles relations mutuelles entretiennent le champ de température et le champ de vitesse ?

Ici, nous avons considéré que la viscosité du fluide est constante. Au vu des équations, il est clair alors que le champ thermique est sous la dépendance du champ dynamique, mais que l'inverse n'est pas vrai : T dépend de U et V tandis que U et V peuvent être déterminés indépendamment de T . On parle alors "*d'écoulement anisotherme sans couplage thermique*".

Les choses seraient différentes avec un fluide "*thermodépendant*", c'est-à-dire tel que $\nu = \nu(T)$. Le fait que la viscosité dépende de la température a pour résultat d'introduire T dans l'équation dynamique (1.5b) et par conséquent de rendre en retour le champ de vitesse dépendant du champ thermique : l'écoulement est cette fois le siège d'un "*couplage thermique*". L'écriture des équations (1.5b) et (1.5d) devra d'ailleurs être adaptée à cette situation (§ 1.2.5.2).

Un autre mécanisme de couplage thermique se rencontre quand le fluide répond à "*l'hypothèse de Boussinesq*", à savoir :

$$\rho = \rho(T), \text{ indépendante de } p \quad (1.6)$$

la masse volumique étant fonction de la température tout en restant indépendante de la pression. Là encore, la température s'introduit dans l'équation dynamique, mais cette fois à travers le premier terme du second membre.

Enfin, on est en présence d'un couplage "*fort*" quand la viscosité *et* la masse volumique sont simultanément thermodépendantes. On observera par contre qu'une conductivité thermique (ou une diffusivité) fonction de T n'est pas à elle seule une cause de couplage.

1.1.3. - Forme adimensionnée des équations

1.1.3.1. - ADIMENSIONNEMENT ET SIMILITUDE

La notion de similitude de deux écoulements convectifs a été analysée en détail dans FEMM. Rappelons simplement son essence, qui est de mettre en évidence des classes de phénomènes semblables, c'est-à-dire décrits par la même équation ou par le même système d'équations. Ceci peut être réalisé en adimensionnant les équations de bilans et en faisant apparaître des groupements sans dimension qui sont des critères de similitude associés à chaque terme de source (source de masse, de quantité de mouvement, d'énergie...). De la sorte, les solutions adimensionnées sont invariantes dans toute transformation du système physique qui garde constants les critères de similitude.

Plus modestement, un avantage majeur des formulations adimensionnelles est de diminuer le nombre de paramètres à manipuler, en les groupant au sein de "*nombres sans dimension*". Mais nous aurons l'occasion de rappeler plus loin qu'un nombre sans dimension n'est pas forcément un critère de similitude.

Au point de vue opérationnel, on procède ainsi :

♣ - choix de grandeurs de référence, conventionnelles mais significatives du problème physique examiné : longueur L^0 , vitesse V^0 , pression p^0 , écart de température ΔT^0 ...

◆ - définition de variables adimensionnées :

$$x^+ = \frac{x}{L^0}, U^+ = \frac{U}{V^0}, V^+ = \frac{V}{V^0}, T^+ = \frac{T}{\Delta T^0} \text{ etc.} \quad (1.7a)$$

♥ - introduction de ces variables dans les équations de bilans et réarrangement des facteurs pour que le terme de transport lié au mouvement du fluide soit affecté du coefficient 1 (ce qui signifie que la similitude est automatiquement réalisée à l'échelle 1 pour ce transport). Les coefficients sans dimension qui se trouvent alors devant les termes de sources sont les critères de similitude relatifs à chacune d'elles, que nous notons d'une manière générique Γ_i .

1.1.3.2. - SIMILITUDE AVEC RÉFÉRENCE À L'ÉCOULEMENT

Le système de référence ($L^0, V^0 \dots$) est lié au support physique mais réserve une possibilité de choix. Par exemple, puisque l'objet de l'étude est le champ dynamique et thermique dans un plan perpendiculaire à la paroi, on dispose comme longueur caractéristique du phénomène soit de la distance L du plan à l'origine, soit de l'épaisseur locale de couche limite $\delta(L)$. Comme $\delta(L)$ est évidemment connue avec moins de précision que L , on préférera L , du moins

pour le moment. D'autre part, certaines grandeurs mécaniques et thermiques peuvent être exprimées soit par référence aux scalaires soit par référence aux gradients.

Dans le système de référence aux scalaires, les conventions suivantes sont retenues :

$$\begin{aligned} L^0 &= L \text{ distance du point considéré à l'origine (fig. 1.1a)} \\ V^0 &= U_\infty ; p^0 = \rho^0 U_\infty^2 ; \Delta T^0 = |T_\infty - T_p| \end{aligned} \quad (1.7b)$$

et au lieu de $T^+ = T / \Delta T^0$, on préfère souvent :

$$T^+ = \frac{|T - T_p|}{|T_\infty - T_p|} \equiv \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} \quad (1.7c)$$

où $T_p = T_p(L)$

En ce qui concerne les caractéristiques thermophysiques, puisque nous admettons ici que ce sont des constantes, on prend évidemment $\nu^0 = \nu$, $a^0 = a$, $\rho^0 = \rho$. Dans ces conditions : $\nu^+ = \nu / \nu^0 = 1$, et de même $a^+ = 1$ et $\rho^+ = 1$. Nous verrons plus tard (§ 1.2.5) ce que l'on peut faire en cas de thermodépendance.

On constate alors que l'adimensionnement des équations révèle l'existence de deux critères de similitude :

- vis-à-vis de la diffusion de quantité de mouvement (en relation avec les forces de viscosité) :

$$\Gamma_\nu = \frac{1}{\Re_L} ; \Re_L = \text{nombre de Reynolds} = \frac{U_\infty L}{\nu} \quad (1.8)$$

- vis-à-vis de la diffusion thermique :

$$\Gamma_a = \frac{1}{Pe_L} ; Pe_L = \text{nombre de Péclet local} = \frac{U_\infty L}{a} \quad (1.9)$$



En fait, l'usage dans la littérature est de désigner la distance L par x . Cette formulation est ambiguë, puisqu'on identifie ainsi avec le même symbole la *variable* x des équations (1.5) et la *position* du plan considéré, choisie et fixée, ce qui conduit à écrire à la place de \Re_L et de Pe_L :

$$\Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} ; Pe_x = \frac{U_\infty x}{a} \quad (1.10)$$

et à résoudre les équations au voisinage de $x^+ = 1$.

Ainsi, le système (1.5) une fois adimensionné devient :

$$\frac{\partial U^+}{\partial x^+} + \frac{\partial V^+}{\partial y^+} = 0 \quad (1.11a)$$

$$U^+ \frac{\partial U^+}{\partial x^+} + V^+ \frac{\partial U^+}{\partial y^+} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^+} + \frac{1}{\Re_L} \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^{+2}} \quad (1.11b)$$

$$\frac{\partial p^{*+}}{\partial y^+} = 0 \quad (1.11c)$$

$$U^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + V^+ \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \frac{1}{Pe_L} \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^{+2}} \quad (1.11d)$$

On observe que le terme de pression dans l'équation dynamique n'est accompagné d'aucun coefficient : c'est que le choix effectué pour p^0 assure ici la similitude à l'échelle 1.

D'autre part, nous avons réfléchi au paragraphe 1.1.2 sur la notion de "couplage thermique". On peut aller plus loin et parler aussi d'un "couplage physique" entre diffusion de quantité de mouvement et diffusion de chaleur, lié à la nature du fluide. Car, in abstracto, ν et a peuvent avoir n'importe quelle valeur, mais dans les faits il n'en va pas ainsi puisque chaque fluide possède des caractéristiques bien déterminées. De sorte qu'il se manifeste également une dépendance dynamique-thermique caractérisée par le rapport sans dimension :

$$\frac{Pe}{\Re} = \frac{\nu}{a} = Pr, \text{ nombre de Prandtl} \quad (1.12a)$$

où l'indice L a été omis dans \Re et Pr parce que le problème est tout à fait général (FEMM, Ch. 2).

On rappelle implicitement cette propriété en remplaçant assez souvent Pe par le produit $\Re Pr$.

1.1.3.3. - À PROPOS DU NOMBRE DE PRANDTL

Puisque nous en sommes au nombre de Prandtl, regardons-le d'un peu plus près et écrivons-le en décomposant ν et a dans son expression (1.12a). Il reste après simplification par ρ :

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad (1.12b)$$

La valeur numérique et la thermodépendance de Pr se déduisent des propriétés physiques analysées dans le chapitre 0. Signalons quelques éléments essentiels :

- ♣ Concernant l'ordre de grandeur de Pr , les fluides se classent en quatre catégories assez tranchées :
 - les métaux liquides : $Pr \lesssim 0,05$
 - les gaz (y compris la vapeur d'eau) : $0,65 \lesssim Pr \lesssim 1,1$
 - les liquides courants : $2 \lesssim Pr \lesssim 15$
 - les huiles et plus généralement les liquides assez visqueux : $Pr \gtrsim 50$

- ◆ Au point de vue *thermodépendance*, le nombre de Prandtl des gaz affiche une profonde indifférence vis-à-vis de la température. Ce n'est pas le cas des liquides, pour lesquels Pr suit à peu près la même pente que la viscosité dynamique.

1.1.3.4. - SIMILITUDE AVEC RÉFÉRENCE À LA PAROI

Assez fréquemment aussi, et particulièrement quand on considère l'aspect thermique, on s'intéresse de près à ce qui se passe sur la paroi, c'est-à-dire à la contrainte de surface τ_p et au flux de chaleur φ_p , qui ont pour expression :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} ; \varphi_p = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (1.13)$$

Avec ce nouveau point de vue, on complète alors le système de référence du paragraphe précédent en lui ajoutant deux éléments qui sont des flux de référence à l'abscisse x (ou L), exprimés en valeur absolue :

$$q_s^0 = \tau_p \text{ (correspondant au flux de quantité de mouvement } \mu \overline{\text{grad } \vec{V}} \text{)}$$

$$\varphi^0 = \varphi_p \text{ (correspondant au flux de chaleur } \lambda \overline{\text{grad } T} \text{)}$$

Ceci conduit à l'introduction de flux adimensionnés :

$$\left(\mu \overline{\text{grad } \vec{V}} \right)^+ = \frac{\mu \overline{\text{grad } \vec{V}}}{\tau_p} \text{ et } \left(\lambda \overline{\text{grad } T} \right)^+ = \frac{\lambda \overline{\text{grad } T}}{\varphi_p} \quad (1.14)$$

En réécrivant les équations de la couche limite avec les nouveaux paramètres sans dimension, on voit cette fois apparaître deux autres critères de similitude, relatifs au flux de quantité de mouvement et au flux de chaleur :

- le *coefficient de frottement* local :

$$C_{fL} = \frac{\tau_p}{\rho U_\infty^2} \quad (1.15a)$$

(équivalent à $1/\mathfrak{R}$)

- le *nombre de Stanton* local :

$$St_L = \frac{\varphi_p}{\rho C_p U_\infty |T_\infty - T_p|} \quad (1.15b)$$

(équivalent à $1/Pe$). (Le détail du calcul et l'équation d'énergie correspondante sont présentés en Annexe 1.A.1).

Si l'on préfère utiliser le *coefficient d'échange local* h_L tel que, en valeur absolue :

$$\varphi_p = h_L |T_\infty - T_p| \quad (1.16a)$$

alors le nombre de Stanton s'écrit encore :

$$St_L = \frac{h_L}{\rho C_p U_\infty} \quad (1.16b)$$



Le coefficient de frottement et le nombre de Stanton sont très utilisés en pratique pour exprimer analytiquement les lois de la convection thermique car ils contiennent les grandeurs τ_p et φ_p qui intéressent prioritairement le praticien. Par contre, on ne se sert à peu près jamais des équations adimensionnées dans lesquelles ils figurent (Annexe 1.A.1), pour la bonne raison que τ_p et φ_p font généralement partie des termes à calculer, et que par conséquent C_f et St jouent à la fois le rôle de paramètres caractéristiques et d'inconnues, ce qui est malcommode.

Nous devons signaler aussi que l'on remplace encore souvent St par le "nombre de Nusselt" :

$$Nu_L = \frac{h L}{\lambda} = \frac{\varphi_p L}{\lambda |T_\infty - T_p|} = St_L Pe_L \quad (1.17)$$

Il s'agit d'un nombre sans dimension qui en vaut bien un autre pour formaliser des lois physiques, et qui a l'avantage de conserver la même définition en convection forcée et en convection libre, alors que St n'est pas directement transposable. Mais il ne se présente pas comme un critère de similitude, et pour cette raison nous lui préférons St dans la suite.



Rappelons enfin que la distance L , utilisée comme longueur de référence, est souvent remplacée par x , d'où les écritures C_{f_x} , \mathfrak{R}_x , h_x ... etc. que nous adopterons d'ailleurs dans certains paragraphes (cf. 1.2.2 ...).

1.1.3.5. - REMARQUES D'ENSEMBLE SUR LA SIMILITUDE

L'adimensionnement des équations présente, rappelons-le, un double intérêt :

- il permet d'exprimer les lois physiques en groupant des termes sous forme de nombres sans dimension, ce qui rend la présentation des dites lois plus compacte.
- il fournit des règles de comparaison ou d'équivalence entre des expériences différentes.

Dans au moins neuf cas sur dix, c'est le premier avantage qui est exploité. Mais avec cette optique, et en employant le langage de la distribution, il doit être bien clair que les nombres sans dimension sont des produits de grossistes, et qu'il faut bien à un moment ou à un autre aller s'approvisionner chez le détaillant, c'est-à-dire utiliser des grandeurs dimensionnées. Il n'est donc pas souhaitable de systématiser à l'excès l'usage des nombres sans dimension : à chacun d'apprécier son intérêt cas par cas.



Quoi qu'il en soit, lorsqu'on les met en œuvre, on devrait employer conjointement soit \Re et Pe , soit C_f et St . Cependant le système même d'adimensionnement qui donne naissance à C_f et St n'est pas totalement exempt de critiques, puisqu'il est un peu bâtard, mêlant vitesses et contraintes, températures et flux. Du strict point de vue de la similitude, il serait préférable d'asseoir plutôt les raisonnements et les comparaisons sur \Re et Pe . A contrario, on est également tenu de prendre en compte les besoins concrets des utilisateurs, qui portent très souvent sur des flux. Et c'est ainsi que l'usage a pérennisé, pour la présentation de beaucoup de résultats, l'emploi d'un couple mal assorti : St et \Re .

1.2. - RÉOLUTION PAR LA MÉTHODE DES SOLUTIONS AFFINES

1.2.1. - Adaptation de la méthode de Blasius pour une paroi à température uniforme

Bien souvent, le problème le plus difficile n'est pas d'établir les équations, mais de les résoudre avec des conditions aux limites appropriées. Commençons donc par un cas simple qui va permettre d'utiliser une technique mise au point pour les écoulements de fluides isothermes : la méthode des solutions affines de Blasius.

Cette méthode s'applique au cas d'un écoulement le long d'une plaque plane dont la température de surface est maintenue uniforme. Contrairement aux apparences, il ne s'agit pas là d'un problème uniquement académique, car il se rencontre avec quelques nuances dans de nombreuses applications en génie industriel. En particulier, la géométrie plane est une approximation raisonnable pour des surfaces de faible courbure comme les aubes de ventilateurs ou de turbines. D'autre part, s'il est physiquement difficile d'imposer une température uniforme sur une surface, les résultats qui vont être obtenus resteront acceptables pour de faibles gradients thermiques longitudinaux.

On considère donc le problème suivant :

- paroi plane isotherme à température T_p imposée
- écoulement extérieur parallèle à la plaque (selon la direction x), de vitesse uniforme U_∞ . La composante V_∞ est donc nulle (fig. 1.2)
- écoulement extérieur à température uniforme T_∞ .

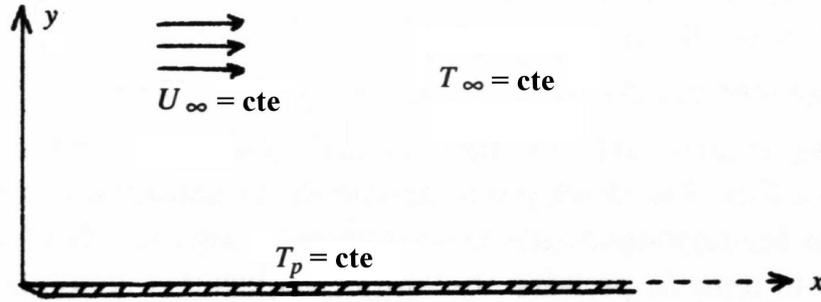


FIG. 1.2 - *Ecoulement sur une plaque plane : données du problème.*

La méthode a été exposée dans FEMM (§ 4.4). Elle repose sur l'hypothèse de similitude (ou d'affinité) des profils de vitesse dans la couche limite laminaire, exprimée par la relation :

$$U/U_{\infty} = f(\eta) \text{ avec } \eta = \frac{y}{k \delta(x)} = \frac{y}{\beta(x)} \quad (1.18a)$$

ce qui donnera en fin de calcul :

$$\beta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} = \frac{\delta}{5}, \quad \left(k = \frac{1}{5}\right) \text{ et } \eta = \frac{5y}{\delta} = \Re_x^{1/2} \frac{y}{x} \quad (1.18b)$$

On introduit une fonction de courant ψ telle que $U = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Le

calcul donne :

$$\psi = U_{\infty} \beta(x) F(\eta) \quad (1.19a)$$

$$\text{avec : } F'(\eta) = f(\eta) = \frac{U}{U_{\infty}} \quad (1.19b)$$

$$\text{d'où : } U = U_{\infty} F'(\eta) \quad (1.20a)$$

$$V = U_{\infty} \frac{d\beta}{dx} (\eta F' - F) \quad (1.20b)$$

En reportant les diverses grandeurs dans l'équation de quantité de mouvement (1.5b), et après avoir montré que la condition $U_{\infty} = Cte$ entraîne $\frac{\partial p^*}{\partial x} = 0$ partout, on aboutit à l'équation de Blasius, qui fait seulement intervenir la variable adimensionnelle η :

$$\boxed{2F''' + FF'' = 0} \quad (1.21)$$

où le symbole ' représente la dérivation par rapport à η .

Passons maintenant au problème thermique, et reportons pour cela U et V dans l'équation d'énergie (1.5d) :

$$U_{\infty} F' \frac{\partial T}{\partial x} + U_{\infty} \frac{d\beta}{dx} (\eta F' - F) \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.22)$$

Ⓜ Ajoutons ici une hypothèse de similitude sur les profils de température, de même nature que celle qui a été introduite pour la vitesse, en admettant que $(T - T_p) / (T_\infty - T_p)$ dépend seulement de η , ou ce qui revient au même ici, que $T = T(\eta)$, puisque $T_p = Cte$.

On exprime alors les dérivées de T en fonction de η :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad (1.23a)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{x} \frac{U_\infty}{\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \quad (1.23b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{y}{x^{3/2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad (1.23c)$$

D'autre part, d'après (1.18b) :

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}}$$

En remplaçant dans (1.22) et en changeant les signes, il vient après simplification partielle :

$$\frac{1}{2} \eta F' \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{1}{2} (\eta F' - F) \frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{a}{\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \quad (1.23d)$$

où l'on voit apparaître le nombre de Prandtl $Pr = \nu/a$ (définition 1.12), caractéristique du couplage dynamique-thermique.

Ⓜ A condition d'admettre que a et η sont indépendants de T dans la couche limite (ce qui a d'ailleurs été fait implicitement depuis le début des calculs), soit $Pr = Cte$, l'équation d'énergie se présente donc comme une simple équation différentielle en η , ce qui va faciliter la suite des opérations. Cette hypothèse est évidemment une approximation, valable pour des fluides peu thermodépendants (l'air par exemple) ou sinon pour des écarts de température modérés. En dehors de ces situations, elle devra être remise en question.

Finalement, les deux premiers termes se simplifient encore et (1.23d) devient (avec $T' = \partial T / \partial \eta$) :

$$\frac{1}{2} F T' = -\frac{1}{Pr} T''$$

soit :

$$\boxed{2 T'' + Pr F T' = 0} \quad (1.24)$$

où F est solution de l'équation de Blasius (1.21).

De (1.21) on tire alors :

$$F = -2 F''' / F''$$

qui se reporte dans (1.24) :

$$\frac{T''}{T'} = Pr \frac{F'''}{F''} \quad (1.25a)$$

Compte tenu de l'hypothèse $Pr = Cte$, une première intégration donne :

$$T' = K (F'')^{Pr} \quad (K = Cte) \quad (1.25b)$$

et l'on rappelle au passage que T et F sont des fonctions de η .

Une seconde intégration fournit $T(\eta)$:

$$T(\eta) - T(0) = T - T_p = K \int_0^\eta (F'')^{Pr} d\eta \quad (1.25c)$$

Comme condition à la limite, nous avons encore :

$$T \rightarrow T_\infty \text{ pour } \eta \rightarrow \infty$$

d'où :

$$K = \frac{T_\infty - T_p}{\int_0^\infty (F'')^{Pr} d\eta} \quad (1.25d)$$

et il vient finalement :

$$\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = \frac{\int_0^\eta [F''(\eta)]^{Pr} d\eta}{\int_0^\infty [F''(\eta)]^{Pr} d\eta} = T^+(\eta) \quad (1.26)$$

Observons tout d'abord que, avec les conditions aux limites choisies ici ($T_\infty = Cte$, $T_p = Cte$), il existe bien des solutions satisfaisant à la condition de similitude postulée au départ, T^+ ne dépendant que de η . Les choses ne seront plus aussi simples quand on voudra s'affranchir de la contrainte $T_p = Cte$.

Concernant l'expression (1.26) de T^+ , elle peut être calculée numériquement en fonction de η , puisque $F(\eta)$ et ses dérivées ont été tabulées (FEMM, § 4.4.2). Une illustration graphique en est donnée par la figure 1.3, qui représente des profils de température $T^+(\eta)$ pour différentes valeurs du nombre de Prandtl. Nous en reparlerons dans le prochain paragraphe.

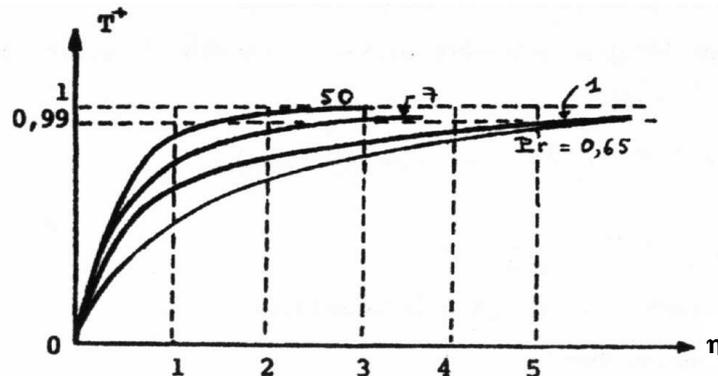


FIG. 1.3 - Profils de température dans la couche limite laminaire, calculés par la méthode de Blasius. $Pr = 50$; $\eta_T = 1,35$ - $Pr = 7$; $\eta_T = 2,6$ - $Pr = 1$; $\eta_T = 5$ - $Pr = 0,65$; $\eta_T = 5,8$.

1.2.2. - Couche limite thermique et coefficient d'échange

En préambule à l'exploration de la couche limite thermique, rappelons-nous d'abord que l'épaisseur de la couche limite dynamique varie dans le même sens que la viscosité.

Ici, qualitativement, la figure 1.3 montre que la forme générale des courbes est en accord avec les données expérimentales (fig. 1.1). Plus précisément, on voit que l'épaisseur de la couche limite thermique diminue lorsque Pr augmente, et que la pente des courbes à l'origine (c'est-à-dire le flux de chaleur pariétal) suit une évolution inverse.

Cela se conçoit si l'on revient aux racines physiques du problème. Par exemple, dans le cas $Pr \gg 1$ (soit $\nu \gg a$: liquides très visqueux ou peu conducteurs, tels que les huiles), l'écoulement se caractérise par une diffusion de la quantité de mouvement beaucoup plus importante que la diffusion de la chaleur : la présence de la paroi se fait donc sentir plus loin pour le champ de vitesse que pour le champ de température (fig. 1.4). Corrélativement, le gradient à la paroi est plus faible pour U que pour T . Ce sera évidemment le contraire pour les fluides tels que $Pr \ll 1$ (métaux liquides). Lorsqu'on a $Pr \approx 1$ (air, vapeur d'eau), les deux mécanismes de diffusion sont d'importance comparable, et les deux couches limites ont des épaisseurs voisines.

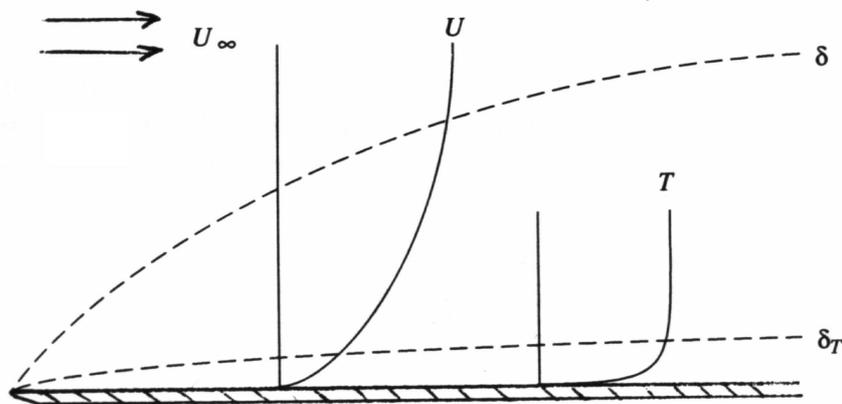


FIG. 1.4 - Couches limites dynamique et thermique dans le cas $Pr \gg 1$.

1.2.2.1. - CALCUL DE δ_T

L'épaisseur de la couche limite thermique δ_T a été définie par la relation (1.1b). Son expression adimensionnée qui est, conformément à (1.18) :

$$\eta_T = \frac{\delta_T}{\beta(x)} = \delta_T \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (1.27a)$$

se calcule numériquement à partir de (1.26) :

$$T^+(\eta_T) = 0,99 = \frac{\int_0^{\eta_T} [F''(\eta)]^{Pr} d\eta}{\int_0^{\infty} [F''(\eta)]^{Pr} d\eta} \quad (1.27d)$$

On voit bien que η_T ne dépend que de Pr , mais il n'y a pas de formulation analytique exacte pour concrétiser cette dépendance. Cependant, comme les lois analytiques sont quand même bien commodes, on peut recourir à une approximation.

Pour $Pr \gtrsim 0,6$

Le calcul numérique montre que $\eta_T(Pr)$ est bien approché par la relation :

$$\eta_T = 4,92 Pr^{-1/3} \quad (1.28a)$$

soit :

$$\delta_T = 4,92 \beta Pr^{-1/3} \quad (1.28b)$$

Sachant que la couche limite dynamique a pour épaisseur [Polidori et al. 1999]

$$\delta = 4,92 \beta$$

on voit que :

$$\frac{\delta}{\delta_T} = Pr^{1/3} \quad (1.29)$$

La condition $Pr > 0,6$ étant très peu restrictive, cette propriété s'applique à une grande majorité de fluides (en exceptant évidemment les fluides complexes). Elle peut être également justifiée par l'analyse dimensionnelle [Guyon, 1991]. On aura en particulier :

- pour l'air : $Pr \approx 0,7$; $\delta_T \approx 1,12 \delta$.
- pour la vapeur d'eau : $Pr \approx 1$; $\delta_T \approx \delta$.
- pour l'eau : $Pr > 2$; $\delta_T < \delta$.

Pour $Pr \ll 1$ (métaux liquides)

L'ajustement analytique de $\eta_T(Pr)$ donne :

$$\eta_T = 5 Pr^{-1/2} \quad (1.30a)$$

et les épaisseurs de couches limites sont alors dans le rapport $Pr^{-1/2}$:

$$\frac{\delta}{\delta_T} = Pr^{1/2} \quad (1.30b)$$

1.2.2.2. - DENSITÉ DE FLUX THERMIQUE ET COEFFICIENT D'ÉCHANGE

Ces grandeurs sont également déduites de la loi (1.26).

♣ La densité de flux locale $\varphi_p(x)$ (que nous noterons plus simplement $\varphi_{p,x}$) a

$$\text{pour valeur : } \varphi_{p,x} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\lambda (T_\infty - T_p) \left(\frac{dT^+}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{\eta=0}$$

soit avec (1.18b) :

$$\varphi_{p,x} = -\lambda (T_\infty - T_p) T'^+(0) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (1.31)$$

Là encore, la fonction $T'^+(0)$ dépend de Pr . Après tabulation, on constate qu'elle est correctement ajustée par deux expressions analytiques, selon la plage de valeurs de Pr .

◆ Pour $Pr \gtrsim 0,6$

on trouve :

$$T'^+(0) = \frac{1}{3} Pr^{1/3} \quad (1.32)$$

d'où :

$$\varphi_{p,x} = -\frac{1}{3} \lambda (T_\infty - T_p) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} Pr^{1/3} \quad (1.33a)$$

Compte tenu du système de coordonnées choisi, on a ici $\varphi_{p,x} > 0$ pour $T_p > T_\infty$.

Le coefficient d'échange local h_x (1.16a) s'écrit donc :

$$\varphi_{p,x} = h_x (T_p - T_\infty) \quad (1.33b)$$

soit en revenant à la définition de Pr :

$$h_x = \frac{1}{3} \left(\frac{U_\infty}{x} \right)^{1/2} \frac{\lambda^{2/3} (\rho C_p)^{1/3}}{\nu^{1/6}} \quad (1.34)$$

ce qui correspond, sous forme adimensionnée, à un nombre de Stanton local (1.16b) :

$$St_x = \frac{h_x}{\rho C_p U_\infty}$$

et après regroupement des termes, en multipliant haut et bas par $\nu^{1/2}$:

$$St_x = \frac{1}{3} \left(\frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{\nu} \right)^{2/3}$$

d'où finalement :

$$St_x = \frac{1}{3} \mathfrak{R}_x^{-1/2} Pr^{-2/3} ; Pr \gtrsim 0,6 \quad (1.35)$$

Une analyse de ces résultats sera présentée dans le paragraphe 1.2.3. Pour le moment, on soulignera simplement à nouveau que h_x , $\varphi_{p,x}$ et St_x n'ont pas une valeur constante sur la paroi.

Les valeurs moyennes de $\varphi_{p,x}$ et de h_x sur une plaque de longueur L seront donc souvent préférées par l'utilisateur.



Par souci de simplifier les notations, et toutes les fois qu'il n'y aura aucun risque d'ambiguïté, nous désignerons par φ_p , h et St les valeurs moyennes de $\varphi_{p,x}$, h_x , St_x sur une paroi de longueur L .

Le coefficient moyen de convection h s'obtient en intégrant (1.34) de 0 à L :

$$h = cte \times \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{x^{1/2}} dx = cte \times \frac{2}{L^{1/2}}$$

et, en exprimant la constante :

$$h = \frac{2}{3} \left(\frac{U_\infty}{L} \right)^{1/2} \frac{\lambda^{2/3} (\rho C_p)^{1/3}}{\nu^{1/6}} \quad (1.36)$$

De même : $St = \frac{1}{L} \int_0^L St_x dx$

$$St = \frac{2}{3} \mathfrak{R}_L^{-1/2} Pr^{-2/3} \quad (1.37)$$

où bien entendu $\mathfrak{R}_L = \{\mathfrak{R}_x\}_{x=L}$

♥ Pour $Pr \ll 1$ (métaux liquides) [Polidori et al. 1999] un ajustement satisfaisant est obtenu avec :

$$T_r^+(0) = 0,515 Pr^{1/2} \quad (1.38)$$

ce qui donne, avec (1.31), une densité de flux locale :

$$\varphi_{p,x} = -0,515 \lambda (T_\infty - T_p) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} Pr^{1/2}$$

et un coefficient d'échange :

$$h_x = 0,515 \left(\frac{U_\infty}{x} \right)^{1/2} (\lambda \rho C_p)^{1/2} \quad (1.39a)$$

lequel sera commenté dans le paragraphe suivant (1.2.3) (voir aussi le Problème 2.1).

Ceci donne pour le nombre de Stanton :

$$St_x = 0,515 (\mathfrak{R}_x Pr)^{-1/2}$$

Dans cette situation, St ne dépend donc que du nombre de Péclet local $Pe_x = \mathfrak{R}_x Pr$:

$$St_x = 0,515 Pe_x^{-1/2} ; Pr \lesssim 0,02 \quad (1.39b)$$

Les valeurs moyennes de h_x et St_x sont obtenues de la même façon que (1.36) et (1.37). On trouve pour une paroi de longueur L :

$h = 1,03 \left(\frac{U_\infty}{L} \right)^{1/2} (\lambda \rho C_p)^{1/2}$	(1.40)
$St = 1,03 Pe_L^{-1/2}$	(1.41)

1.2.3. - Où l'on met en garde contre certains défauts d'interprétation

Il n'est pas sans intérêt de s'arrêter une minute sur les expressions de h et de St qui viennent d'être obtenues.

- ♣ On observera tout d'abord qu'une étude de sensibilité de h vis-à-vis de chacune des caractéristiques contenues dans la formule est irréalisable. L'obstacle n'est pas de nature calculatoire, mais physique : les fluides ne sont pas des fonctions mathématiques dans lesquelles on peut faire varier un paramètre indépendamment des autres. Quand on change de fluide, toutes les caractéristiques thermophysiques fondamentales sont plus ou moins modifiées. Une analyse paramétrique effectuée successivement sur λ , μ ... etc. est donc illusoire.

En conséquence, dans les expressions de h_x ou h , on peut seulement isoler les paramètres géométriques et dynamiques, c'est-à-dire x (ou L) et U_∞ . Les paramètres thermophysiques n'ont de signification que collectivement, dans le cadre d'un regroupement qui caractérise le transfert convectif laminaire.

- ◆ Avec $Pr > 0,6$ (1.34 et 1.36), on voit ainsi que h dépend d'une seule propriété thermophysique globale, constituée du paquet :

$$k_d = \frac{\lambda^{2/3} (\rho C_p)^{1/3}}{\nu^{1/6}} \tag{1.42}$$



Cette association de paramètres, qui ne bénéficie pas d'une reconnaissance légale, pourrait être appelée "*conductance dynamique*" du fluide, car elle décrit son aptitude à transférer de la chaleur à la paroi dans un écoulement de couche limite laminaire. Elle s'exprime en $s^{1/2} W / m^2 K$, c'est-à-dire conductance $\times s^{1/2}$, et on en trouvera des ordres de grandeur dans l'exercice 1.1. Elle présente en outre une propriété intéressante : à partir des valeurs numériques disponibles on constate que, *pour les gaz la conductance dynamique dépend très peu de la température*, et relativement peu pour les liquides.

De même, sous forme adimensionnelle, on ne doit voir dans St que le produit $\Re^{1/2} Pr^{2/3}$, sans essayer de dissocier l'influence respective de \Re et Pr , car une modification du nombre de Prandtl se répercutera en général sur le nombre de Reynolds par l'intermédiaire de la viscosité cinématique ν .

Ceci conduit en particulier à relativiser une propriété communément appelée "analogie de Reynolds", qui associe le transfert de chaleur au frottement pariétal.



En effet, si l'on se réfère au coefficient de frottement C_f (FEMM, 4.47), le nombre de Stanton (1.35) s'exprime aussi sous la forme :

$$St_x = \frac{1}{2} C_{f_x} Pr^{-2/3}$$

mais là encore il serait physiquement injustifié de dissocier les termes de ce produit et de dire que St est proportionnel au coefficient de frottement. Cela ferait fi de la présence simultanée de ν dans C_f et dans Pr .

- ♥ Pour les métaux liquides ($Pr \ll 1$) les formules (1.39) et (1.40) font apparaître comme grandeur significative du transfert une caractéristique bien connue en conduction instationnaire : il s'agit de l'effusivité thermique :



$$b = (\lambda \rho C_p)^{1/2} \quad (1.43)$$

La remarque précédente sur l'analogie de Reynolds s'applique également ici.

- ♠ D'une certaine façon, ce sont là bien sûr des grandeurs "semi-empiriques" puisqu'elles sont le résultat d'une approximation de la fonction $T'^+(0)$. Il n'empêche que l'existence de propriétés thermophysiques spécifiques au transfert dans la couche limite passe inaperçue si l'on pratique l'adimensionnement systématique. En particulier, cette présentation a le mérite de montrer clairement que pour les fluides courants (air, eau...) le transfert est peu influencé par le niveau de température (à condition que l'écart $T_\infty - T_p$ ne soit pas trop élevé, pour ne pas avoir de couplage thermique, cf. § 1.2.5).



1.2.4. - Généralisation : application à un flux imposé uniforme

La condition à la limite $\varphi_p = cte$ se rencontre certainement plus souvent que $T_p = cte$ car elle correspond à des situations expérimentales plus proches des réalisations courantes (rayonnement reçu par la paroi, puissance dégagée par effet Joule...). Or, il se trouve que là aussi le champ de température présente des propriétés de similitude, quoique plus subtiles à mettre en évidence.

- ♣ Une première chose est à considérer : si le flux pariétal est uniformément distribué, on aura forcément une température T_p non uniforme, puisque la condition $T_p = cte$ est incompatible avec $\varphi_p = cte$.

Ensuite, au point de vue température, la seule constante qui nous reste ici est T_∞ . Il sera donc plus commode de considérer une autre forme de la température adimensionnée, que nous retrouverons aux chapitres 2 et 5, à savoir :

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} \quad (1.44)$$

Admettons qu'il existe des solutions affines, c'est-à-dire telles que :

$$\Theta = \Theta(\eta) \quad (1.45)$$

η étant toujours exprimé par (1.18).

Alors, il est clair qu'on aura, puisque $T_p = T_p(x)$:

$$\begin{aligned} T - T_\infty &= T(\eta, x) - T_\infty \\ T_p - T_\infty &= T(\theta, x) - T_\infty \end{aligned}$$

et que la condition (1.45) sera satisfaite seulement si $T - T_\infty$ est de la forme :

$$T - T_\infty = G(\eta) \gamma(x) \quad (1.46a)$$

avec :

$$T_p - T_\infty = G(\theta) \gamma(x) \quad (1.46b)$$

d'où :

$$\Theta = \frac{G(\eta)}{G(\theta)} = \Theta(\eta) \quad (1.47)$$

Notons la compatibilité de cette démarche avec la précédente : si $T_p = cte$, alors $\gamma(x) = cte$ et on retrouve les conditions du § 1.2.1.

- ◆ Reste maintenant à prouver qu'il existe bien des fonctions $G(\eta)$ et $\gamma(x)$ satisfaisant à l'équation d'énergie (1.22). Pour cela, il faut reprendre le calcul des dérivées à partir de la formulation (1.46a) de la température :

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad \frac{\partial T}{\partial x} &= G(\eta) \frac{d\gamma}{dx} + \gamma(x) \frac{dG}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= G \frac{d\gamma}{dx} - \gamma(x) G' \frac{y}{2x^{3/2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \end{aligned} \quad (1.48a)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \quad \frac{\partial T}{\partial y} &= \gamma(x) \frac{dG}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \gamma(x) G' \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \end{aligned} \quad (1.48b)$$

$$\text{c) } \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \gamma(x) G'' \frac{U_\infty}{\nu x} \quad (1.48c)$$

Remplaçons ces expressions dans l'équation (1.22) en nous rappelant que β , $d\beta/dx$, $\eta \dots$ sont déjà connus (cf. 1.18, 1.23). Il vient, après une première simplification :

$$F' G \frac{d\gamma}{dx} - F G' \frac{\gamma(x)}{2x} = \frac{a}{\nu} \frac{1}{x} \gamma G''$$

soit, en multipliant par $2x/\gamma$:

$$2 F' G \frac{x}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx} - F G' = 2 \frac{G''}{Pr} \quad (1.49a)$$

Pour que la fonction G ne dépende que de η , il faut que le coefficient du terme en $F' G$ soit indépendant de x , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{x}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx} &= cte = m \\ \gamma(x) &= k x^m \end{aligned} \quad (1.49b)$$

et l'équation se réduit à :

$$\boxed{2 m F' G - F G' = 2 G'' / Pr} \quad (1.50)$$

où m est une constante a priori quelconque.

♥ Il est remarquable de constater que la condition (1.49b) peut être réalisée de deux manières :

1) soit en imposant une température de paroi selon (1.46b)

$$T_p - T_\infty = G(0) k x^m \quad (1.51a)$$

Cette classe de situations contient comme cas particuliers :

- *distribution linéaire* : $T_p - T_\infty = K x$ pour $m = 1$.

L'équation à résoudre est alors (cf. 1.50) :

$$2 F' G - F G' = 2 G'' / Pr \quad (1.51b)$$

- *distribution uniforme* : $T_p = cte$ pour $m = 0$.

Alors l'équation (1.50) se réduit à la forme simplifiée (1.24).

2) soit en imposant un flux φ_{px} à la paroi, tel que (toujours d'après 1.46a et 1.18) :

$$\begin{aligned} \varphi_{px} &= -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\lambda \left(\frac{dG}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{y=0} \gamma(x) \\ \varphi_{px} &= -\lambda G'(0) \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \gamma(x) \end{aligned} \quad (1.52a)$$

C'est-à-dire ici, avec $\gamma(x) = k x^m$ (1.49b) :

$$\varphi_{px} = -k G'(0) \lambda \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} x^{m-\frac{1}{2}} \quad (1.52b)$$

⚠ A cette distribution de flux correspondent également deux autres cas particuliers intéressants :

- *distribution linéaire* : $\varphi_{p,x} = K x$ pour $m = \frac{3}{2}$.

Les solutions sont obtenues en résolvant l'équation déduite de (1.50) :

$$3 F' G - F G' = 2 G'' / Pr \quad (1.52c)$$

- *distribution uniforme* : $\varphi_p = cte$ pour $m = \frac{1}{2}$.

Avec ici une variante classique de l'équation (1.50) [Fortier] :

$$F' G - F G' = 2 G'' / Pr \quad (1.53)$$

♠ Attardons-nous sur le dernier exemple :

$$m = \frac{1}{2}, \varphi_p = cte$$

La solution $G(\eta)$ s'obtient en résolvant numériquement (1.53), équation dans laquelle la fonction F est elle-même solution de l'équation de Blasius (§ 1.2.1), avec pour conditions aux limites thermiques :

- à la paroi, d'après (1.52b) :

$$\varphi_p = -k G'(0) \lambda \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \quad (1.54a)$$

On voit que la relation entre φ_p et les paramètres thermophysiques fait intervenir deux constantes (k et $G'(0)$). L'une des deux est donc arbitraire. Le plus commode est alors de choisir :

$$G'(0) = -1 \quad (1.54b)$$

le signe – assurant la cohérence des signes entre φ_p et $T_p - T_\infty$ ($\varphi_p > 0$ si $T_p > T_\infty$, cf. formule 1.56), d'où :

$$k = \frac{\varphi_p}{\lambda} \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}} \quad (1.54c)$$

- au loin : $\eta \rightarrow \infty$, $T \rightarrow T_\infty$ et $\partial T / \partial \eta \rightarrow 0$ soit, traduit avec (1.46a) :

$$G(\infty) = 0 ; G'(\infty) = 0 \quad (1.54d)$$

La résolution donne $G(\eta)$, et donc en particulier $G(0)$. On en déduit alors le champ de température, donné par (1.46a), (1.49b) et (1.54c) :

$$T - T_\infty = G(\eta) \gamma(x) = G(\eta) \frac{\varphi_p}{\lambda} \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}} x^{1/2} \quad (1.55a)$$

et en particulier :

$$\boxed{T_p - T_\infty = G(0) \frac{\varphi_p}{\lambda} \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}} x^{1/2}} \quad (1.55b)$$

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} = \frac{G(\eta)}{G(0)} \quad (1.55c)$$

De là on passe sans difficulté au coefficient d'échange local et au nombre de Stanton :

$$h_x = \frac{\varphi_p}{T_p - T_\infty} = \frac{\lambda}{G(0)} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (1.56)$$

$$St_x = \frac{h_x}{\rho C_p U_\infty} = \frac{1}{G(0)} \frac{1}{\sqrt{U_\infty \nu x}} a \equiv \frac{1}{G(0)} \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}} \frac{a}{\nu}$$

soit :

$$St_x = \frac{1}{G(0)} \frac{\mathfrak{R}_x^{-1/2}}{Pr} \quad (1.57a)$$

Répetons que $G(0)$ se calcule numériquement à partir de l'équation (1.53) lorsque Pr est choisi. Mais la facilité d'emploi incite toujours à prendre – lorsque c'est possible – une fonction analytique approchée. Ici en l'occurrence, avec $0,6 \lesssim Pr \lesssim 15$, on retient comme formule d'ajustement [Polidori et al.]

$$\frac{1}{G(0)} \approx 0,460 Pr^{1/3} \quad (1.57b)$$

d'où la valeur approchée du nombre de Stanton :

$$\boxed{St_x = 0,460 \mathfrak{R}_x^{-1/2} Pr^{-2/3} ; 0,6 \lesssim Pr \lesssim 15} \quad (1.58a)$$

et celle du coefficient d'échange :

$$\boxed{h_x = 0,460 \lambda \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} Pr^{1/3}} \quad (1.58b)$$

identiques, au coefficient près, à celles qui ont été obtenues avec $T_p = cte$.

Toutes choses égales par ailleurs, la comparaison avec le transfert de chaleur à température de paroi imposée (formules 1.34 et 1.35) est donc en faveur du flux imposé puisque le coefficient numérique de h_x passe de 0,333 à 0,460 soit environ 40 % de mieux. Elle nous fournit aussi l'occasion de réfléchir sur ce coefficient d'échange h , omniprésent dans un manuel de convection. Nous avons déjà dit que $1/h$ est homogène à une résistance thermique. De là à en déduire hâtivement que $1/h$ est LA résistance thermique de la couche limite, il n'y a qu'un pas... à ne pas franchir : contrairement à la résistance thermique d'une paroi homogène, qui est une propriété spécifique, la grandeur $1/h$ n'est pas une caractéristique intrinsèque de la couche limite puisqu'elle dépend de la nature des conditions aux limites thermiques. Ce n'est qu'une *résistance apparente*, d'un emploi commode, mais non totalement significative au point de vue physique.

Ceci n'est pas en contradiction avec ce qui a été dit au paragraphe 1.2.3. lorsque nous avons introduit la notion de conductance dynamique du fluide : il s'agissait bien alors d'une caractéristique *du fluide*, et non de la couche limite en



tant que telle, et que l'on retrouve ici en développant (1.58b), où elle joue le même rôle.



Enfin, dans le cas présent, l'utilisation d'un coefficient d'échange moyen est à proscrire. En effet, la moyenne d'un produit n'est pas égale au produit des moyennes. En désignant par un surlignage les moyennes sur une plaque de longueur L , cette propriété se traduit ainsi :

$$\overline{\varphi_{px}} = \overline{h_x (T_{px} - T_\infty)} \text{ mais } \overline{\varphi_{px}} \neq \overline{h_x} (\overline{T_{px}} - T_\infty) \quad (1.59)$$

Nous reviendrons sur ce problème avec un peu plus de détails au chapitre 3 (§ 3.6.3).

1.2.5. - Effets de la thermodépendance

1.2.5.1. - PRÉSENTATION

Dans tous les calculs effectués jusqu'ici, nous avons délibérément ignoré la thermodépendance des fluides. Autrement dit, les résultats obtenus concernent des fluides idéaux, qui n'existent guère dans la nature, car un gradient de température a toujours pour conséquence une variation plus ou moins marquée des propriétés thermophysiques. Il est donc indispensable maintenant de prendre en compte cette thermodépendance, au moins de façon approchée et partielle, pour savoir à quoi s'en tenir quant à son influence sur le transfert thermique.

Les grandeurs concernées sont essentiellement la conductivité thermique λ et la viscosité dynamique μ (cf. ch.0). Nous commencerons par examiner ce qu'il se passe lorsque μ varie seule, exemple qui correspond en gros au comportement des liquides. La conclusion sera ensuite étendue aux cas où λ et μ varient simultanément.

Au point de vue physique, la propriété $\mu = \mu(T)$ va se traduire par un couplage entre le champ de vitesse et le champ de température (alors que jusqu'à présent U et V étaient indépendants de T) tandis que la propriété $\lambda = \lambda(T)$ seule n'aurait d'influence que sur la température, en rendant l'équation d'enthalpie non linéaire. Mais malgré cela nous verrons que la méthode différentielle est adaptable à cette classe de situations : il n'y a plus de similitude, mais on peut toujours passer par l'intermédiaire d'une fonction de courant et rester dans le cadre dit "de Blasius", avec les avantages inhérents.

1.2.5.2. - BASES DE DÉPART

♣ Équation dynamique

Dans le bilan de quantité de mouvement, nous devons donc maintenant tenir compte de la condition $\mu = \mu(T)$. Par prudence, nous éviterons de l'introduire directement dans une équation déjà très simplifiée comme celle de la couche limite. Il est toujours plus sûr et plus rigoureux de revenir au point de départ, en l'occurrence l'équation de quantité de mouvement FEMM 1.32 (prise en régime permanent) :

$$\overline{\text{div}} \overline{P} = \rho \overline{F} + \overline{\text{div}} \overline{T} \quad (1.60a)$$

où \overline{P} et \overline{T} sont respectivement le tenseur des quantités de mouvement et le tenseur des contraintes, le champ de force \overline{F} étant le champ de pesanteur :

$$\rho \overline{F} = \rho \overline{g}$$

Si $\rho = cte$ (soit $\overline{\text{div}} \overline{V} = 0$) et $\mu \neq cte$, alors on a, d'après FEMM, Annexe 1.A.2. :

$$\begin{aligned} \overline{\text{div}} \overline{P} &= \rho \overline{V} \cdot \overline{\text{grad}} \overline{V} \\ \overline{\text{div}} \overline{T} &= - \overline{\text{grad}} p + \overline{\text{div}} \left(\mu \overline{\text{grad}} \overline{V} \right) + {}^t \overline{\text{grad}} \overline{V} \cdot \overline{\text{grad}} \mu \end{aligned}$$



où ${}^t \overline{\text{grad}} \overline{V}$ désigne la matrice transposée. A ce propos, signalons un erratum dans FEMM 1.A.2. ♠ où il faut lire, pour le cas général :

$$\begin{aligned} \overline{\text{div}} \overline{T} &= - \overline{\text{grad}} p + \overline{\text{div}} \left(\mu \overline{\text{grad}} \overline{V} \right) + \mu \overline{\text{grad}} \overline{\text{div}} \overline{V} + {}^t \overline{\text{grad}} \overline{V} \cdot \overline{\text{grad}} \mu \\ 2 \overline{\text{div}} \mu \overline{D} &= \overline{\text{div}} \left(\mu \overline{\text{grad}} \overline{V} \right) + \mu \overline{\text{grad}} \overline{\text{div}} \overline{V} + {}^t \overline{\text{grad}} \overline{V} \cdot \overline{\text{grad}} \mu \end{aligned}$$

Introduisons encore la *pression motrice* p^* :

$$\overline{\text{grad}} p^* = \overline{\text{grad}} p - \rho \overline{g} \quad (1.60b)$$

L'équation vectorielle (1.60a) devient ainsi :

$$\rho \overline{V} \cdot \overline{\text{grad}} \overline{V} = - \overline{\text{grad}} p^* + \overline{\text{div}} \left(\mu \overline{\text{grad}} \overline{V} \right) + {}^t \overline{\text{grad}} \overline{V} \cdot \overline{\text{grad}} \mu \quad (1.60c)$$

Intéressons-nous à l'équation scalaire de projection sur la direction x , qui s'écrit en coordonnées cartésiennes bidimensionnelles :

$$\begin{aligned} \rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial y} \end{aligned}$$

Avec les hypothèses de la couche limite, il reste seulement :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (1.61)$$

◆ **Équation thermique**

Le point de départ est l'équation générale (FEMM 1.57) :

$$\rho C_p \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = \text{div} \left(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \right)$$

Dans la couche limite, elle se réduit à :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (1.62)$$

1.2.5.3. - CAS DES LIQUIDES : $\mu = \mu(T)$. PAROI À TEMPÉRATURE UNIFORME

Avec les liquides, la viscosité est beaucoup plus dépendante de la température que la conductivité thermique. On ne prend donc en compte que $\mu(T)$. Seule l'équation de quantité de mouvement est alors concernée.

- ♣ Pour effectuer le calcul, il est nécessaire d'exprimer $\mu(T)$ au moyen d'une fonction analytique approchée. Nous disposons à cet effet de deux options simples : une fonction linéaire (Fortier) ou une fonction puissance (Zukauskas). La seconde est un peu plus souple et nous la retiendrons. On pose donc :

Ⓜ

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \frac{\nu}{\nu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^b = \theta^b \quad (1.63a)$$

en prenant T_∞ comme référence. De ce fait :

$$\mu = \mu_\infty \theta^b \quad \text{ou} \quad \nu = \nu_\infty \theta^b \quad (1.63b)$$

On développe ensuite l'équation (1.61) et on remplace :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu_\infty \theta^b \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\nu_\infty \theta^b)$$

Regardons plus attentivement le dernier terme qui s'écrit :

$$\nu_\infty \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \theta^b}{\partial y} = \nu_\infty \frac{\partial U}{\partial y} b \theta^{b-1} \frac{1}{T_\infty} \frac{\partial T}{\partial y}$$

d'où la forme finale de l'équation :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu_\infty \theta^b \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\nu_\infty}{T_\infty} b \theta^{b-1} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.64)$$

- ◆ On choisit à nouveau le cadre de la méthode différentielle, qui conserve l'avantage de coupler simplement l'équation de continuité et l'équation dynamique.

Rappelons d'abord quelques résultats indispensables au calcul (§ 1.2. et FEMM 4.4.) :

$$U = U_\infty F'(\eta) \quad ; \quad \eta = \nu / \beta(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= -U_\infty F'' \frac{\eta}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \\ V &= U_\infty \frac{d\beta}{dx} (\eta F' - F) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= U_\infty F'' \frac{1}{\beta} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= \frac{U_\infty F'''}{\beta^2} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{T'}{\beta}\end{aligned}$$

En reportant dans (1.64) il vient d'abord, après simplification :

$$U_\infty^2 \frac{d\beta}{dx} \frac{F F''}{\beta} + v_\infty \theta^b \frac{U_\infty F'''}{\beta^2} + v_\infty b \theta^{b-1} U_\infty \frac{F''}{\beta^2} \frac{T'}{T_\infty} = 0$$

puis en observant que $T'/T_\infty = \theta'$, et en multipliant par $\beta^2/U_\infty v_\infty \theta^b$:

$$F''' + \frac{U_\infty \beta}{v_\infty} \theta^{-b} \frac{d\beta}{dx} F F'' + b \theta^{-1} \theta' F'' = 0$$

Nous conserverons l'expression (1.18b) de $\beta(x)$, bien que sa signification soit ici altérée, mais c'est sans importance quant au fond :

$$\beta = \left(\frac{v_\infty x}{U_\infty} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_\infty}{U_\infty x} \right)^{1/2}$$

Le coefficient du terme en $F F''$ est alors égal à $1/2$, d'où l'équation finale :

$$\boxed{2 F''' + \theta^{-b} F F'' + 2 b \theta^{-1} \theta' F'' = 0} \quad (1.65)$$

Quant à l'équation d'énergie, elle est inchangée, et puisque nous avons choisi la condition de paroi $T_p = cte$, c'est (1.24) qui convient :

$$2 T'' + Pr F T' = 0$$

que l'on peut également écrire avec T^+ , puisque $T_\infty - T_p = cte$ (définition 1.26) :

$$\boxed{2 T^{+''} + Pr F T^{+'} = 0} \quad (1.66)$$



Il n'est sans doute pas superflu de rappeler au passage que certains auteurs utilisent des coefficients différents (par exemple Zukauskas place le facteur $1/2$ dans β), ce qui modifie légèrement les équations (1.65) et (1.66). Cela ne change évidemment rien aux résultats, mais introduit quelques risques de confusion.

Quoi qu'il en soit, nous avons cette fois-ci un système couplé puisque θ figure dans (1.65). Il peut être résolu numériquement par une méthode de type Runge-Kutta, et l'on obtient ainsi la solution exacte.

♥ Mais en plus, à partir de cette solution, et pour apprécier de façon simple et claire l'influence du paramètre b qui intervient dans la loi $\mu(T)$, on a cherché une expression analytique approchée du flux à la paroi.

Il se trouve qu'un bon ajustement est obtenu en prenant la viscosité μ à T_∞ et en affectant h_x (formule 1.34) et St_x (formule 1.35) d'un coefficient correctif égal à :

$$\left(\frac{T_\infty}{T_p}\right)^{b/4} \text{ soit } \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_p}\right)^{0,25} \text{ d'après (1.63a)}$$

d'où la loi approchée

$$St_x \approx \frac{1}{3} \mathfrak{R}_{x_\infty}^{-1/2} Pr_\infty^{-2/3} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_p}\right)^{0,25} \quad (1.67)$$

et de même pour h_x .

Une précision s'impose ici. Nous avons observé plus haut (§ 1.2.3.) que la "conductance dynamique" du fluide (ou ce qui revient presque au même le produit $\mathfrak{R}_x^{1/2} Pr^{2/3}$) dépend peu de T pour les fluides classiques. Autrement dit, le fait d'évaluer $\mathfrak{R}_x^{1/2} Pr^{2/3}$ à la température T_∞ plutôt qu'à T_p ne change pas grand-chose. Malgré tout, par souci de rigueur et de méthode, il est préférable de suivre la recommandation $T \text{ de référence} = T_\infty$.



Toujours est-il que la formulation (1.67) a le mérite de faire apparaître les conséquences essentielles d'une viscosité thermodépendante.

1 - Le sens de la correction n'est pas le même selon que la paroi est plus chaude ou plus froide que le fluide. On voit que le transfert est meilleur avec $\mu_p < \mu_\infty$, donc pour un liquide avec $T_p > T_\infty$, le gradient de température ayant ici pour effet d'amincir la couche limite dynamique. Inversement, il est moins bon avec $T_p < T_\infty$ car alors (toujours pour un liquide) on a $\mu_p > \mu_\infty$.

Il y a en outre une dissymétrie entre les deux situations, car la correction est un peu plus faible dans le cas $T_p < T_\infty$, du fait que μ_∞ / μ_p est affecté d'un exposant inférieur à 1.

2 - L'amplitude de la correction peut atteindre 50% (exemple de l'eau pour un écart $[T_p, T_\infty] = [90^\circ C, 10^\circ C]$). Elle est couramment de 15 à 20%, ce qui est loin d'être négligeable. Cependant, vu ce qui a été dit plus haut, l'approximation $\mu = cte$ est moins mauvaise quand la paroi est plus froide que le fluide.

Pour conclure, une illustration de la façon dont les champs de vitesse et de température sont modifiés est donnée schématiquement sur la figure 1.5. On

observe que U/U_∞ aussi bien que T^+ augmentent si la paroi chauffe le fluide et diminuent si elle le refroidit.

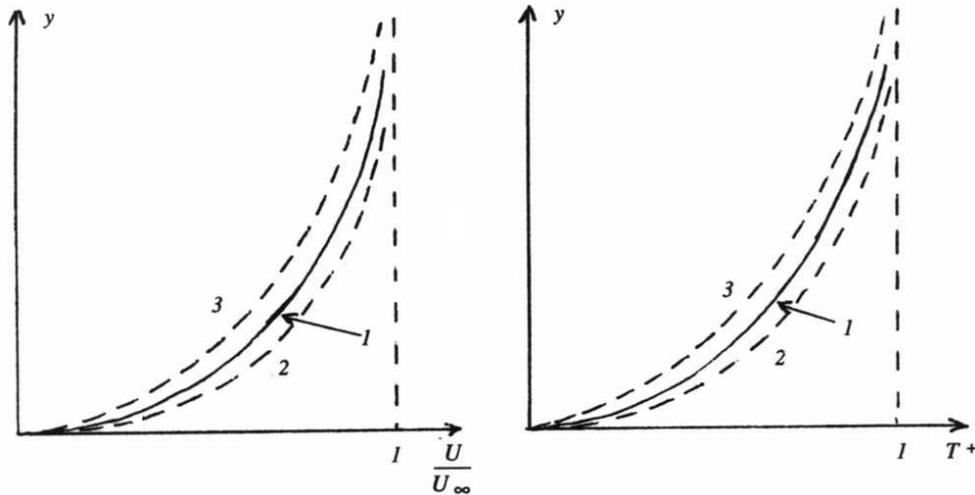


FIG. 1.5 - Influence de la thermodépendance d'un liquide sur la structure de la couche limite – 1 : viscosité constante – 2 : paroi chaude ($T_p > T_\infty$) – 3 : paroi froide ($T_p < T_\infty$)

1.2.5.4. - CAS DES GAZ : $\lambda = \lambda(T)$ et $\rho = \rho(T)$

- ♣ Si en plus des variations de la viscosité en fonction de la température, on prend également en compte les variations de la conductivité thermique, le calcul s'effectue de la même manière que le précédent, en ajoutant à l'hypothèse (1.63) sur μ une hypothèse analogue sur λ :

$$\frac{\lambda}{\lambda_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^q = \theta^q \quad (1.68)$$

Cette fois, θ et q interviennent dans l'équation d'énergie qui devient, tous calculs faits :

$$2T^{+''} + q\theta^{-1}\theta'T^{+'} + Pr\theta^{-q}FT^{+'} = 0 \quad (1.69)$$

Au bout du compte, une bonne approximation est donnée par :

$$St_x = \frac{1}{3} \Re_{x_\infty}^{-1/2} Pr_\infty^{-2/3} \left(\frac{Pr_\infty}{Pr_p} \right)^{0,25} \quad (1.70)$$

La correction en μ_∞/μ_p se trouve donc remplacée par une correction en Pr_∞/Pr_p .

En résumé, avec les fluides dont nous disposons :

* pour la plupart des liquides, on constate que :

$$\frac{Pr_{\infty}}{Pr_p} \approx \frac{\mu_{\infty}}{\mu_p}$$

La correction (1.67) reste donc valable.

* pour les gaz : Pr dépend très peu de la température.



La correction est donc insignifiante, et il est recommandé d'appliquer directement les formules (1.34) à (1.37). Ceci rejoint ce que nous avons dit au sujet de la conductance dynamique k_d (1.57) pour les gaz.

- ◆ Nous n'avons pas encore évoqué l'influence de la masse volumique thermodépendante pour les gaz.

C'est que, en convection forcée, elle est relativement négligeable. Elle ne prend de l'importance qu'en convection mixte (Ch. 6) ou libre (Ch. 5). Avec des écoulements assez lents, ou à fort gradient thermique, on vérifiera donc éventuellement la nature du mécanisme de transfert convectif (§ 6.2.2.2. et Problème 6.1).

1.2.5.5. - CAS D'UN FLUX IMPOSÉ UNIFORME

Si l'on remplace la condition $T_p = cte$ par $\varphi_p = cte$, rien n'est changé quant au fond. L'effet de la thermodépendance s'exprime par les mêmes corrections, détaillées dans les deux paragraphes précédents. Mais bien entendu les formules de départ sont maintenant (1.58, a et b).

1.2.5.6. - INFLUENCE DE LA THERMODÉPENDANCE SUR LE FROTTEMENT PARIÉTAL

Nous avons essentiellement considéré jusqu'à présent les conséquences de la thermodépendance sur le transfert de chaleur. Mais le frottement pariétal peut se trouver lui aussi affecté par le phénomène, ce qui n'est pas sans importance pratique.

Rappelons d'abord les définitions de deux paramètres dynamiques :

- la contrainte tangentielle à la paroi :

$$\tau_p = \mu_p \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{en } N/m^2 \quad (1.71a)$$

- le coefficient de frottement :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\rho_\infty U_\infty^2 / 2} \quad \text{sans dimension} \quad (1.71b)$$

Dans la méthode différentielle, le gradient de vitesse à la paroi s'obtient par la relation (FEMM, 4.37) :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{U_\infty^{3/2}}{(\nu x)^{1/2}} F''(0) \quad (1.71c)$$

Au vu de l'équation (1.65), il est clair que F dépend ici des paramètres θ et b .

A partir des solutions numériques calculées pour $F''(0)$ on a pu obtenir des ajustements analytiques, comme pour le flux de chaleur. Ainsi, en désignant par C_{f_∞} le coefficient de frottement calculé avec $\mu(T_\infty)$, Kays et Crawford donnent :

♣ *Pour les liquides*

- paroi froide ($T_p < T_\infty$) :

$$C_f = C_{f_\infty} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_p} \right)^{-0,09} \quad (1.72a)$$

- paroi chaude ($T_p > T_\infty$) :

$$C_f = C_{f_\infty} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_p} \right)^{-0,20} \quad (1.72b)$$

Il apparaît tout de suite que, par rapport au nombre de Stanton (cf. 1.67) le sens de la correction est inversé puisque l'exposant de μ_∞ / μ_p est ici négatif. En d'autres termes :

- si la paroi est froide ($\mu_p > \mu_\infty$) le frottement augmente.

- si la paroi est chaude ($\mu_p < \mu_\infty$) le frottement diminue.

En outre, la valeur absolue de l'exposant étant inférieure, la correction est plus faible que sur St .



Pourtant, le calcul de la fonction F et de ses dérivées montre que le gradient $(\partial U / \partial y)_{y=0}$ augmente quand la paroi est chaude, comme nous l'avons déjà signalé (fig. 1.5). Mais simultanément μ_p diminue plus fortement, et dans le produit $\mu_p (\partial U / \partial y)_{y=0} = \tau_p$ c'est l'effet de μ_p qui est prédominant, de sorte que le frottement est bien atténué, l'inverse se produisant quand la paroi est froide.

Les lois (1.72) confirment aussi ce qui a été dit plus haut (§ 1.2.3.♦) concernant l'absence de relation organique directe entre le transfert de chaleur et le frottement, puisque les effets de la thermodépendance se révèlent ici totalement différents dans les deux phénomènes.

♦ *Pour les gaz*

La correction sur C_f est à peu près nulle. Le frottement est le même que dans un écoulement isotherme.

Pour plus de détails, on se reportera aux ouvrages de Zukauskas, et de Kays et Crawford, où la thermodépendance est traitée de manière approfondie.

1.2.5.7. - DÉTERMINATION DU RÉGIME D'ÉCOULEMENT. CALCUL DE \Re

Une dernière question doit être soulevée à propos de la thermodépendance, qui est celle de son influence sur le régime d'écoulement, et donc sur le nombre de Reynolds.

En fait, pour vérifier si l'écoulement est laminaire, ou pour évaluer le Reynolds critique \Re_c (FEMM, 5.1.1.), ni T_p ni T_∞ ne sont complètement représentatives.

On peut recommander comme règle empirique le choix de la "température de film" T_F pour la température de référence (ou de la température moyenne de film si T_p est variable) définie par :

$$T_F = \frac{T_p + T_\infty}{2} \quad (1.72c)$$

Cette règle est assez satisfaisante dans la mesure où \Re_c n'est pas caractérisé avec précision. Il est en effet compris entre 10^5 (pour une paroi très rugueuse) et 5.10^5 (pour une paroi très lisse).

1.3. - CONDITIONS AUX LIMITES ET COUPLAGE CONVECTION-CONDUCTION

Il est temps maintenant d'aborder au fond le problème des conditions aux limites, qui a seulement été effleuré quand il s'est agit de prendre en compte la température ou le flux à la paroi. Ceci va nous amener à distinguer parmi elles cinq grandes familles.

1.3.1. - Condition de 1^{ère} espèce (ou de Dirichlet)

Cette condition consiste à imposer la température de surface :

$$T_p \text{ imposée} \quad (1.73a)$$

C'est la plus difficile à réaliser expérimentalement, mais généralement la plus simple à utiliser dans les calculs.

1.3.2. - Condition de 2^{ème} espèce (ou de Neumann)

La condition de Neumann impose le flux à la surface :

$$\varphi_p \text{ imposé} \quad (1.73b)$$

Elle est assez facilement réalisée en utilisant le rayonnement ou l'effet Joule par exemple.

1.3.3. - Condition de 3^{ème} espèce (ou de Fourier)

- ♣ La condition de Fourier consiste à relier le transfert de chaleur dans la paroi et dans le fluide en fixant un coefficient d'échange côté fluide. Elle s'exprime par l'égalité des flux à l'interface :

$$-\lambda_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial y} \right)_{y=0} = h (T_p - T_\infty) \quad (1.73c)$$

où l'indice s caractérise le solide (c'est-à-dire la paroi), le coefficient d'échange h étant donné.



On notera que h est susceptible de contenir à la fois un coefficient de convection et un coefficient de rayonnement lorsque le flux radiatif peut être linéarisé.

Le cas limite $h=0$ nous ramène à la condition de 2^{ème} espèce : $\varphi_p = 0$ (paroi isolée).

A l'inverse, le cas limite $h=\infty$ correspond à une condition de 1^{ère} espèce : le flux étant nécessairement fini, $h=\infty$ entraîne $T_p = T_\infty$.

- ◆ Prenons maintenant en considération l'épaisseur e de la paroi et notons T_0 la température de surface du côté opposé au fluide (Fig. 1.6).

Alors, la relation (1.73c) s'écrit :

$$\lambda_s \frac{T_0 - T_p}{e} = h (T_p - T_\infty)$$

ce que l'on peut traduire en formulation adimensionnée par :

$$\frac{T_0 - T_p}{T_p - T_\infty} = \frac{h e}{\lambda_s} \quad (1.74a)$$

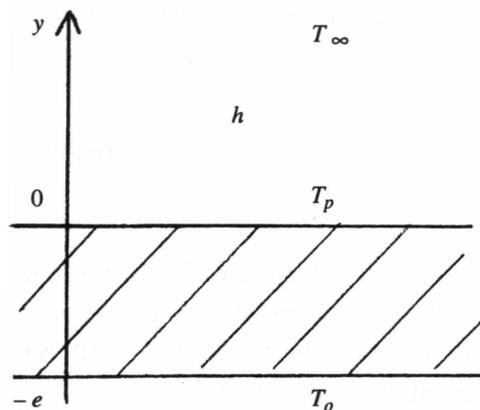


FIG. 1.6 - Illustration de la condition de 3^{ème} espèce.

Le groupement sans dimension qui vient d'apparaître est appelé "nombre de Biot" Bi :

$$Bi = h e / \lambda_s \quad (1.74b)$$

et se présente comme un rapport "résistance interne / résistance apparente de surface", caractéristique du système paroi + condition à la limite.

On convient habituellement de distinguer, vis-à-vis de la convection, des parois "minces" et des parois "épaisses" en fixant une valeur charnière pour Bi :

- parois minces : $Bi \lesssim 0,1$

- parois épaisses : $Bi \gtrsim 0,1$

le chiffre $0,1$ étant évidemment un ordre de grandeur.

- ♥ Les choses sont analogues si la face $y = -e$ de la plaque est également flanquée d'un coefficient d'échange h_0 . Il y a seulement lieu cette fois de considérer deux nombres de Biot, relatifs aux deux faces de la paroi (voir aussi condition de 5^{ème} espèce).

1.3.4. - Couplage convection-conduction (condition de 4^{ème} espèce)

- ♣ La dénomination "condition de 4^{ème} espèce" désigne à la fois une généralisation et une formulation plus physique de la condition de 3^{ème} espèce, qui conduit naturellement à la notion de couplage entre conduction et convection.

Dans la condition de 3^{ème} espèce (1.73c), au lieu de fixer le coefficient d'échange et de considérer T_p et T_0 uniformes, tenons compte des acquis antérieurs et admettons que T_p et h sont gouvernés par la structure de

l'écoulement, ce qui implique en particulier qu'ils soient fonction de x . Il convient alors d'adapter l'écriture de (1.73c) sous la forme :

$$-\lambda_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial y} \right)_{y=0} = -\lambda_f \left(\frac{\partial T_f}{\partial y} \right)_{y=0} = h_x (T_l(x) - T_\infty) \quad (1.75)$$

où l'indice f désigne le fluide, et T_l la température inter-faciale (au lieu de T_p , fig. 1.7).

De la sorte, le champ de température dans l'ensemble du domaine solide-fluide dépend à la fois des caractéristiques de la paroi, de l'écoulement et de la condition à la limite en $y = -e$. On se trouve bien ici dans une situation de *couplage* entre la convection et la conduction.

Adoptons comme hypothèse que la conduction longitudinale dans la paroi est négligeable (ce qui est cohérent avec les hypothèses de la couche limite : gradient suivant $x \ll$ gradient suivant y). Alors le profil de température est toujours linéaire entre $y = -e$ et $y = 0$ (Fig. 1.7), et (1.74a) reste valable en remplaçant h par h_x à l'abscisse x :

$$\frac{T_0 - T_l}{T_l - T_\infty} = \frac{h_x e}{\lambda_s} \quad (1.76a)$$

On arrive ainsi à une définition locale du nombre de Biot (1.74b) :

$$Bi_x = h_x e / \lambda_s \quad (1.76b)$$

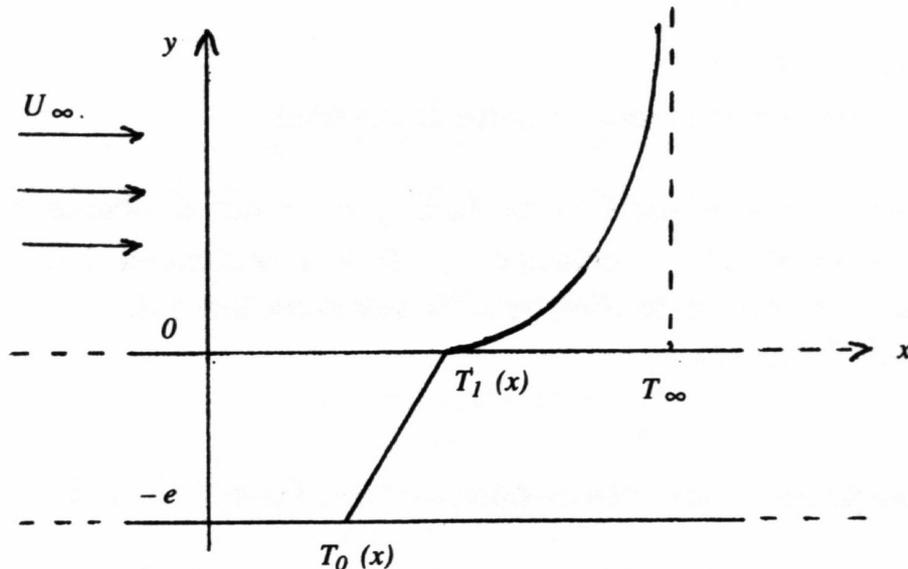


FIG. 1.7 - Exemple de champ de température avec la condition de 4^{ème} espèce.

- ◆ Plusieurs cas sont maintenant à considérer selon la nature de la condition limite en $y = -e$.

* Flux imposé uniforme : $\varphi_0 = cte$

Puisque la conduction longitudinale dans la paroi a été négligée, on retrouve le même flux uniforme à l'interface solide-fluide : $\varphi_1 = \varphi_0 = cte$. Par contre, T_0 et T_1 dépendent de x .

Le coefficient d'échange nous est alors donné par (1.58b) et la condition de 4^{ème} espèce (1.76a) s'écrit :

$$\frac{T_0 - T_1}{T_1 - T_\infty} = 0,460 \lambda \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} Pr^{1/3} \frac{e}{\lambda_s} = 0,460 \frac{\lambda}{x} \mathfrak{R}_x^{1/2} Pr^{1/3} \frac{e}{\lambda_s} \quad (1.77a)$$

ce qui fait apparaître un nouveau nombre sans dimension, introduit par Luikov et appelé "nombre de Brun" Br_x :

$$Br_x = \frac{\lambda}{\lambda_s} \frac{e}{x} \mathfrak{R}_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (1.77b)$$

de sorte que :

$$\frac{T_0 - T_1}{T_1 - T_\infty} = 0,460 Br_x \quad (1.77c)$$

On observera en comparant (1.76) et (1.77) que le nombre de Brun est une variante du nombre de Biot, dans laquelle le coefficient h a été remplacé par son expression issue de la théorie de la couche limite laminaire.

* Température imposée uniforme : $T_0 = cte$

Le problème est un peu plus difficile ici du fait que cette fois, à l'interface solide-fluide, nous n'avons ni $T_1 = cte$ ni $\varphi_1 = cte$. Il a été résolu analytiquement dans le cadre de la méthode différentielle par GOSSE (RGT, 1980). Le résultat fait apparaître à nouveau Br_x , dans le champ de température adimensionné.

Dans les deux cas, le nombre de Brun est donc représentatif du couplage conduction-convection.

* Ecoulement laminaire anisotherme : ceci nous amène à la condition de 5^{ème} espèce.

1.3.5. - Couplage double (condition de 5^{ème} espèce)

Une nouvelle étape de généralisation consiste à considérer que les deux faces de la paroi sont baignées par des fluides en écoulement laminaire, à des températures différentes T_c (fluide chaud) et T_f (fluide froid), ce qui va se traduire par un double couplage entre la conduction dans la plaque et la convection dans les deux fluides.

En continuant à négliger la conduction longitudinale dans le solide, la conservation du flux s'appuie sur deux relations (fig. 1.8) :

$$h_{0x} (T_c - T_0) = \lambda_s \frac{T_0 - T_1}{e} = h_{1x} (T_1 - T_f) \quad (1.78)$$

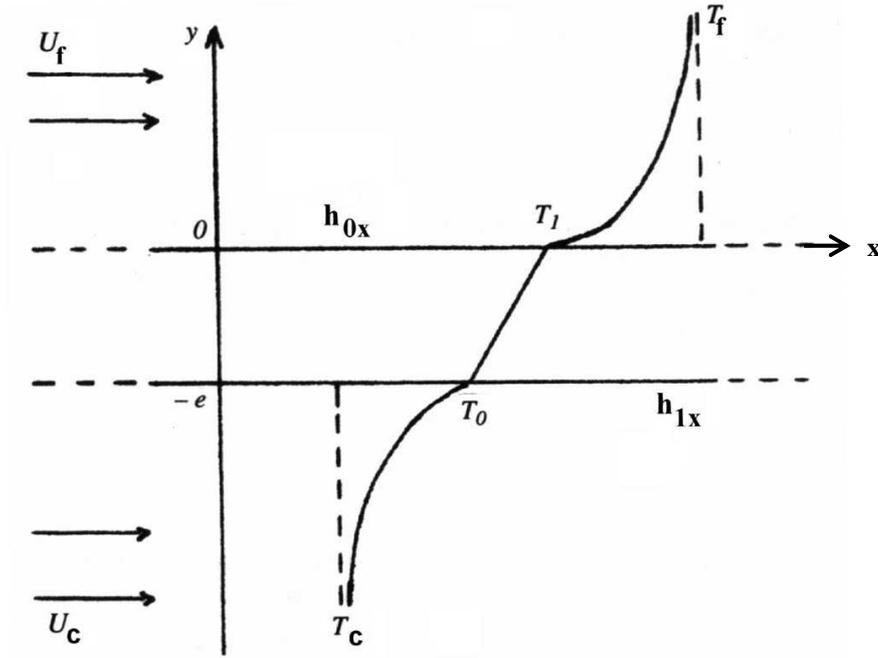


FIG. 1.8 - *Couplage double.*

Si l'on rapporte tous les écarts de température à l'écart extrême $T_c - T_f$, on voit apparaître deux nombres de Biot relatifs aux deux côtés de la paroi :

$$\frac{T_0 - T_1}{T_c - T_f} = Bi_{0x} \frac{T_c - T_0}{T_c - T_f} = Bi_{1x} \frac{T_1 - T_f}{T_c - T_f} \quad (1.79a)$$

$$Bi_{0x} = \frac{h_{0x} e}{\lambda_s} \quad ; \quad Bi_{1x} = \frac{h_{1x} e}{\lambda_s} \quad (1.79b)$$

Les coefficients d'échange locaux sont évidemment inconnus et doivent être calculés numériquement. Cependant on peut admettre en première approximation qu'ils conservent la même forme que dans le cas $\varphi_0 = cte$ (simplification que l'on pratique couramment dans le calcul des échangeurs), d'où l'introduction de deux nombres de Brun analogues à (1.77b).

Indiquons pour terminer deux cas particuliers :

- Admettons h_0 et $h_1 = ctes$ données : on retombe sur la condition de 3^{ème} espèce (§ 1.3.3.♥).

- Admettons $T_0 \approx T_1$ (paroi isotherme) : on est en présence d'un couplage pur convection-convection.

ANNEXES AU CHAPITRE 1

1.A.1. - ÉQUATION D'ÉNERGIE ADIMENSIONNÉE AVEC RÉFÉRENCE AUX GRADIENTS

Notre propos est de compléter le paragraphe 1.1.3.4. en détaillant la démarche qui conduit au nombre de Stanton.

Partons de l'équation (1.57, FEMM) :

$$\rho C_p \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T)$$

et, vu les hypothèses de la couche limite, écrivons-la :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

On pose :

$$x^+ = \frac{x}{L^0} ; y^+ = \frac{y}{L^0} ; U^+ = \frac{U}{V^0} ; V^+ = \frac{V}{V^0} ; T^+ = \frac{T}{\Delta T^0} \quad (\text{ou 1.7c})$$

Dans l'équation, la parenthèse $(\lambda \partial T / \partial y)$ représente le flux de chaleur transversal, que nous allons multiplier et diviser par le flux φ_p à la surface :

$$\varphi_p = \lambda \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

ce qui donne, en remplaçant x , y , U dans les autres termes :

$$V^0 U^+ \frac{\Delta T^0}{L^0} \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + V^0 V^+ \frac{\Delta T^0}{L^0} \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \frac{\varphi_p}{\rho C_p L^0} \frac{\partial}{\partial y^+} \left\{ \frac{\partial T / \partial y}{\left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}} \right\}$$

On a donc adimensionné séparément le flux et les autres termes. Ainsi, en notant que :

$$\frac{\partial T / \partial y}{\left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}} = \frac{\partial T^+ / \partial y^+}{\left| \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right|_{y^+=0}}$$

et après simplification, il vient :

$$U^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + V^+ \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \frac{\varphi_p}{\rho C_p V^0 \Delta T^0} \frac{\partial}{\partial y^+} \left\{ \frac{\partial T^+ / \partial y^+}{\left| \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right|_{y^+=0}} \right\}$$

Le nombre sans dimension associé au flux de chaleur est un critère de similitude relatif à la diffusion thermique (FEMM, Ch. 2) :

$$\Gamma_\varphi = \frac{\varphi_p}{\rho C_p V^0 \Delta T^0}$$

appelé "nombre de Stanton St " (ou parfois "nombre de Margoulis"), d'où l'équation d'énergie adimensionnée :

$$U^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + V^+ \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = St \frac{\partial}{\partial y^+} \left\{ \frac{\partial T^+ / \partial y^+}{\left| \partial T^+ / \partial y^+ \right|_{y^+=0}} \right\}$$

De même, avec l'équation de quantité de mouvement, on obtient :

$$U^+ \frac{\partial U^+}{\partial x^+} + V^+ \frac{\partial U^+}{\partial y^+} = C_f \frac{\partial}{\partial y^+} \left\{ \frac{\partial U^+ / \partial y^+}{\left| \partial U^+ / \partial y^+ \right|_{y^+=0}} \right\}$$

avec $C_f = \tau_p / \rho (V^0)^2 =$ coefficient de frottement.

PROBLÈMES

PROBLÈME 1.1

Énoncé

On considère un écoulement de couche limite laminaire sur une plaque plane à température T_p imposée et uniforme.

1 - Déterminer avec quelles unités s'exprime la conductance dynamique k_d du fluide. Calculer k_d dans les cas suivants :

- air à 300 K , 350 K et 400 K
- vapeur d'eau surchauffée à 380 K et 500 K
- eau à 20°C , 40°C et 60°C

Commenter les résultats.

2 - En utilisant les résultats de la question précédente, calculer le coefficient d'échange moyen sur une plaque de longueur $L = 0,3\text{ m}$ pour l'air à 300 K et la vapeur d'eau surchauffée à 500 K , avec une vitesse d'écoulement $U_\infty = 5\text{ m/s}$ (on vérifiera préalablement que la valeur de L donnée correspond bien à un écoulement entièrement laminaire, et on admettra que T_p n'est pas très différente de T_∞).

3 - Même question pour l'eau à 20°C avec $U_\infty = 0,5\text{ m/s}$ et $L = 0,15\text{ m}$.

Solution

1 - La conductance dynamique a pour expression :

$$k_d = \frac{\lambda^{2/3} (\rho C_p)^{1/3}}{\nu^{1/6}} \quad (\text{définition 1.42})$$

On remplace chaque grandeur par son unité :

$$[k_d] = \frac{(W.m^{-1}.K^{-1})^{2/3} (kg.m^{-3}.J.kg^{-1}.K^{-1})^{1/3}}{(m^2.s^{-1})^{1/6}} = \frac{W^{2/3}.J^{1/3}.s^{1/6}}{m^2.K}$$

et sachant que 1 watt = 1 J.s⁻¹

$$[k_d] = \frac{W^{2/3}.W^{1/3}.s^{-1/3}.s^{1/6}}{m^2.K}$$

$$[k_d] = s^{1/2}.W.m^{-2}.K^{-1}$$

Cas de l'air

A partir des tables de données thermophysiques, on a :

T K	λ W.m ⁻¹ .K ⁻¹	ρ kg.m ⁻³	C_p J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	ν m ² .s ⁻¹	k_d s ^{1/2} .W.m ⁻² .K ⁻¹
300	0,0262	1,177	1006	15,7 x 10 ⁻⁶	5,9
350	0,030	0,998	1009	20,8 x 10 ⁻⁶	5,82
400	0,0337	0,883	1014	25,9 x 10 ⁻⁶	5,87

Cas de la vapeur d'eau surchauffée

T K	λ W.m ⁻¹ .K ⁻¹	ρ kg.m ⁻³	C_p J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	ν m ² .s ⁻¹	k_d s ^{1/2} .W.m ⁻² .K ⁻¹
380	0,0246	0,586	2060	21,6 x 10 ⁻⁶	5,38
500	0,0339	0,441	1985	38,6 x 10 ⁻⁶	5,45

Cas de l'eau

T K	λ W.m ⁻¹ .K ⁻¹	ρ kg.m ⁻³	C_p J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	ν m ² .s ⁻¹	k_d s ^{1/2} .W.m ⁻² .K ⁻¹
20	0,597	1000	4180	1,01 x 10 ⁻⁶	1134
40	0,628	994,6	4178	0,658 x 10 ⁻⁶	1250
60	0,651	985,4	4184	0,477 x 10 ⁻⁶	1355

Conclusions :

- Pour l'air et la vapeur d'eau, la conductance dynamique k_d est pratiquement indépendante de la température (moins de 2% de variation sur les intervalles considérés)

- Pour l'eau, la variation de k_d est sensiblement plus faible que celle de la viscosité (20% au lieu de 53% sur la plage 20–60°C). Elle est pratiquement linéaire en fonction de T .

- La conductance dynamique de l'eau est environ 200 fois plus élevée que celle des gaz, alors que le rapport des conductivités thermiques est de l'ordre de 20, et que celui des nombres de Prandtl est compris entre 3 et 10.

2 -

Pour l'air à 300 K :

Nombre de Reynolds à l'abscisse $x = L$:

$$\Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{5 \times 0,3}{15,7 \times 10^{-6}} \quad \text{soit } \Re_L \approx 9,5 \cdot 10^4$$

L'écoulement est bien laminaire sur toute la plaque ($10^5 \approx \Re_c \approx 5 \cdot 10^5$)

D'après (1.36) et (1.42), pour $Pr > 0,6$, le coefficient d'échange moyen a pour valeur :

$$h = \frac{2}{3} \left(\frac{U_\infty}{L} \right)^{\frac{1}{2}} k_d = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{0,3} \right)^{\frac{1}{2}} \times 5,9$$

$$\underline{h = 16 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}}$$

Pour la vapeur d'eau à 500 K :

$$\Re_L = \frac{5 \times 0,3}{38,6 \times 10^{-6}} = 3,9 \times 10^4 \quad \text{C'est encore bon}$$

$$h = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{0,3} \right)^{\frac{1}{2}} \times 5,45$$

$$\underline{h = 14,8 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}}$$

3 -

Pour l'eau à 20°C :

$$\Re_L = \frac{0,5 \times 0,15}{1,01 \times 10^{-6}} ; \Re_L = 7,4 \times 10^4 \quad \text{C'est toujours bon.}$$

$$h = \frac{2}{3} \left(\frac{0,5}{0,15} \right)^{\frac{1}{2}} \times 1134$$

$$\underline{h \approx 436 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{°C}^{-1}}$$

PROBLÈME 1.2**Énoncé**

De l'air à faible pression circule le long d'une plaque dont la température T_p est imposée. On donne : $T_\infty = 300^\circ C$, $U_\infty = 10 m/s$, $p_\infty = 6.10^3 Pa$. La longueur de la plaque est $L = 0,5 m$.

Calculer, par unité de largeur de la paroi, le flux total de refroidissement nécessaire pour maintenir la plaque à la température $T_p = 27^\circ C$.

Solution

1 - On doit vérifier d'abord que, à l'extrémité de la plaque, l'écoulement est encore laminaire.

$$\mathfrak{R}_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$$

Au paragraphe 1.2.5.7, on recommande de calculer \mathfrak{R} à la température de film T_F :

$$T_\infty = 573 K \text{ et } T_p = 300 K$$

$$T_F = \frac{T_\infty + T_p}{2} = 437 K$$

La masse volumique ρ est donnée par la loi des gaz parfaits. Elle est proportionnelle à la pression.

Soit ρ_a la masse volumique de l'air à $T_F = 437 K$ et à la pression atmosphérique $p_a = 10^5 Pa$.

$$\frac{\rho}{\rho_a} = \frac{p_\infty}{p_a}$$

Les tables donnent : $\rho_a = 0,81 kg/m^3$

$$\rho = 0,81 \times \frac{6.10^3}{10^5}$$

$$\rho = 0,0486 kg/m^3$$

et pour la viscosité dynamique μ (indépendante de p) :

$$\mu = 2,42 \times 10^{-5} kg/m.s$$

$$\mathfrak{R}_L = \frac{\rho U_\infty L}{\mu} = \frac{0,0486 \times 10 \times 0,5}{2,42 \times 10^{-5}}$$

$$\mathfrak{R}_L \approx 10^4$$

L'écoulement est donc laminaire partout.

2 - Pour les gaz, où les effets de la thermodépendance sur le coefficient d'échange sont négligeables, le paragraphe 1.2.5.4. recommande les formules 1.34

à 1.37, soit pour le coefficient h moyen, en introduisant la conductance

$$\text{dynamique } k_d \text{ (1.42): } h = \frac{2}{3} \left(\frac{U_\infty}{L} \right)^{\frac{1}{2}} k_d$$

k_d étant presque indépendante de T (§ 1.2.3. et problème 1.1) on peut la calculer par exemple à T_f , où les tables nous donnent pour λ et C_p (indépendantes de la pression) :

$$\lambda = 36,4 \times 10^{-3} \text{ W/m.K} \quad ; \quad C_p = 1019 \text{ J/kg.K}$$

Nous avons, à la pression p_∞ donnée :

$$v = \frac{\mu_f}{\rho_f} = \frac{2,42 \times 10^{-5}}{0,0486} = 4,98 \times 10^{-4} \text{ m}^2 / \text{s}$$

$$\text{soit : } k_d = \frac{\lambda^{2/3} (\rho C_p)^{1/3}}{v^{1/6}} = \frac{0,11 \times 3,67}{0,28}$$

$$k_d = 1,43 \text{ s}^{1/2} \text{ W/m}^2.\text{K}$$

$$\text{d'où : } h = \frac{2}{3} \left(\frac{10}{0,5} \right)^{1/2} \times 1,43$$

$$h = 4,26 \text{ W/m}^2.\text{K}$$

Le flux total de refroidissement vaut (pour une largeur de plaque égale à 1 m) :

$$\Phi = \varphi_p L \times 1 = h (T_\infty - T_p) L$$

$$\Phi = 4,26 \times 273 \times 0,5$$

$$\Phi = 580 \text{ W}$$

PROBLÈME 1.3

Énoncé

On considère une plaque plane parallèle à un écoulement laminaire uniforme de fluide isochore. La plaque est poreuse et comporte un dispositif *d'aspiration*, réglé de telle sorte que la composante V de la vitesse possède une valeur V_p imposée à la paroi ($V_p < 0$).

1 - Ecrire le système d'équations auquel obéit le mouvement du fluide. Vérifier que ce système possède une solution particulière indépendante de x , compatible avec les conditions aux limites, et calculer $V(y)$ et $U(y)$.

2 - Montrer que l'on peut définir une épaisseur de couche limite dynamique δ ; la calculer et discuter ses propriétés.

Application (écoulement d'eau à $20^\circ C$) : $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$; $\mu = 10^{-3} \text{ kg} / \text{m.s}$; $U_\infty = 5 \text{ m/s}$; $V_p = -6 \text{ cm/s}$. Comparer avec l'épaisseur de couche limite normale (sans aspiration) à l'abscisse x_c correspondant à la transition laminaire-turbulent (prendre $\Re_c = 5.10^5$). Cerner approximativement la condition de validité des formules obtenues à la question 1. Est-elle vérifiée ici ?

3 - Déterminer la contrainte pariétale de cisaillement τ_p . Comparer avec la valeur moyenne $\overline{\tau_{pc}}$ sur la zone laminaire pour un écoulement sans aspiration, dans les mêmes conditions qu'à la question 2. Montrer que $\tau_p / \overline{\tau_{pc}}$ s'exprime en fonction de \Re_L (ici \Re_c). Calculer C_f .

4 - L'écoulement incident est à une température uniforme T_∞ . On maintient la plaque à une température T_p également uniforme. La dissipation visqueuse est négligée. Montrer que l'équation d'énergie possède aussi une solution indépendante de x , et calculer $T(y) - T_p$. Reprendre les questions 2 et 3 avec l'épaisseur de couche limite δ_T et la densité de flux à la paroi ϕ_p , dans le cas où $T_p = 20^\circ C$ et $T_\infty = 25^\circ C$. Interpréter l'expression de ϕ_p . Comparer δ et δ_T . On donne : $C_p = 4180 \text{ J} / \text{kg.K}$.

5 - La fonction de dissipation Φ est maintenant prise en compte. Vérifier qu'il existe un cas particulier pour lequel $(T - T_p) / (T_\infty - T_p) = e^{By}$ (T indépendante de x), et déterminer B . Montrer que la condition d'existence de ce cas particulier s'exprime sous la forme $E_c = f(Pr)$ ($E_c =$ nombre d'Eckert). Pour une température T_∞ de $25^\circ C$, quelle température de paroi T_p faudrait-il imposer pour satisfaire à cette condition avec les données numériques des questions précédentes ? Même question pour $T_\infty = 85^\circ C$. Commentez ces résultats.

Solution

1 - Calcul de U et V

Préalablement à toute simplification, l'écoulement (isochore et bidimensionnel) est régi par les équations de Navier-Stokes et par l'équation de continuité (FEMM, résumé du Ch. 1) :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \tag{2}$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

S'il existe une solution indépendante de x , le système se réduit à :

$$\frac{dV}{dy} = 0 \quad (4)$$

$$V \frac{dU}{dy} = \nu \frac{d^2 U}{dy^2} \quad (5)$$

De la relation (4) on déduit que $d^2 V / dy^2 = 0$, d'où en reportant dans (3) :

$$\frac{dp^*}{dy} = 0 \quad (6)$$

Le système des équations (4, 5, 6) est compatible avec les conditions aux limites puisque la donnée "écoulement incident uniforme" (soit $U_\infty = cte$, $V_\infty = 0$) entraîne d'après (2) que l'on a $\partial p^* / \partial y = 0$.

De (4) on tire : $V = cte$

A la paroi, $V = V_p$, d'où :

$$\boxed{V = cte = V_p}$$

On utilise maintenant l'équation (5) :

$$V_p \frac{dU}{dy} = \nu \frac{d^2 U}{dy^2} \quad (7)$$

Cette relation est de la forme $U' / U'' = cte$ et s'intègre immédiatement :

$$\frac{dU}{dy} = cte e^{\frac{V_p}{\nu} y}$$

$$U = cte \frac{\nu}{V_p} e^{\frac{V_p}{\nu} y} + K$$

Au loin, $U = U_\infty$ quand $y \rightarrow \infty$, et l'exponentielle $\rightarrow 0$ (car V_p est < 0).

Donc $K = U_\infty$.

A la paroi : $U = 0$ pour $y = 0$ (condition d'adhérence) d'où :

$$cte = -U_\infty V_p / \nu \quad (> 0)$$

Le champ de vitesse U est donc de la forme :

$$U = -U_\infty e^{\frac{V_p}{\nu} y} + U_\infty$$

$$\boxed{U = U_\infty \left(1 - e^{\frac{V_p}{\nu} y} \right)} \quad (8)$$

où V_p est négatif.

L'écoulement possède donc bien une solution indépendante de x .

2 - Epaisseur de couche limite

La fonction $U(y)$ est monotone et tend vers une valeur limite U_∞ quand $y \rightarrow \infty$. On peut donc définir une épaisseur de couche limite dynamique en posant :

$$\frac{U(\delta)}{U_\infty} = 0,99, \text{ soit}$$

$$1 - e^{-\frac{V_p}{\nu} \delta} = 0,99$$

On obtient :

$$\boxed{\delta = \frac{\nu}{V_p} \text{Ln} 0,01 = -4,6 \frac{\nu}{V_p}} \quad (9)$$

L'épaisseur de couche limite est constante et indépendante de la vitesse U_∞ de l'écoulement extérieur. Elle n'est fonction que de V_p et de la viscosité cinématique.

Avec les données numériques : $\delta = 4,6 \times 10^{-6} / 0,06$

$$\underline{\delta = 0,76 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,076 \text{ mm}}$$

L'abscisse de transition x_c est définie par :

$$\Re_c = U_\infty x_c / \nu \quad (10)$$

En se fixant $\Re_c = 5 \cdot 10^5$ il vient :

$$x_c = \frac{\Re_c \nu}{U_\infty} = \frac{5 \times 10^5 \times 10^{-6}}{5} = 0,1 \text{ m}$$

L'épaisseur de couche limite à l'abscisse $x = x_c$ est donnée dans FEMM, 4.44 :

$$\delta_c = 5 \sqrt{\frac{\nu x_c}{U_\infty}} = 5 \sqrt{\frac{10^{-6} \times 0,1}{5}}$$

$$\delta_c = 7,07 \cdot 10^{-4} \text{ m} \approx 0,7 \text{ mm}$$

En aspirant la couche limite, on l'a ratatinée ; son épaisseur maximale est pratiquement divisée par 10.

Les formules obtenues à la question 1 reposent sur l'hypothèse que le champ de vitesse est indépendant de x , ce qui conduit en particulier à $d\delta/dx = 0$. Pour se rapprocher physiquement de cette condition, il est nécessaire d'avoir $\delta \ll \delta_c$, c'est-à-dire après remplacement de x_c par son expression tirée de (10) (et en valeur absolue) :

$$4,6 \frac{\nu}{V_p} \ll 5 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty} \frac{\Re_c \nu}{U_\infty}} = 5 \frac{\nu}{U_\infty} \Re_c^{1/2} \quad (11)$$

Avec $\Re_c = 5.10^5$, cela donne :

$$\frac{U_\infty}{V_p} \ll \approx 770$$

Ici, $\frac{U_\infty}{V_p} = \frac{5}{0,06} \approx 83$, ce qui paraît satisfaisant.

3 - Contrainte pariétale

A la paroi, la contrainte τ_p se calcule à partir de $U(y)$ (formule 8) :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} = -\mu \frac{V_p}{\nu} U_\infty$$

$$\boxed{\tau_p = -\rho V_p U_\infty} \quad (12)$$

soit : $\tau_p = 10^3 \times 0,06 \times 5 = 300 \text{ N/m}^2$.

Si $V_p = 0$, la contrainte moyenne $\bar{\tau}_p$ est donnée par FEMM (4.39) :

$$\bar{\tau}_p = 0,664 \left(\frac{\mu \rho}{L} \right)^{1/2} U_\infty^{3/2}$$

avec ici $L = x_c$:

$$\bar{\tau}_{pc} = 0,664 \left(\frac{10^{-3} \times 10^3}{0,1} \right)^{1/2} \times 5^{3/2} \approx 23,5 \text{ N/m}^2$$

L'aspiration de la couche limite augmente considérablement le frottement à la paroi.

Le rapport $\frac{\tau_p}{\bar{\tau}_p}$ s'écrit (en valeur absolue) :

$$\frac{\tau_p}{\bar{\tau}_p} = \frac{\rho V_p U_\infty}{0,664 \mu^{1/2} \rho^{1/2} U_\infty^{3/2}} \frac{L^{1/2}}{\rho^{1/2} U_\infty^{3/2}} = 1,5 \frac{\rho^{1/2} U_\infty^{1/2} L^{1/2} V_p}{\mu^{1/2} U_\infty}$$

c'est-à-dire, avec ici $L = x_c$:

$$\boxed{\frac{\tau_p}{\bar{\tau}_{pc}} = 1,5 \Re_c^{1/2} \frac{V_p}{U_\infty}} \quad \text{soit} \quad \frac{\tau_p}{\bar{\tau}_{pc}} \approx 12,75$$

et d'après (12) :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho U_\infty^2} = \frac{V_p}{U_\infty} = \frac{6.10^{-2}}{5} = 1,2.10^{-2}$$

4 - Champ de température

L'équation d'enthalpie est l'équation (1.3) :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Sachant que $V = cte = V_p$, une solution indépendante de x doit satisfaire à la relation :

$$V_p \frac{dT}{dy} = a \frac{d^2 T}{dy^2}$$

Cette équation est identique à celle de la question 1 (équation 7). Elle a donc pour solution :

$$T - T_p = (T_\infty - T_p) \left(1 - e^{-\frac{V_p}{a} y} \right)$$

L'épaisseur de couche limite thermique δ_T est donnée par :

$$\frac{T(\delta_T) - T_p}{T_\infty - T_p} = 0,99$$

$$1 - e^{-\frac{V_p}{a} \delta_T} = 0,99$$

c'est-à-dire comme dans la première question :

$$\delta_T = \frac{a}{V_p} \text{Ln} 0,01 = -4,6 \frac{a}{V_p}$$

A $20^\circ C$, l'eau possède une diffusivité thermique voisine de $14,3.10^{-8} m^2 / s$. D'où :

$$\delta_T \approx 11.10^{-6} m = 0,01 mm$$

Les épaisseurs de couches limites sont dans le rapport :

$$\frac{\delta}{\delta_T} = \frac{V}{a} = Pr = 7,02$$

alors que dans une couche limite laminaire sans aspiration, $\delta / \delta_T = Pr^{1/3}$ (cf. 1.29).

Le flux à la paroi est donné par :

$$\varphi_p = -\lambda \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = \lambda \frac{V_p}{a} (T_\infty - T_p)$$

et comme $a = \lambda / \rho C_p$

$$\varphi_p = \rho C_p V_p (T_\infty - T_p) \quad (\text{avec } V_p < 0)$$

Dans cette expression, ρV_p est le débit-masse aspiré par unité de surface à la paroi. Le flux φ_p est donc égal à l'enthalpie transportée par le fluide aspiré. Avec les valeurs numériques:

$$\varphi_p = 10^3 \times 4180 \times (-0,06) \times 5 \approx -1,25.10^6 W / m^2$$

($\varphi_p < 0$: flux dirigé du fluide vers la plaque).

Si la paroi est imperméable (formule 1.36) :

$$\varphi_p \text{ imp} = h (T_p - T_\infty)$$

avec
$$h = \frac{2}{3} \left(\frac{U_\infty}{L} \right)^{1/2} \frac{\lambda^{2/3} (\rho C_p)^{1/3}}{\nu^{1/6}} \text{ et } L = x_c = \frac{\mathfrak{R}_c \nu}{U_\infty}$$

soit en décomposant ν :

$$h = \frac{2}{3} \frac{U_\infty}{\mathfrak{R}_c^{1/2} \mu^{2/3}} \rho \lambda^{2/3} C_p^{1/3}$$

Calculons maintenant le rapport des densités de flux :

$$\frac{\varphi_p}{\varphi_p \text{ imp}} = -\frac{3}{2} \rho C_p V_p \frac{\mathfrak{R}_c^{1/2} \mu^{2/3}}{\rho \lambda^{2/3} C_p^{1/3} U_\infty}$$

Un regroupement des termes donne (avec V_p en valeur absolue) :

$$\boxed{\frac{\varphi_p}{\varphi_p \text{ imp}} = \frac{3}{2} Pr^{2/3} \mathfrak{R}_c^{1/2} \frac{V_p}{U_\infty}}$$

$$\frac{\varphi_p}{\varphi_p \text{ imp}} \approx 48 \text{ et } St = \frac{\varphi_p}{\rho C_p U_\infty (T_\infty - T_p)} = \frac{V_p}{U_\infty} \equiv \frac{1}{2} C_f$$

La condition de validité de l'hypothèse $dT/dx = 0$ est analogue à celle de la question 1. Il faut ici :

$$\frac{\delta_T}{\delta_T(x_c)} \ll 1, \text{ soit d'après (1.29) : } \delta_T \ll \frac{\delta_c}{Pr^{1/3}}$$

c'est-à-dire, en reprenant δ_c à la question 1 :

$$4,6 \frac{a}{V_p} \ll Pr^{-1/3} \times 5 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty} \frac{\mathfrak{R}_c \nu}{U_\infty}} = 5 Pr^{-1/3} \frac{\nu}{U_\infty} \mathfrak{R}_c^{1/2}$$

et enfin :

$$\frac{U_\infty}{V_p} \ll \frac{5}{4,6} Pr^{2/3} \mathfrak{R}_c^{1/2}$$

Par rapport au problème dynamique (inégalité 11), la condition est encore mieux remplie ici puisque pour l'eau on a $Pr > 1$.

5 - Prise en compte de la dissipation

L'écoulement est unidimensionnel puisque U et V sont indépendants de x . La fonction de dissipation Φ s'écrit alors (Ch. 3, § 3.2.4.) :

$$\Phi = \mu (dU/dy)^2$$

et l'équation d'enthalpie devient, pour une solution indépendante de x :

$$V \frac{dT}{dy} = a \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{\mu}{\rho C_p} \left(\frac{dU}{dy} \right)^2$$

avec :
$$\frac{dU}{dy} = -U_\infty \frac{V_p}{\nu} e^{\frac{V_p}{\nu} y} \quad (\text{formule 8, question 1})$$

et :
$$V = V_p = \text{cte} \quad (\text{formule 7})$$

On cherche une solution de la forme :

$$T - T_p = (T_\infty - T_p) e^{By}$$

d'où :

$$\frac{dT}{dy} = B (T_\infty - T_p) e^{By}$$

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = B^2 (T_\infty - T_p) e^{By}$$

soit en remplaçant dans l'équation d'enthalpie :

$$V_p B (T_\infty - T_p) e^{By} = a B^2 (T_\infty - T_p) e^{By} + \frac{\mu}{\rho C_p} \left(\frac{U_\infty V_p}{\nu} \right)^2 e^{2 \frac{V_p}{\nu} y}$$

et après simplification :

$$e^{\left(2 \frac{V_p}{\nu} - B\right) y} = \frac{\nu C_p}{V_p U_\infty^2} (T_\infty - T_p) B \left\{ 1 - \frac{a B}{V_p} \right\}$$

Le membre de droite est une constante. L'exponentielle ne peut être constante que si son exposant est nul ($e^0 = 1$). La solution recherchée est donc :

$$B = 2V_p / \nu$$

soit :

$$\boxed{(T - T_p) / (T_\infty - T_p) = e^{2 \frac{V_p}{\nu} y}} \quad (\text{avec } V_p < 0)$$

La condition d'existence de la solution s'écrit :

$$\frac{\nu C_p}{V_p U_\infty^2} (T_\infty - T_p) B \left(1 - \frac{a B}{V_p} \right) = 1$$

c'est-à-dire en remplaçant B et en regroupant (avec $Ec = \frac{U_\infty^2}{C_p \Delta T}$) :

$$\frac{2}{Ec} \left(1 - \frac{2}{Pr} \right) = 1$$

$$\boxed{Ec = 2 \left(1 - \frac{2}{Pr} \right)}$$

condition indépendante de V_p .

A $T_\infty = 25^\circ \text{C}$, pour l'eau $Pr \approx 6,25$.

En redécomposant le nombre d'Eckert, la condition précédente devient :

$$\Delta T = \frac{U_\infty^2}{2 C_p} \frac{1}{1 - \frac{2}{Pr}}$$

Pour avoir une solution exponentielle en T , il faut donc imposer entre la paroi et le fluide un écart de température :

$$\Delta T = \frac{5^2}{2 \times 4180} \frac{1}{1 - \frac{2}{6,25}} \text{ } ^\circ \text{C}$$

c'est-à-dire vraiment pas beaucoup. La solution est ici purement académique (U_∞ est trop faible).

A 85°C , $Pr = 2,1$ et $\Delta T = T_\infty - T_p = 0,063^\circ \text{C}$. Cela reste faible.

Il n'y a pas de solution exponentielle pour $Pr = 2$ puisqu'alors le ΔT nécessaire est infini.

Pour $Pr < 2$, il existe une solution, mais ΔT a changé de signe ($T_\infty - T_p < 0$).

Commentaires

1) Certains aspects de ce problème sont sans doute un peu académiques, mais l'ensemble apprend à manipuler des concepts de base, et met en évidence certaines tendances physiques, par exemple : l'aspiration de la couche limite est un moyen de freinage aérodynamique.

2) Si $V_p \rightarrow 0$, on ne retrouve pas la solution de Blasius. Le modèle ne convient donc pas pour de trop faibles valeurs de V_p / U_∞ (cf. fin de la question 3). Il n'est pas non plus valable à la naissance de la couche limite, près du bord d'attaque. On notera enfin que l'écoulement étudié constitue un cas particulier de régime établi (Ch. 3).