

## Chapitre 4

# DYNAMIQUE DES ÉCOULEMENTS LAMINAIRES EXTERNES

*O fortunatos nimium, sua  
si bona norint, Agricolas.*

VIRGILE

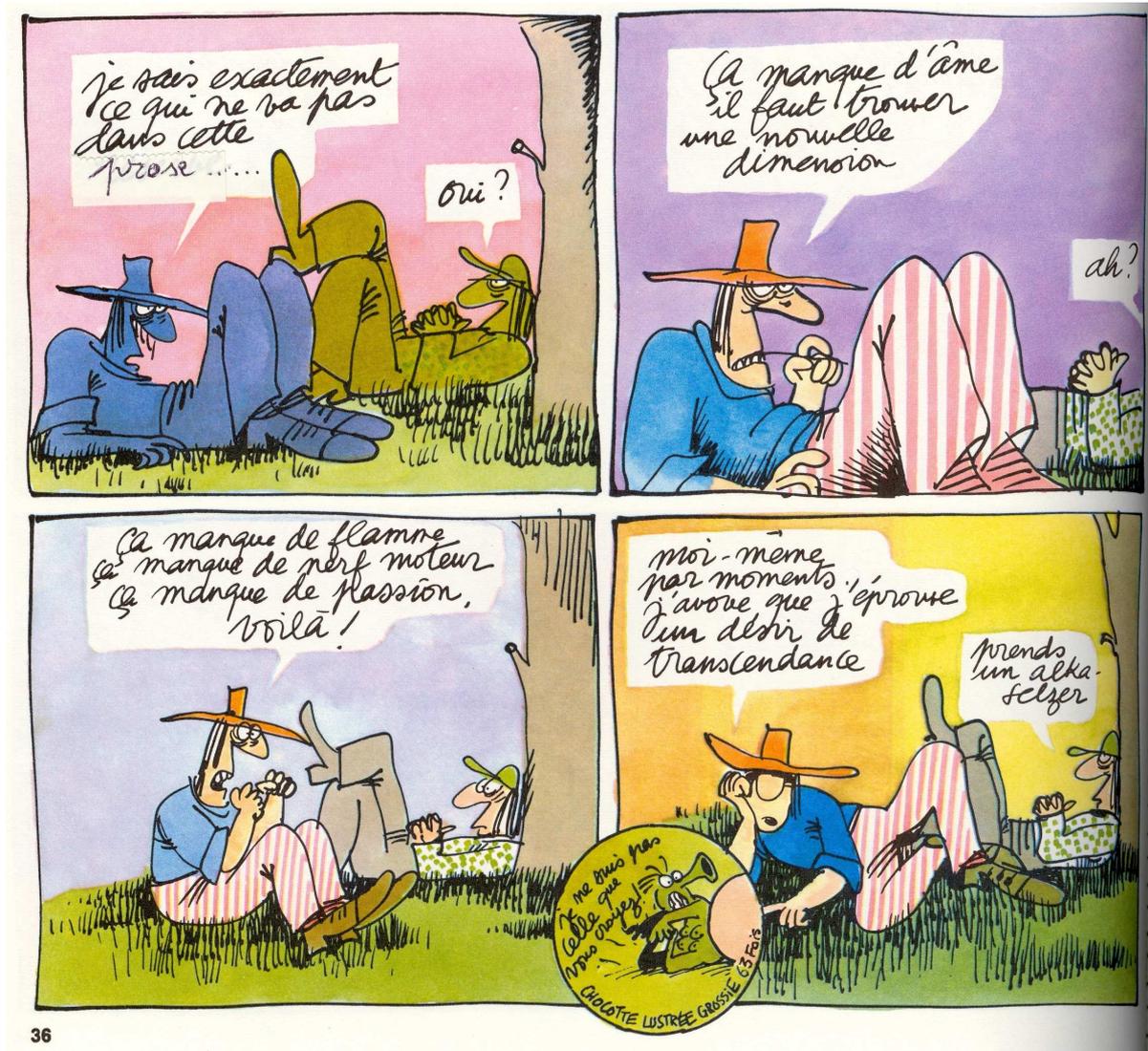
Les écoulements sans couplage thermique se comportent comme des écoulements presque isothermes, c'est-à-dire que le champ de température est sans influence notable sur le champ de vitesse ; ceci permet d'étudier la dynamique de l'écoulement d'une manière autonome.

On trouvera dans ce chapitre une analyse des écoulements bidimensionnels, sans couplage, limités par une surface plane. Bien qu'il s'agisse au point de vue géométrique d'un cas particulier, les enseignements que l'on en tire sont précieux pour l'extension à d'autres configurations. En outre, une certaine place a été donnée aux cas d'aspiration ou de soufflage à la paroi, qui suscitent de plus en plus d'intérêt, en aérodynamique aussi bien qu'en thermique (lits fluidisés, séchage...).

Pour cette étude, nous avons choisi de privilégier la méthode différentielle, basée au départ sur une propriété de « similitude » des profils de vitesse. Cependant, au lieu d'aborder de front toutes les difficultés, nous avons préféré suivre une progression en présentant successivement les écoulements sans gradient de vitesse extérieure (solution de Blasius), puis avec gradient de vitesse (solution de Falkner et Skan), ensuite avec soufflage ou succion à la paroi, enfin les écoulements sur des parois inclinées. Le cas le plus général, où l'on s'affranchit de l'hypothèse de similitude, sera détaillé au chapitre 5 car il est particulièrement intéressant avec les écoulements turbulents.

La méthode semi-intégrale (ou méthode de Karman) est également présentée, car elle ne fait pas double emploi avec la précédente : tributaire d'une hypothèse sur la forme analytique du profil de vitesse – c'est à la fois son avantage et son inconvénient – elle permet de manipuler des fonctions analytiques, ce qui est bien commode en particulier lorsqu'on veut faire une étude paramétrique, et son domaine d'application est plus général. Dans les cas simples où la comparaison est aisée, elle donne des résultats assez concordants avec ceux de la méthode différentielle.

A ce propos, c'est de manière délibérée que nous avons fait porter exemples et comparaisons numériques sur des grandeurs dimensionnées. Ainsi présentés, ils sont souvent plus parlants, et l'interprétation des lois physiques n'y perd pas en clarté.



Claire BRETÉCHER  
*Les amours écologiques du bolot occidental*

## 4.1. – PRÉSENTATION

### 4.1.1. – Les différentes catégories d'écoulements

Dans les trois chapitres précédents, nous n'avons pas eu à examiner de près l'influence des conditions aux limites. Au contraire, à partir de maintenant, celles-ci seront omniprésentes car elles imprimeront leurs caractéristiques à chaque écoulement particulier.

Vis-à-vis des conditions aux limites dynamiques, les écoulements sont classiquement séparés en trois catégories :

- ♣ *Les écoulements libres* : jets émergeant dans un milieu illimité, panaches.

◆ *Les écoulements externes* : le fluide est en contact avec une paroi matérielle, mais il est illimité dans les autres directions. L'exemple le plus traditionnel en est l'écoulement sur une plaque plane.

♥ *Les écoulements internes*, en contact avec des parois sur la quasi-totalité de leur surface frontière : écoulements en canalisations ou entre deux surfaces, écoulements dans les turbomachines, dans les échangeurs, etc. Ils seront examinés dans le chapitre 6.

Le présent chapitre est consacré aux écoulements laminaires externes.

#### 4.1.2. – Couplage entre le champ de vitesse et le champ de température

En thermoconvection, c'est-à-dire avec des écoulements anisothermes, il y a en principe une interdépendance entre les champs de vitesse et de température. Ceci apparaît nettement si l'on regarde les équations locales d'énergie et de quantité de mouvement (ch. 1, équations 1.35 et 1.56) que nous réécrivons ici en nous restreignant au régime stationnaire :

$$\overline{\text{grad}} \vec{V} \cdot \rho \vec{V} = \rho \vec{F} - \overline{\text{grad}} p + \mu (\Delta \vec{V} + \overline{\text{grad}} \text{div} \vec{V}) \quad (4.1)$$

$$\rho C_p \vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} T = \beta T \vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} p + P + \Phi + \text{div} (\lambda \overline{\text{grad}} T) \quad (4.2)$$

On voit en effet, que, quelles soient les circonstances, le champ de température est tributaire du champ de vitesse puisque la vitesse  $\vec{V}$  figure explicitement dans l'équation d'énergie (4.2), particulièrement dans le terme de transport  $\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} T$ .

Inversement, il y a en principe dépendance des vitesses vis-à-vis des températures par l'intermédiaire des paramètres  $\rho$  (masse volumique) et  $\mu$  (viscosité dynamique) qui sont des fonctions de la température.

Cependant,  $T$  n'est pas explicitement présente dans l'équation de quantité de mouvement (4.1). En conséquence, si dans l'écoulement considéré  $\rho$  et  $\mu$  varient peu en fonction de  $T$ , le problème dynamique pourra être résolu sans interférence du problème thermique.

Nous désignerons par « *écoulements sans couplage thermique* » les écoulements satisfaisant à cette condition, c'est-à-dire tels que :

$$\rho \text{ et } \mu \# \text{ indépendants de } T \quad (4.3)$$

Ils recouvrent une vaste plage d'applications pratiques, dont le traitement se trouve ainsi simplifié.

## 4.2. – COMPORTEMENT D'UN FLUIDE EN ÉCOULEMENT EXTERNE AU VOISINAGE D'UNE PAROI

### 4.2.1. – Données expérimentales

Reprenons, en la complétant, l'expérience de la plaque plane qui nous a déjà servi au chapitre 2 (§ 2.2.2). Nous y ajoutons un dispositif permettant de mesurer localement la composante  $U$  de la vitesse, parallèlement à la plaque. Soient  $U_\infty$  la vitesse de l'écoulement

loin de la surface,  $x$  l'abscisse mesurée depuis le bord d'attaque, et  $y$  la coordonnée perpendiculaire à la plaque. Nous supposons l'écoulement extérieur permanent, uniforme ( $U_\infty = \text{cte}$ ) et parallèle à la plaque.

Quelle que soit l'abscisse  $x$  choisie, l'allure générale de variation de  $U$  en fonction de  $y$  reste la même : très rapide au voisinage de la paroi, de plus en plus lente ensuite,  $U$  tendant asymptotiquement vers  $U_\infty$  lorsqu'on s'éloigne de la plaque. A la paroi,  $U \rightarrow 0$  (fig. 4.1).

Des évolutions plus complexes peuvent se produire dans certaines circonstances (§.4.5.1), mais presque toujours avec les mêmes caractéristiques : vitesse nulle à la paroi, fort gradient de  $U$  à proximité de la surface, évolution asymptotique de  $U$  vers sa limite  $U_\infty$ .

La région de l'écoulement où se manifestent ces variations rapides de  $U$  est appelée « couche limite dynamique ». Elle a été mise en évidence par Prandtl (1904) grâce à des expériences de visualisation.

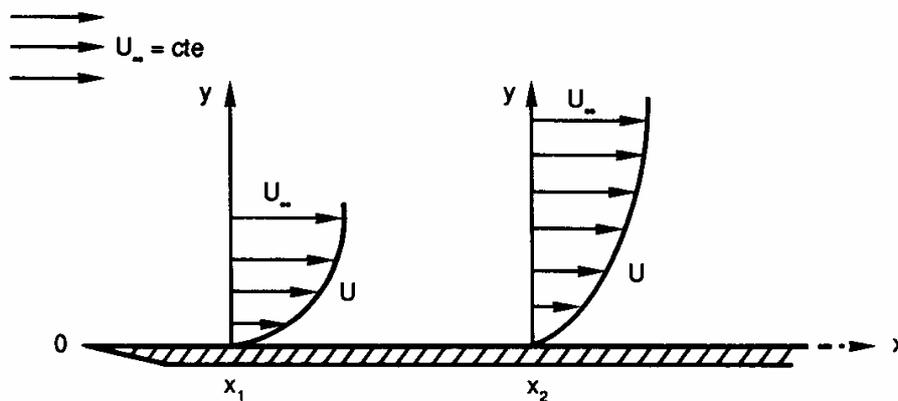


FIG. 4.1. – Évolution de la vitesse  $U$  au voisinage d'une paroi.

L'existence de cette couche limite doit être attribuée à la viscosité du fluide, qui répercute au sein de l'écoulement l'influence de la paroi, sous la forme d'un gradient transversal de vitesse  $\partial U / \partial y$  (ch. 1, § 1.1.3). Son influence est déterminante car c'est là que se fait l'essentiel des transferts de quantité de mouvement et de chaleur.

#### 4.2.2. – Conditions aux limites

##### ♣ Épaisseur de couche limite

La définition de la couche limite dynamique que nous venons de donner est trop vague pour servir à une modélisation de l'écoulement, et elle doit être quantifiée. Mais en fait, l'épaisseur de cette couche n'est caractérisée par aucun critère précis puisque  $U \rightarrow U_\infty$  quand  $y \rightarrow \infty$ , et il faut donc recourir à une *définition conventionnelle*.

Ainsi, on a convenu d'appeler « épaisseur de couche limite dynamique » l'ordonnée  $\delta$  telle que :

$$\frac{U(\delta)}{U_\infty} = 0,99 \quad (4.4)$$

Le choix du chiffre 0,99 est évidemment arbitraire, mais il correspond à une précision convenable des dispositifs expérimentaux.

La figure 4.2 représente schématiquement  $U(y)/U_\infty$  et  $\delta$  à une abscisse  $x$  donnée.

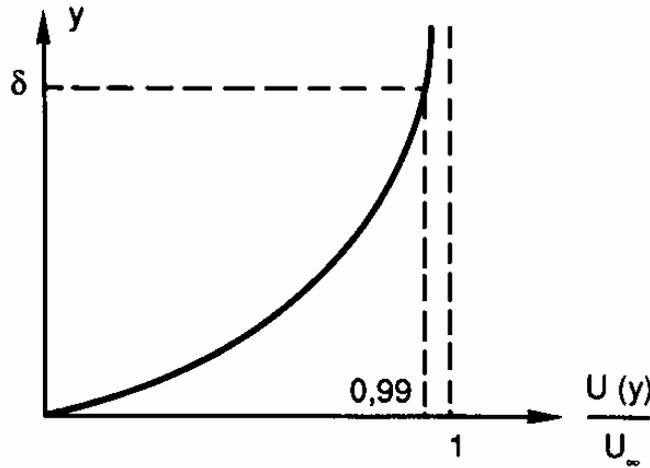


FIG. 4.2. – Épaisseur de couche limite dynamique  $\delta$

◆ *Condition d'adhérence à la paroi*

A la définition précédente, on joint une condition à la limite, dite « condition d'adhérence à la paroi », présentée et analysée en 1.1.3.2 :

$$U(y = 0) = U_{\text{paroi}} \tag{4.5a}$$

soit pour un obstacle immobile :

$$U(y = 0) = 0 \tag{4.5b}$$

Cette condition est justifiée physiquement par le fait que, en raison des forces moléculaires qui sont à l'origine de la viscosité, les molécules en contact avec la paroi lui sont pour ainsi dire accrochées, et se déplacent à la même vitesse qu'elle.

### 4.2.3. – Retour à l'expérience

Ayant adopté la définition (4.4) pour l'épaisseur de la couche limite, nous pouvons revenir à l'expérience de la plaque plane (§ 2.2.2), et chercher comment varie cette épaisseur  $\delta(x)$  en fonction de  $x$ . On obtient un profil dont l'allure est représentée sur la figure 4.3 : la couche limite s'épaissit régulièrement depuis le bord d'attaque dans la zone laminaire, puis plus rapidement dans la zone turbulente à partir de l'abscisse de transition  $x_c$ .

On observe également un phénomène sur lequel nous reviendrons au chapitre 5 : à partir de  $x_c$ , la couche limite laminaire devient progressivement turbulente, mais elle se dédouble en quelque sorte. Du côté de la paroi, subsiste une zone que l'on nomme « *sous-couche visqueuse* » : vu l'effet d'amortissement de la paroi, l'écoulement y reste de type laminaire, c'est-à-dire gouverné par la viscosité moléculaire ; du côté extérieur se développe une zone d'écoulement turbulent, dont l'épaisseur augmente.

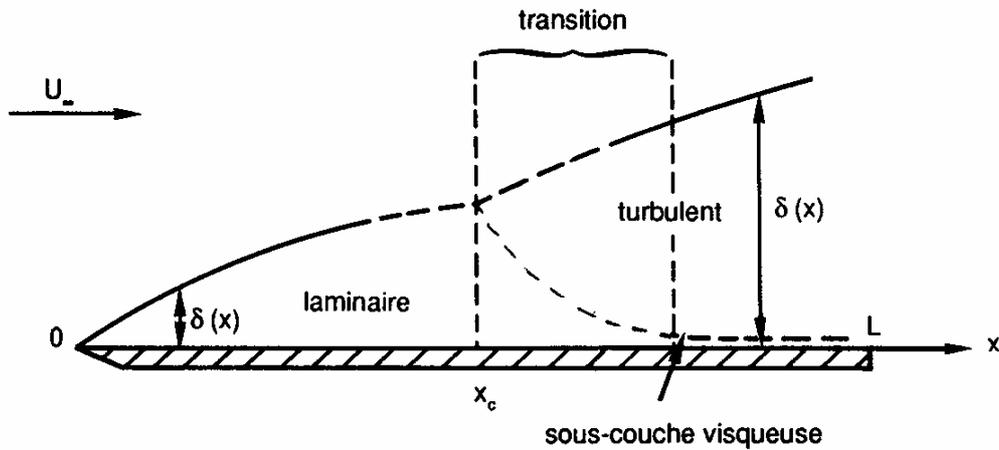


FIG. 4.3. – Épaisseur de la couche limite dynamique

La région de transition laminaire – turbulent occupe la partie de l'écoulement où cette structure se met en place. Plus loin, la sous-couche visqueuse se stabilise avec une épaisseur très faible. Quant à l'épaisseur de la couche limite, elle reste toujours très petite par rapport à la distance  $x$  au bord d'attaque (la figure 4.3 n'est pas à l'échelle). Des ordres de grandeur numériques sont donnés au paragraphe 4.4.6.

Enfin, dans toute la couche limite, la mesure des composantes  $U$  et  $V$  de la vitesse montre que l'on a toujours  $V \ll U$ .

### 4.3. – HYPOTHÈSES ET ÉQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE

#### 4.3.1. – Fluide visqueux isochore

♣ Consacrons-nous à présent à l'étude détaillée de la couche limite laminaire. Nous avons adopté au paragraphe 4.2.2 une définition conventionnelle de l'épaisseur de couche limite. Avec les conditions expérimentales retenues, il reste à préciser si dans cette partie de l'écoulement les équations de Navier–Stokes (qui expriment le bilan local de quantité de mouvement) peuvent faire l'objet de simplifications.

Les données expérimentales stipulent que l'écoulement est :

- permanent
- bidimensionnel (dans le plan  $x, y$ , fig. 4.1)
- isochore :  $\rho = cte$ .

Dans ces conditions, les équations de Navier–Stokes (équations 1.37c, § 1.3.3) sont réduites à deux et s'écrivent :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (4.6)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (4.7)$$

◆ Mais ici, puisque à une abscisse donnée l'épaisseur  $\delta$  est toujours petite devant  $x$ , on peut soupçonner (et vérifier) que  $V \ll U$ , que les variations de  $V$  sont faibles devant celles de  $U$ , et que les variations de  $U$  et  $V$  (y compris au niveau des dérivées secondes) sont beaucoup moins marquées suivant la direction  $x$  que suivant la direction  $y$ . On formule ainsi les « hypothèses de la couche limite » (ou hypothèses de Prandtl) :

$$\text{a) } V \ll U \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x} \ll \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial y} \ll \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4.8a)$$

$$\text{b) } \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \ll \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (4.8b)$$

♥ Alors, les équations de Navier – Stokes prennent une forme simplifiée, dite dégénérée, qui s'établit sur deux niveaux. Tout d'abord, dans (4.6) et (4.7), les termes  $\partial^2 / \partial x^2$  peuvent être négligés devant les termes  $\partial^2 / \partial y^2$ , et il reste :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (4.9)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (4.10)$$

(a)      (b)      (c)      (d)

Ensuite, en comparant terme à terme les deux équations, on observe que d'après les hypothèses (4.8) les termes (a), (b), (d) de (4.10) sont très petits devant les termes correspondants de (4.9). Il doit donc en être de même avec le dernier terme (c) :

$$\partial p^* / \partial y \ll \partial p^* / \partial x \quad (4.11a)$$

On est donc conduit à poser l'approximation :

$$\partial p^* / \partial y = 0 \quad (4.11b)$$

Ceci revient à dire que la loi de l'hydrostatique  $p^* = cte$  est vérifiée dans la direction perpendiculaire à la plaque.

!!! A ce propos, on remarquera qu'aucune condition n'a été formulée sur l'orientation de la plaque, qui peut être horizontale ou inclinée (c'est seulement par commodité quelle est horizontale sur les figures). Cette généralisation est permise par l'utilisation de la pression motrice  $p^*$ , qui dispense de préciser l'inclinaison par rapport à la verticale (§ 1.3.3.2).

En conclusion, le système d'équations dégénérées à résoudre est formé par les relations (4.9) et (4.11b) auxquelles on ne doit pas oublier de joindre l'équation de continuité (bilan de masse) :  $\text{div} \vec{V} = 0$ . Ce sont les « équations de la couche limite » (ou équations de Prandtl) :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0$$

♠ Les simplifications qui permettent d'aboutir au système (4.12) peuvent faire l'objet de justifications théoriques plus ou moins élaborées, et aussi plus ou moins convaincantes. Mais est-il bien nécessaire de recourir à de tels raisonnements ? On peut très légitimement considérer les approximations (4.8) comme des hypothèses suggérées par l'expérience, et généralement bien vérifiées *a posteriori* dans leurs conséquences. Il est clair toutefois que localement, elles peuvent être mises en défaut, particulièrement au voisinage de zones de recirculation (§ 4.5.1).

#### 4.3.2. – Approximation du fluide parfait

En revenant aux équations générales de Navier–Stokes (4.6) et (4.7), regardons en particulier ce que devient l'écoulement lorsque la viscosité  $\nu$  est très petite.

L'hypothèse  $\nu \rightarrow 0$  correspond à l'approximation du fluide parfait. On est en présence d'un écoulement sans couche limite, décrit par les *équations d'Euler*, où les gradients de vitesse ne dépendent que de la pression.

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (4.13)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} \quad (4.14)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} \quad (4.15)$$

Ces équations peuvent éventuellement servir à décrire l'écoulement à l'extérieur de la couche limite lorsque la viscosité n'est pas trop grande.

Notons que le système précédent constitue une généralisation des équations d'Euler originelles (cf. 1.36c), qui avaient été écrites pour un écoulement sans champ de forces extérieur, donc sans tenir compte du champ de pesanteur. Ici, la pression motrice  $p^*$  a remplacé la pression statique  $p$ .

#### 4.3.3. – Écriture adimensionnelle des équations de la couche limite

Nous avons vu au paragraphe 2.3.1. que pour passer à la forme adimensionnelle des équations il nous faut choisir une vitesse de référence  $V^\circ$  et une longueur de référence  $L^\circ$  constantes, caractéristiques du phénomène étudié et de son développement.

La seule vitesse répondant à ces exigences est celle de l'écoulement extérieur. On prendra donc :  $V^\circ = U_\infty$ .

En ce qui concerne  $L^\circ$ , l'abscisse de transition  $x_c$  ferait une bonne longueur de référence, mais elle n'est pas connue avec assez de précision. Il reste donc le choix entre la longueur  $L$  de la plaque (fig. 4.3) et l'épaisseur de couche limite  $\delta(L)$  en  $x = L$ . On prend le plus souvent  $L^\circ = L$ , d'où  $x^+ = x/L$  et  $y^+ = y/L$ .

Alors, le critère de similitude relatif à la diffusion de quantité de mouvement est :  $\Gamma_v = \nu/U_\infty L$  (§ 2.4.3.3), ou plus usuellement le *nombre de Reynolds* :

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} \quad (4.16a)$$

Avec les conditions spécifiées,  $Re_L$  est le seul critère de similitude qui intervienne dans l'étude de la couche limite. Alors, le système (4.12) s'écrit encore, sous forme adimensionnée (cf. 2.31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^+}{\partial x^+} + \frac{\partial V^+}{\partial y^+} &= 0 \\ U^+ \frac{\partial U^+}{\partial x^+} + V^+ \frac{\partial U^+}{\partial y^+} &= - \frac{\partial p^{*+}}{\partial x^+} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 U^+}{\partial y^{+2}} \\ \frac{\partial p^{*+}}{\partial y^+} &= 0 \end{aligned} \quad (4.16b)$$

Cependant, si l'on se place à une abscisse  $x$  quelconque, on peut toujours considérer que la plaque s'arrête là, et que sa longueur est  $x$ . L'épaisseur de couche limite  $\delta(x)$  n'en est évidemment pas affectée. Aussi, avec un abus d'écriture, on définit le « *nombre de Reynolds local*  $Re_x$  » par :

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (4.17)$$

Le remplacement de  $Re_L$  par  $Re_x$  dans (4.16b) est courant mais un peu dangereux car il incite le lecteur à considérer  $Re_x$  comme une variable. Par contre, il est tout à fait légitime d'exprimer certaines grandeurs en fonction de  $Re_x$ , à condition qu'il soit traité comme un groupement sans dimension dont l'usage est commode, mais qui ne correspond plus exactement à la définition d'un critère de similitude (à moins de considérer  $x$  fixé, ce qui revient à lui donner le même rôle que  $L$ ).

#### 4.4. – SOLUTIONS LOCALES AUTO-SIMILAIRES DES ÉQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE : MÉTHODE DIFFÉRENTIELLE

Pas plus que les équations générales de Navier – Stokes les équations (4.12) n'ont de solutions analytiques, sauf dans quelques cas très limités. En outre, leur résolution numérique complète est extrêmement ardue. Cependant, sous certaines conditions de nature expérimentale, des simplifications sont possibles qui permettent de faciliter grandement la résolution du problème.

Nous examinerons dans ce qui suit deux méthodes de résolution : *une méthode différentielle* dont le domaine de validité est un peu restreint mais qui donne des solutions exactes pour le champ de vitesse avec un minimum d'hypothèses, et *une méthode semi-intégrale* plus générale, mais qui nécessite des hypothèses sur la forme analytique de  $U$ .

#### 4.4.1. – Bases de la méthode différentielle

##### 4.4.1.1. – CONDITIONS EXPÉRIMENTALES

Avant toute hypothèse portant sur les grandeurs à déterminer, il est essentiel de bien préciser dans le détail les conditions de validité du calcul qui va suivre, c'est-à-dire les conditions expérimentales dans lesquelles on se place.

♣ L'écoulement se fait le long d'une plaque plane, parallèlement à celle-ci.

◆ En dehors de la couche limite, l'écoulement est uniforme, sans gradient de vitesse :

$$U_{\infty} = cte \quad (4.18a)$$

Il ressort de l'équation (4.6) qu'on a dans ce cas :

$$\partial p_{\infty}^* / \partial x = 0 \quad (4.18b)$$

L'écoulement extérieur est donc à gradient de pression nul. Cette condition assez restrictive sera assouplie plus loin (§ 4.5).

♥ Conséquence de l'hypothèse ◆, d'après la troisième équation (4.12) on a dans la couche limite :

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0 \quad \text{soit : } p^* = p^*(x), \text{ indépendant de } y.$$

Il en résulte que  $\partial p^* / \partial x$  est également indépendant de  $y$ . Donc,  $\forall y$  :

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\partial p_{\infty}^*}{\partial x} \quad (4.18c)$$

et par conséquent, avec l'hypothèse ◆ :

$$\boxed{\frac{\partial p^*}{\partial x} = 0 \quad \text{dans la couche limite}} \quad (4.18d)$$

##### 4.4.1.2. – DÉMARCHE SUIVIE

Le calcul que nous allons conduire sera guidé par une idée simple. L'expérience montre que, pour  $Re_x < Re_c$ , les courbes  $U(y)$  restent en apparence semblables les unes aux autres quand  $x$  varie (fig. 4.1). Il s'agit de voir si l'on peut formaliser rigoureusement cette propriété empirique, que nous appellerons « *auto-similarité* ».

Pour cela, considérons deux points dans la couche limite, de coordonnées  $(x_1, y_1 = \eta x_1)$  et  $(x_2, y_2 = \eta x_2)$  (la lettre grecque  $\eta$  se dit : *êta*). Ils sont donc tels que :

$$y_1 / x_1 = y_2 / x_2 = \eta$$

Posons en outre :

$$U^+(x, y) = \frac{U(x, y)}{U_{\infty}} \quad (4.19)$$

L'auto-similarité la plus simple s'exprimerait par la condition :

$$U^+(x_1, \eta x_1) = U^+(x_2, \eta x_2)$$

c'est-à-dire :

$$U^+ = U^+\left(\eta = \frac{y}{x}\right)$$

Mais les données expérimentales montrent que ceci n'est pas vrai, et le calcul confirme l'absence de solutions de cette forme.

Nous sommes alors conduits à conjecturer l'existence d'une ressemblance moins rudimentaire, qui serait vérifiée non pas dans l'espace physique  $\{x, y\}$ , mais dans un espace transformé  $\{\beta(x), y\}$ .

Autrement dit :

<p><i>Existe-t-il une transformation des coordonnées</i></p> $x \Rightarrow \beta(x)$ $y \Rightarrow y$ <p><i>telle que l'on ait :</i></p> $\frac{U}{U_\infty} = f(\eta) \quad ; \quad \eta = \frac{y}{\beta(x)}$	(4.20)
---	--------

En introduisant la transformation auto-similaire (4.20) dans les équations et en écrivant sa condition d'existence (i.e. coefficients constants, indépendants de  $x$ ), on obtiendra la forme analytique de  $\beta(x)$ . En même temps, on aura rendu le problème unidimensionnel puisqu'il ne comportera plus qu'une seule variable : l'ordonnée adimensionnée  $\eta$ .

D'autre part, l'unicité de la solution a été démontrée pour les équations de la couche limite laminaire. En conséquence, si les équations de départ sont correctes, et s'il existe une solution de la forme cherchée, elle coïncide nécessairement avec la solution physique.

#### 4.4.1.3. – TECHNIQUE DE RÉOLUTION

Nous avons maintenant à résoudre le système constitué des équations (4.12a et b) avec la condition (4.18d), soit :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{4.21a}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{4.21b}$$

De plus, il est très commode de passer par l'intermédiaire de la *fonction de courant*  $\Psi$ , introduite au chapitre 1 (§ 1.4.2) et définie par :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ; \quad V = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{4.22}$$

car alors l'équation de continuité est automatiquement satisfaite, et il ne reste plus qu'une seule équation à résoudre, à savoir (4.21b).

### 4.4.2. – Champ des vitesses dans la couche limite

#### 4.4.2.1. – ÉQUATION DE BLASIUS

♣ L'équation (4.21a) étant satisfaite (§ précédent), il nous reste seulement à résoudre (4.21b) dans laquelle, grâce à la condition d'auto-similarité, nous allons remplacer les

variables  $x$  et  $y$  par l'unique variable  $\eta = y / \beta(x)$ . Il nous faut donc tout d'abord exprimer  $U$ ,  $V$ ,  $\partial U / \partial x$ ,  $\partial V / \partial y$  et  $\partial^2 U / \partial y^2$  en fonction de  $\eta$ .

La chose est déjà faite pour  $U$  puisque nous avons posé en (4.20) :

$$U = U_{\infty} f(\eta)$$

En ce qui concerne  $V$ , exprimons d'abord la fonction de courant  $\Psi$  en écrivant, d'après (4.22) et (4.20) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = U \beta(x) = U_{\infty} \beta(x) f(\eta)$$

On voit que  $\Psi$  est une fonction de  $x$  et de  $\eta$  :

$$\Psi = U_{\infty} \beta(x) \left\{ \int_0^{\eta} f(u) du + cte \right\}$$

Désormais, il va être plus commode de travailler avec l'intégrale de  $f$  qu'avec la fonction elle-même. Posons donc :

$$F(\eta) = \int_0^{\eta} f(u) du + cte \quad (4.23a)$$

d'où :

$$cte = F(0) \quad (4.23b)$$

et :

$$\boxed{\Psi = U_{\infty} \beta(x) F(\eta)} \quad (4.23c)$$

 A partir de maintenant, dans tout ce qui concerne la méthode différentielle (ch. 4, 5, 6), nous réservons la notation « ' » à la dérivation par rapport à  $\eta$ .

Alors, vu (4.20) et (4.23a, b) :

$$f(\eta) = F'(\eta) = \frac{U}{U_{\infty}} \quad (4.23d)$$

Exprimons ensuite la composante  $V$  de la vitesse, d'après (4.22) :

$$V = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = - U_{\infty} \left\{ F \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} + \beta(x) \frac{dF}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} \quad (4.24)$$

De (4.20) on tire :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{y}{\beta^2(x)} \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} = - \frac{\eta}{\beta(x)} \frac{d\beta(x)}{dx} \quad (4.25)$$

soit en reportant dans (4.24) :

$$V = - U_{\infty} \left\{ F \frac{d\beta(x)}{dx} - \frac{dF}{d\eta} \eta \frac{d\beta(x)}{dx} \right\}$$

$$V = U_{\infty} \frac{d\beta(x)}{dx} (\eta F' - F) \quad (4.26)$$

Nous devons encore calculer les autres termes figurant dans (4.21b), à savoir :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = - U_{\infty} F'' \frac{\eta}{\beta(x)} \frac{d\beta(x)}{dx} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_{\infty} F'' \frac{1}{\beta(x)} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U_\infty}{\beta(x)} F'''' \frac{1}{\beta(x)} = \frac{U_\infty F''''}{\beta^2(x)} \quad (4.29)$$

◆ Entrons les trois expressions précédentes, ainsi que (4.20) et (4.26), dans l'équation à résoudre (4.21b). Il vient :

$$- (U_\infty F') U_\infty F'' \frac{\eta}{\beta(x)} \frac{d\beta(x)}{dx} + U_\infty \frac{d\beta(x)}{dx} (\eta F' - F) U_\infty F'' \frac{1}{\beta(x)} = \nu \frac{U_\infty F''''}{\beta^2(x)}$$

soit en simplifiant et en présentant l'équation sous forme adimensionnelle :

$$F'''' + \frac{U_\infty \beta(x)}{\nu} \frac{d\beta(x)}{dx} F F'' = 0 \quad (4.30)$$

!!!! Pour satisfaire la condition d'auto-similarité, les solutions de cette équation ne doivent dépendre que de  $\eta$ , et donc être indépendantes de  $x$ . Ceci impose que le coefficient du terme  $FF''$  soit constant :

$$U_\infty \frac{\beta(x)}{\nu} \frac{d\beta(x)}{dx} = \sigma = cte \quad (4.31a)$$

Cependant, le choix de la constante  $\sigma$  est arbitraire, et ne modifie pas le résultat final. La convention usuelle, due à Blasius, consiste à prendre :

$$\sigma = \frac{1}{2} \quad (4.31b)$$

L'équation (4.30) dite *équation de Blasius* s'écrira donc en pratique :

$$\boxed{2F'''' + F F'' = 0} \quad (4.32)$$

Nous avons maintenant en main une équation différentielle à une inconnue  $F(\eta)$  et une seule variable  $\eta$ , qui remplace le système (4.21) de deux équations aux dérivées partielles à deux inconnues  $U(x,y)$  et  $V(x,y)$ .

♥ Les **conditions aux limites** associées à l'équation de Blasius sont :

- à la paroi ( $y = 0, \eta = 0$ ) :  $U = 0$  soit d'après (4.23d) :

$$F'(0) = U(0)/U_\infty = 0 \quad (4.33a)$$

- à la paroi, si celle-ci est imperméable :

$$V(\eta = 0) = V_p = 0$$

d'où, d'après (4.26) :

$$F(0) = 0 \quad (4.33b)$$

- loin de la paroi ( $y \rightarrow \infty, \eta \rightarrow \infty$ ) :  $U = U_\infty$  d'où :

$$F'(\infty) = 1 \quad (4.33c)$$

♠ Revenons maintenant au paramètre d'auto-similarité  $\beta(x)$  qui n'a pas encore été explicité. Une fois la constante  $\sigma$  fixée, il se trouve précisé. On a en effet (voir 4.31a) :

$$\sigma = \frac{1}{2} = U_\infty \frac{\beta(x)}{\nu} \frac{d\beta(x)}{dx} = \frac{U_\infty}{\nu} \left( \frac{1}{2} \frac{d\beta^2(x)}{dx} \right)$$

et l'on voit que le choix de la valeur  $1/2$  est seulement guidé par une simplification avec l'autre facteur  $1/2$ . Il en résulte :

$$\frac{d\beta^2(x)}{dx} = \frac{\nu}{U_\infty} \quad \text{d'où} \quad \beta^2 = \frac{\nu}{U_\infty} x + cte$$

Au bord d'attaque de la plaque ( $x = 0$ ) il n'y a pas encore de couche limite. Il faut donc avoir  $\beta(0) = 0$ , de sorte que :

$$\beta(x) = \left( \frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{1/2} \quad (4.34a)$$

Ainsi l'ordonnée adimensionnelle  $\eta = y / \beta(x)$  a pour expression :

$$\eta = \left( \frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} y \quad (4.34b)$$

#### 4.4.2.2. – CALCUL DE $U$ ET $V$

L'équation de Blasius (4.32) fournit une classe de solutions exactes des équations de la couche limite, mais ce ne sont pas des solutions analytiques. Il a donc fallu résoudre numériquement cette équation pour diverses valeurs de  $\eta$ . Un échantillon de résultats est présenté dans le tableau 4.1.

TABLEAU 4.1. – Solutions de l'équation de Blasius (d'après R. COMOLET)

$\eta$	$F$	$F'$	$F''$
0	0	0	0,332 06
0,2	0,006 64	0,066 41	0,331 99
0,4	0,026 56	0,132 77	0,331 47
0,6	0,059 74	0,198 94	0,330 08
0,8	0,106 11	0,264 71	0,327 39
1,0	0,165 57	0,329 79	0,323 01
1,4	0,322 98	0,456 27	0,307 87
1,8	0,529 52	0,574 77	0,282 93
2,2	0,781 20	0,681 32	0,248 35
2,6	1,072 52	0,772 46	0,206 46
3,0	1,396 82	0,846 05	0,161 36
4,0	2,305 76	0,955 52	0,064 24
5,0	3,283 29	0,991 55	0,015 91
6,0	4,279 64	0,998 98	0,002 40
7,0	5,279 26	0,999 92	0,000 22

A partir des valeurs ci-dessus, on obtient :

- ♣ - la composante longitudinale  $U$  de la vitesse, d'après (4.23d) :

$$\boxed{U = U_\infty F'(\eta)} \quad (4.35a)$$

L'allure de la courbe  $U(\eta)$  est en conformité avec la figure 4.1.

- ◆ - la composante transversale  $V$  (d'après 4.26 et 4.34a) :

$$V = \frac{1}{2} \left( \frac{U_\infty \nu}{x} \right)^{1/2} (\eta F' - F) \quad (4.35b)$$

ou encore :

$$\frac{V}{U_\infty} = \frac{1}{2\sqrt{Re_x}} (\eta F' - F) \quad (4.35c)$$

La plupart du temps, on ne parle pas beaucoup de cette composante  $V$  pour la simple raison qu'elle n'a pas un grand intérêt pratique, sauf si l'on veut aborder les écoulements sur des surfaces poreuses (soufflage ou aspiration de la couche limite, séchage....) car alors on a  $V_p \neq 0$  (§ 4.5.2).

Pourtant, l'examen de  $V$  est bien utile pour comprendre l'influence de la paroi sur la structure de l'écoulement, et pour apprécier la cohérence de la solution de Blasius. Cela mérite d'y consacrer quelques lignes.

La première chose visible sur l'expression (4.35b) est que la propriété d'auto-similarité de  $U$  ne s'étend pas à la composante transversale de la vitesse, puisque  $V$  est une fonction de  $\eta$  et de  $x$ . Tant pis, c'est sans grande conséquence.

Ensuite, pour  $x$  fixé,  $V$  est une fonction monotone croissante de  $\eta$ . A la paroi, sa dérivée est nulle :  $\{(\eta F' - F)_{\eta=0} = 0\}$ . Mais surtout,  $V$  tend vers une valeur finie  $V_\infty$  quand on s'éloigne de la plaque plane. Le calcul de (4.35c) donne :

$$\frac{V_\infty}{U_\infty} = \frac{0,860}{\sqrt{Re_x}} \quad (4.35d)$$

Ceci traduit une très légère déflexion de l'écoulement vers les  $y$  positifs, due au freinage imposé par la paroi. Cette déflexion s'estompe progressivement le long de la plaque puisque  $V$  varie comme  $1/\sqrt{x}$ .

On pourrait craindre de voir là une contradiction avec les hypothèses de départ (4.18). Heureusement il n'en est rien. En effet, dans l'écoulement extérieur, l'équation de continuité s'écrit :  $\frac{\partial U_\infty}{\partial x} + \frac{\partial V_\infty}{\partial y} = 0$ , d'où  $U_\infty = cte \Rightarrow V_\infty$  indépendant de  $y$ , ce qui est bien en accord avec (4.35d). Ensuite, dans l'équation de quantité de mouvement (4.21b), qui devient  $U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} + V_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U_\infty}{\partial y^2}$ , le terme  $V_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial y}$  est nul  $\forall V_\infty$  si  $U_\infty = cte$ . Il n'y a donc pas d'incompatibilité avec un gradient de pression nul.

Enfin, on vérifie l'approximation  $V \ll U$ , sauf au voisinage immédiat du bord d'attaque, où  $V \rightarrow \infty$ , ce qui signifie que la solution n'est pas valable à proximité de ce point singulier (comme les gradients sont beaucoup plus importants dans cette région, il faut utiliser les équations de Navier-Stokes sans approximation). Mais dès que le nombre de Reynolds local  $Re_x$  est supérieur à 2500 (ce qui est une valeur faible dans un écoulement externe), le rapport  $V_\infty / U_\infty$  devient inférieur à 2%.

♥ - les *trajectoires* des particules fluides, qui sont aussi dans un écoulement permanent les *lignes de courant*, autrement dit les courbes  $\Psi = cte$  ( $\Psi$  étant donnée par 4.23c et 4.34a).

Celles-ci n'ont pas d'expression analytique, puisque  $F$  n'en a pas, mais peuvent être approchées par des fonctions du type  $y^2 = A + B\sqrt{x}$ . Leur allure approximative est indiquée sur la figure 4.4.

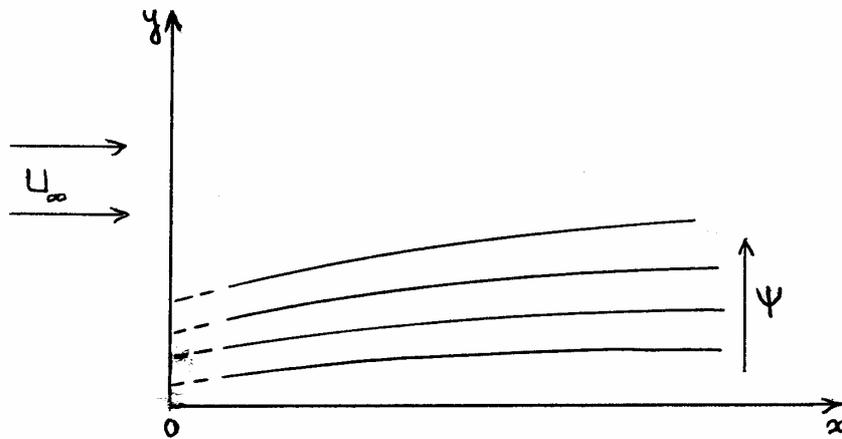


FIG. 4.4 – Représentation sommaire des trajectoires au voisinage d'une paroi plane (la figure n'est pas à l'échelle)

#### 4.4.3. – Contrainte $\tau_p$ à la paroi et traînée de frottement

La contrainte visqueuse à la paroi s'écrit ici (§ 1.2.5, relation 1.19c) :

$$\tau_p = \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \left( \frac{dU}{d\eta} \right)_{\eta=0} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (4.36a)$$

où, d'après (4.35a) :

$$\left( \frac{dU}{d\eta} \right)_{\eta=0} = U_\infty F''(0) \quad (4.36b)$$

soit, compte tenu de (4.34b) :

$$\tau_p = \mu \frac{U_\infty^{3/2}}{\nu^{1/2}} F''(0) \frac{1}{x^{1/2}} = \left( \frac{\mu \rho}{x} \right)^{1/2} U_\infty^{3/2} F''(0) \quad (4.37a)$$

En fonction de  $x$ ,  $\tau_p$  varie donc comme  $x^{-1/2}$ .

La valeur numérique de  $F''(0)$  figure sur le tableau 4.1 :

$$F''(0) = 0,332 \quad (4.37b)$$

d'où :

$$\tau_p = 0,332 \left( \frac{\mu \rho}{x} \right)^{1/2} U_\infty^{3/2} \quad (4.38)$$

Sur une plaque de longueur  $L$  baignée par un écoulement laminaire ( $L < x_c$ ), la valeur moyenne de la contrainte à la paroi sera :

$$\begin{aligned} \langle \tau_p \rangle &= 0,332 (\mu \rho)^{1/2} U_\infty^{3/2} \frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx}{x^{1/2}} \\ \langle \tau_p \rangle &= 0,664 \left( \frac{\mu \rho}{L} \right)^{1/2} U_\infty^{3/2} \end{aligned} \quad (4.39)$$

La force tangentielle totale appliquée à la surface de la plaque est la « traînée de frottement »  $T_f$ . En considérant une tranche rectangulaire de largeur  $b$ , elle a pour valeur :

$$T_f = \langle \tau_p \rangle L b = 0,664 b (\mu \rho L)^{1/2} U_\infty^{3/2} \quad (4.40)$$

Elle est donc proportionnelle à  $U_\infty^{3/2}$ , tandis que la puissance mécanique  $P_f$  dissipée par le frottement visqueux à la paroi est proportionnelle à  $U_\infty^{5/2}$ . En effet, celle-ci s'écrit en première approximation :

$$P_f = T_f U_\infty = 0,664 b (\mu \rho L)^{1/2} U_\infty^{5/2} \quad (4.41)$$

#### 4.4.4. – Épaisseur de couche limite

L'épaisseur de couche limite  $\delta(x)$  a été définie conventionnellement par (4.4) :

$$\frac{U(\delta)}{U_\infty} = 0,99$$

Mais d'autre part, avec le formalisme précédent, on a d'après (4.35a) :

$$\frac{U(\eta)}{U_\infty} = F'(\eta)$$

Posons :  $\eta_\delta = \delta / \beta(x)$ . Alors, à la lisière de la couche limite :

$$\frac{U(\eta_\delta)}{U_\infty} = F'(\eta_\delta) = 0,99 \quad (4.42)$$

Selon les auteurs, la résolution numérique de l'équation de Blasius donne :

$$\eta_\delta = 4,91 \text{ à } 4,92$$

On adopte habituellement la valeur arrondie  $\eta_\delta = 5$ , l'écart résultant sur  $\delta$  étant inférieur à 2%. D'ailleurs, dans la mesure où la définition de  $\delta$  repose sur une convention, cela ne porte pas à conséquence si tout le monde est d'accord sur cette valeur de 5. On a donc :

$$\delta = 5 \beta(x) \quad (4.43)$$

soit avec (4.34a) :

$$\delta = 5 \left( \frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{1/2} \quad (4.44a)$$

et l'on voit que  $\delta$  varie comme  $x^{1/2}$ . On écrit aussi souvent, à partir de (4.17) :

$$\delta = 5 x Re_x^{-1/2} \quad (4.44b)$$

#### 4.4.5. – Coefficient de frottement et grandeurs adimensionnées

♣ Le coefficient de frottement est, comme le nombre de Reynolds  $Re_L$ , le critère de similitude relatif aux forces de viscosité, mais avec référence à la paroi. On se reportera pour sa définition au chapitre 2, § 2.5.1.3. Il a pour expression :

$$\frac{1}{2} C_f(x) = \frac{\tau_p(x)}{\rho U_\infty^2} \quad (4.45)$$

soit, avec (4.38) :

$$\frac{1}{2} C_f = 0,332 \left( \frac{\mu}{\rho U_\infty x} \right)^{1/2} \quad (4.46)$$

expression où l'on voit apparaître le groupement sans dimension que nous avons appelé *nombre de Reynolds local*  $Re_x$  au paragraphe 4.3.3 :

$$\boxed{\frac{1}{2} C_f = 0,332 Re_x^{-1/2} \approx \frac{1}{3} Re_x^{-1/2}} \quad (4.47)$$



A ce propos, nous avons signalé le problème que pose l'usage de  $Re_x$ . En toute rigueur, il faudrait introduire l'abscisse adimensionnée  $x^+ = x/L$  dans (4.46), qui s'écrirait alors :

$$\frac{1}{2} C_f = 0,332 Re_L^{-1/2} (x^+)^{-1/2} \quad (4.48)$$

◆ Quoi qu'il en soit, si l'écoulement est laminaire sur toute la longueur  $L$  de la plaque, on peut introduire un coefficient de frottement moyen  $C_{Xf}$ , appelé « *coefficient de traînée* », lié à la tension moyenne à la paroi  $\langle \tau_p \rangle$  :

$$\frac{1}{2} C_{Xf} = \frac{\langle \tau_p \rangle}{\rho U_\infty^2} \quad (4.49a)$$

soit d'après (4.39) :

$$\frac{1}{2} C_{Xf} = 0,664 \left( \frac{\mu}{\rho L U_\infty} \right)^{1/2} \quad (4.49b)$$

ou encore avec (4.16a) :

$$\boxed{\frac{1}{2} C_{Xf} = 0,664 Re_L^{-1/2}} \quad (4.50)$$

♥ La puissance  $P_f$  dissipée le long d'une plaque de longueur  $L$  et de largeur  $b$  (surface  $S$ ) est alors, toujours en première approximation (§ 4.4.3) :

$$P_f = \langle \tau_p \rangle L b U_\infty = \langle \tau_p \rangle S U_\infty \quad (4.51a)$$

d'où avec (4.49a) :

$$P_f = \frac{1}{2} C_{Xf} \rho S U_\infty^3 \quad (4.51b)$$

Contrairement à l'apparence,  $P_f$  n'est généralement pas proportionnelle à  $U_\infty^3$  mais à  $U_\infty^{5/2}$  (voir l'expression 4.41) car il y a dans  $C_{Xf}$  un terme  $U_\infty^{-1/2}$ . La proportionnalité à  $U_\infty^3$  ne serait vérifiée que si le coefficient de traînée  $C_{Xf}$  était indépendant de  $Re_L$ , ce qui n'est pas le cas ici. Une observation analogue s'applique à la force de frottement :

$$F_t = \langle \tau_p \rangle S = \frac{1}{2} C_{Xf} S \rho U_\infty^2 \quad (4.52)$$

qui est en fait proportionnelle à  $U_\infty^{3/2}$  (voir 4.40).

**!!!** A cette occasion, on mesure le caractère pernicieux d'une formulation qui consiste à faire intervenir dans la même expression des grandeurs adimensionnées et d'autres qui ne le sont pas. Pour cette raison, nous donnons souvent la préférence à des écritures plus lourdes mais plus clairement physiques telles que (4.41).

Bien entendu, on peut toujours mettre une relation du type (4.52) sous forme complètement adimensionnelle ; mais cela ne présente pas beaucoup d'intérêt ici puisque de toute façon l'ingénieur veut en définitive calculer la grandeur  $F_t$ .

#### 4.4.6. – Ordres de grandeur des principaux paramètres

Pour tous les paramètres que nous venons d'évoquer, il est important d'avoir en tête des ordres de grandeur. Ceux-ci peuvent être précisés sur deux exemples simples.

Prenons d'abord un écoulement d'air à 20°C et à une pression de 1 bar ( $\nu \approx 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$  ;  $\rho \approx 1,2 \text{ kg} / \text{m}^3$ ). Si la plaque est très lisse, et l'écoulement extérieur parfaitement laminaire, on admet que la transition laminaire – turbulent se fait pour  $Re_{xc} = U_\infty x_c / \nu \approx 5 \cdot 10^5$ , qui est une valeur plafond.

Le tableau 4.2 résume la situation : nous y avons indiqué les abscisses de transition  $x_c$ , les épaisseurs de couche limite à la transition, le  $C_{Xf}$  et le frottement moyen sur une plaque de dimensions  $x_c \times 1 \text{ m}$ , pour trois valeurs de  $U_\infty$ .

De même, nous avons reporté ces paramètres sur le tableau 4.3 pour un écoulement d'eau à 20°C ( $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ ), correspondant aux mêmes valeurs de  $U_\infty$ .

*On voit que la longueur de l'écoulement laminaire est de l'ordre du mètre pour l'air, et de quelques cm pour l'eau. Les épaisseurs de couches limites sont de l'ordre du cm pour l'air et du mm pour l'eau.*

Quant aux forces de frottement, elles peuvent paraître dérisoires avec l'air, mais elles croissent sensiblement dès que l'obstacle n'est plus parallèle à l'écoulement, et surtout dès qu'on aborde la zone turbulente (Ch. 5). En outre, c'est l'occasion de préciser que la résistance  $\mathbf{T}$  d'un obstacle dans un écoulement, appelée « traînée », est la somme de deux termes : la traînée de frottement  $\mathbf{T}_f$  (§ 4.4.3) dont il est question ici, et la traînée de pression  $\mathbf{T}_p$ . De la même façon que précédemment, à partir de  $\mathbf{T}$  on définit un coefficient de résistance  $C_X$ , somme du coefficient de traînée  $C_{Xf}$  et d'un coefficient de pression  $C_{Xp}$ .

Or, en général, le coefficient de pression est nettement plus élevé que le coefficient de frottement. Le cas des automobiles donne un repère facile à retenir : leur  $C_X$  est de l'ordre de 0,3. Dans cette valeur, 85 à 90% correspondent à la traînée de pression, le reste étant dû à la traînée de frottement, avec une valeur absolue beaucoup plus élevée que dans l'exemple numérique ci-dessus, du fait en particulier que l'écoulement est turbulent (voir aussi § 4.7.1).

TABLEAU 4.2. – Écoulement d'air sur une plaque plane ( $T = 20\text{ °C}$ ,  $p = 1\text{ bar}$ )

$U_\infty$	3 m/s (10,8 km/h)	10 m/s (36 km/h)	30 m/s (108 km/h)
$x_c$ (m)	2,5	0,75	0,25
$\delta(x_c)$ (m) d'après (4.44)	$1,76 \cdot 10^{-2}$	$0,53 \cdot 10^{-2}$	$0,176 \cdot 10^{-2}$
$\bar{\tau}_p$ (N/m <sup>2</sup> ) d'après (4.39) ( $L = x_c$ )	$10,14 \cdot 10^{-3}$	0,112	1,014
$\frac{1}{2} C_{xf}$ (4.50) ( $L = x_c$ )	$9,4 \cdot 10^{-4}$	$9,4 \cdot 10^{-4}$	$9,4 \cdot 10^{-4}$
$P_f/S$ (W/m <sup>2</sup> ) (4.52)	0,03	1,13	30,5

TABLEAU 4.3. – Écoulement d'eau sur une plaque plane ( $T = 20\text{ °C}$ )

$U_\infty$	3 m/s	10 m/s	30 m/s
$x_c$ (m)	0,166	0,05	0,0166
$\delta(x_c)$ (m)	$1,17 \cdot 10^{-3}$	$0,35 \cdot 10^{-3}$	$0,117 \cdot 10^{-3}$
$P_f/S$ (W/m <sup>2</sup> ) ( $L = x_c$ )	25,4	940	25 400

## 4.5. – EXTENSION DE LA MÉTHODE DIFFÉRENTIELLE

### 4.5.1. – Écoulements à gradient de vitesse extérieure

#### 4.5.1.1. – NOUVELLES CONDITIONS EXPÉRIMENTALES

Le caractère opérationnel de la méthode exposée au paragraphe 4.4 est obéré par la restriction (4.18) apportée aux conditions expérimentales et concernant  $U_\infty$ , supposée uniforme dans l'écoulement extérieur.

En fait, la méthode de Blasius est compatible avec un assouplissement de cette condition. Son usage en sera cependant rendu plus lourd.

Admettons donc maintenant que l'écoulement amont est toujours unidimensionnel, mais qu'il n'est plus uniforme :

$$U_{\infty} = U_{\infty}(x) \quad ; \quad \partial U_{\infty} / \partial y = 0 \quad (4.53)$$

et considérons que  $\nu \partial^2 U_{\infty} / \partial x^2$  est négligeable.

Dans ces conditions, l'équation de bilan local de quantité de mouvement (4.1) se réduit à :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\text{grad} \vec{V}} \cdot \rho \vec{V}} &= \overline{\rho \vec{g}} - \overline{\text{grad} p} \\ &= - \overline{\text{grad} p^*} \end{aligned} \quad (4.54)$$

c'est-à-dire, en incluant la condition (4.53) :

$$\rho U_{\infty} \frac{\partial U_{\infty}}{\partial x} = - \frac{\partial p_{\infty}^*}{\partial x} \quad (4.55a)$$

Il y a donc maintenant un gradient de pression suivant  $x$  dans l'écoulement extérieur, et par conséquent dans la couche limite puisque nous avons en tout point (voir 4.18c) :

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\partial p_{\infty}^*}{\partial x} \quad (4.55b)$$

#### 4.5.1.2. – ÉQUATION DE BLASIUS GÉNÉRALISÉE

Vu les relations (4.55), l'équation de quantité de mouvement à résoudre (4.12) s'écrit donc à présent :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = U_{\infty} \frac{\partial U_{\infty}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (4.56)$$

et elle va remplacer (4.21b).

Le calcul est identique à celui du paragraphe 4.4.2.1 et il est inutile de le reprendre. Nous signalons simplement les quelques différences dues au fait que  $U_{\infty} = U_{\infty}(x)$ .

La fonction de courant garde la même forme :

$$\Psi(x, y) = U_{\infty}(x) \beta(x) F(\eta) \quad (4.57)$$

mais ici on a :

$$\begin{aligned} \clubsuit \quad V &= - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = - \left\{ F \frac{d}{dx} (U_{\infty} \beta) + U_{\infty} \beta \frac{\partial F}{\partial x} \right\} \\ &= - \left\{ F U_{\infty} \frac{d\beta}{dx} + F \beta \frac{dU_{\infty}}{dx} - U_{\infty} \beta F' \frac{\eta}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \right\} \end{aligned} \quad (4.58a)$$

soit, à la place de (4.26) :

$$V = - F \beta \frac{dU_{\infty}}{dx} + U_{\infty} \frac{d\beta}{dx} (\eta F' - F) \quad (4.58b)$$

$$\diamond \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU_{\infty}}{dx} F' + U_{\infty} \frac{dF'}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

et donc, à la place de (4.27) :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU_{\infty}}{dx} F' - U_{\infty} F'' \frac{\eta}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \quad (4.58c)$$

On reporte ensuite (4.58b et c) dans (4.56), en compagnie de (4.28 et 29), inchangées.

♥ L'équation (4.30) est ainsi remplacée par :

$$F''' + \frac{\beta}{\nu} \frac{d(U_\infty \beta)}{dx} F F'' + \frac{\beta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} (1 - F'^2) = 0 \quad (4.59)$$

N'oublions pas que notre calcul repose toujours sur l'hypothèse (4.20) d'auto-similarité des profils de vitesse  $U$ , et implique donc que la fonction  $F$  solution de (4.59) ne dépende que de  $\eta$ . Les solutions satisfaisant à cette condition correspondent au cas où sont constants les deux coefficients sans dimension qui figurent dans l'équation :

$$\sigma = \frac{\beta}{\nu} \frac{d(U_\infty \beta)}{dx} = cte \quad (4.60a)$$

$$m = \frac{\beta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} = cte \quad (4.60b)$$

La nouvelle écriture de (4.59) est donc :

$$F''' + \sigma F F'' + m(1 - F'^2) = 0 \quad (4.61)$$

connue comme « *équation de Blasius généralisée* ».

#### 4.5.1.3. – ÉCOULEMENTS COMPATIBLES AVEC LA CONDITION D'AUTO-SIMILARITÉ

Le fait de déclarer que  $\sigma$  et  $m$  sont des constantes revient à opérer une restriction sur les écoulements décrits par l'équation (4.59). On doit donc se poser la question : quels écoulements sont compatibles avec les conditions (4.60) ?

Décomposons tout d'abord  $\sigma$  (4.60a) et écrivons :

$$\sigma = \frac{\beta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{1}{2} \frac{U_\infty}{\nu} \frac{d\beta^2}{dx}$$

soit :

$$\sigma = m + n/2 \quad (4.62a)$$

avec  $m$  donné par (4.60b) et :

$$n = \frac{U_\infty}{\nu} \frac{d\beta^2}{dx} \quad (4.62b)$$

Des conditions  $m = cte$  et  $\sigma = cte$  (d'où  $n = cte$ ) on doit pouvoir déduire les deux inconnues que sont la longueur caractéristique  $\beta(x)$  et la loi de vitesse extérieure  $U_\infty(x)$ .

Pour cela, posons :

$$\beta^2(x) = B(x) \quad (4.62c)$$

et divisons membre à membre (4.60b) et (4.62b) :

$$\frac{dU_\infty}{U_\infty} = \frac{m}{n} \frac{dB}{B} \quad (4.62d)$$

soit :

$$U_\infty = KB^{m/n}, \quad K = cte \quad (4.63a)$$

d'où, en dérivant par rapport à  $x$  :

$$\frac{dU_\infty}{dx} = K \frac{m}{n} B^{\frac{n}{m}-1} \frac{dB}{dx}$$

On peut éliminer  $dU_\infty/dx$  entre cette dernière relation et (4.60b / 4.62c), ce qui donne :

$$B^{\frac{m}{n}} \frac{dB}{dx} = \nu \frac{n}{K} \quad \text{soit : } B^{\frac{m}{n}+1} = \nu \frac{n}{K} (x + x_0)$$

où  $x_0$  et  $K$  sont des constantes. On obtient donc finalement :

$$\beta(x) = B^{1/2} = \left\{ \nu \frac{n}{K} (x + x_0) \right\}^{\frac{n}{2(n+m)}} \quad (4.63b)$$

Pour avoir  $U_\infty(x)$ , revenons à (4.63a) en remplaçant  $B$  par son expression et en regroupant les termes :

$$U_\infty(x) = K^{\frac{n-m}{n+m}} (\nu n)^{\frac{m}{m+n}} (x + x_0)^{\frac{m}{m+n}} \quad (4.63c)$$

La loi de vitesse  $U_\infty(x)$  qui caractérise la classe des écoulements compatibles avec la condition d'auto-similarité est donc de la forme :

$$U_\infty = cte (x + x_0)^\alpha \quad (4.63d)$$

avec :

$$\alpha = m/(m+n) = cte \quad (4.63e)$$

*Le cas  $\alpha > 0$  représente un écoulement accéléré et le cas  $\alpha < 0$  un écoulement ralenti.*

#### 4.5.1.4. – ÉQUATION DE FALKNER – SKAN

♣ La donnée de  $\alpha$  suffit à caractériser la forme de  $U_\infty(x)$  ; or il existe une infinité de couples  $m, n$  pour lesquels  $m/(m+n) = \alpha$  ; il nous est donc loisible de fixer arbitrairement une relation entre ces trois paramètres.

Choisissons par exemple :

$$\alpha = m, \text{ d'où } n = 1 - m \quad (4.64a)$$

c'est-à-dire, vu (4.62a) :

$$\sigma = m + \frac{1-m}{2} = \frac{m+1}{2} \quad (4.64b)$$

et l'équation de Blasius généralisée (4.61) prend la forme suivante, dite « équation de Falkner-Skan » :

$$\boxed{F''' + \frac{m+1}{2} F F'' + m(1 - F'^2) = 0} \quad (4.65)$$

On retrouve bien entendu l'équation de Blasius en faisant  $m = 0$ , c'est-à-dire  $U_\infty = cte$ .

◆ Les constantes  $K$ ,  $x_0$  et  $m$  caractérisent le problème traité ; leur donnée définit complètement la loi de vitesse extérieure  $U_\infty(x)$  dont la forme générale est donc finalement, d'après (4.63 c) et (4.64a) :

$$U_\infty(x) = K^{1-2m} [v(1-m)]^m (x+x_0)^m$$

$$\boxed{U_\infty(x) = C(x+x_0)^m} \quad (4.66a)$$



Si nous avons fixé  $\sigma = 1/2$ , comme dans la solution de Blasius, nous aurions (cf. 4.62a et 4.63e)  $\alpha = m/(1-m)$  au lieu de  $\alpha = m$ , et l'équation à résoudre serait :

$$2 F''' + F F'' + 2m(1-F'^2) = 0$$

On obtiendrait des solutions numériques pour  $F$ ,  $F'$ ,  $F''$  différentes de celles données par (4.65), mais le résultat final serait évidemment le même pour  $U$ ,  $V$ ,  $\tau_p$  etc.

♥ Revenant à la formulation classique (4.64), l'expression (4.63b) du paramètre  $\beta(x)$  devient :

$$\beta(x) = \left\{ \frac{v(1-m)}{K} (x+x_0) \right\}^{\frac{1-m}{2}} \quad (4.66b)$$

Elle pourra servir en particulier à calculer l'épaisseur de couche limite :

$$\delta(x) = \eta_\delta \beta(x) \quad (4.66c)$$

où  $\eta_\delta$  est déterminé par :  $F'(\eta_\delta) = 0,99$  (§ 4.4.4).

En observant que  $(x+x_0)^{(1-m)/2} = (x+x_0)^{1/2} (x+x_0)^{-m/2}$ , et en tirant  $(x+x_0)^{-m/2}$  de (4.66a), on peut aussi écrire  $\beta(x)$  en fonction de  $U_\infty(x)$  :

$$\beta(x) = [v(1-m)]^{1/2} K^{-m/2} \left( \frac{x+x_0}{U_\infty(x)} \right)^{1/2} \quad (4.66d)$$

Sous cette forme,  $\beta(x)$  ressemble à l'expression utilisée dans la solution de Blasius. D'ailleurs, en faisant  $m = 0$  (soit  $U_\infty = cte$ ) et  $x_0 = 0$ , on retrouve bien :  $\beta(x) = (vx/U_\infty)^{1/2}$  conformément à (4.34a).

A noter enfin que dans le cas particulier  $m = 1$  (loi de vitesse extérieure linéaire), on trouve par passage à la limite :  $\beta = 1 = cte$ .



#### GLOSE

Une remarque importante s'impose ici : au bord d'attaque de la plaque ( $x = 0$ ), l'épaisseur de la couche limite est forcément nulle. Cette condition n'est compatible avec (4.66b) que si  $x_0 = 0$ , d'où une loi de vitesse extérieure (4.66a) en  $Cx^m$ , ce qui en pratique serait assez peu réaliste, puisqu'en  $x = 0$ ,  $U_\infty$  devrait être soit nulle (pour  $m > 0$ ) soit infinie (pour  $m < 0$ ). D'ailleurs, avec  $m = 1$ , même en choisissant  $x_0 = 0$ , on trouve  $\delta(x) = cte$  puisque  $\beta = 1$ .

La difficulté vient en réalité du fait que la méthode utilisée ne décrit pas correctement ce qui se passe au voisinage de ce point singulier qu'est le bord d'attaque, où en particulier la similitude des profils de vitesse dans la couche limite n'est pas vérifiée. La validité des résultats donnés par (4.65) ou (4.66) n'est donc assurée qu'à partir d'une certaine distance du bord d'attaque, que l'on peut chiffrer très approximativement à  $10^{-2} x_c$ .

Pour conclure, il faut signaler que traditionnellement on choisit dès le départ pour  $\beta(x)$  la même forme analytique  $\{\nu x/U_\infty(x)\}^{1/2}$  que dans la solution de Blasius. Il s'agit d'une procédure trop réductrice, puisqu'elle revient à prendre  $x_0 = 0$ , et donc à amputer singulièrement la classe d'écoulements que l'on cherche à caractériser.

#### 4.5.1.5. - SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE FALKNER – SKAN

Avec une *paroi imperméable*, les conditions aux limites associées à l'équation différentielle (4.65) sont toujours les conditions (4.33) :

$$F'(0) = 0; \quad F(0) = 0; \quad F'(\infty) = 1$$

Cette équation fournit une classe de solutions exactes de la couche limite qui inclut la solution de Blasius. Pour chaque valeur de  $m$ , il existe une famille de solutions  $F(\eta)$ , mais celles-ci n'ont pas d'expression analytique ; elles doivent donc être obtenues au moyen d'une résolution numérique. Ensuite, connaissant  $\beta(x)$  (4.66 b ou d), on obtiendra aisément  $U$  (4.35a) et  $V$  (4.58b). L'allure des fonctions  $F'(\eta) = U/U_\infty$  est donnée sur la figure (4.5) pour diverses valeurs de  $m$ .

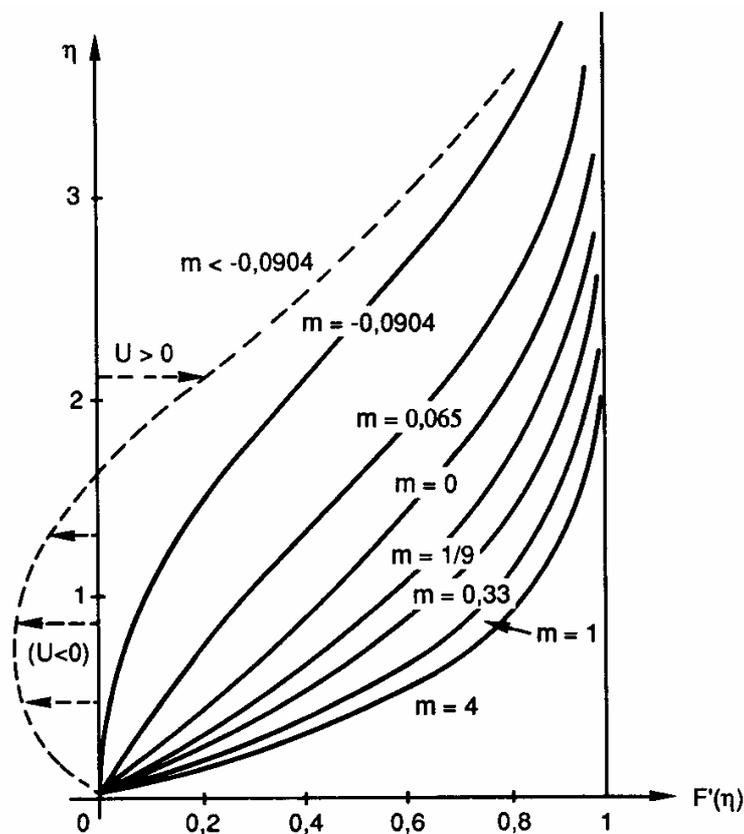


FIG. 4.5. – Solutions de l'équation de Falkner-Skan (distribution de vitesse dans la couche limite)

En ce qui concerne la contrainte de frottement à la paroi, on calculera toujours  $\tau_p$  à l'aide des expressions (4.36), avec  $\eta = y/\beta(x)$  :

$$\tau_p = \mu U_\infty(x) F''(0)/\beta(x) \quad (4.67)$$

d'où l'on déduira le coefficient de frottement local et, par intégration, la contrainte pariétale moyenne ainsi que la puissance dissipée.

Quelques valeurs de  $F''(0)$  en fonction du paramètre  $m$  sont données ci-dessous. La limitation du domaine utile de  $m$  ( $m > -0,0904$ ) sera justifiée au paragraphe suivant.

$m$	1	1/3	1/9	0	- 0,05	- 0,0904
$F''(0)$	1,232	0,757	0,512	0,332	0,213	0

On notera que pour  $m = -0,0904$ ,  $F''(0) = 0$  : le frottement est nul à la paroi.

#### 4.5.1.6. – CONSIDÉRATIONS PRATIQUES

♣ Les seuls écoulements strictement compatibles avec la condition d'auto-similarité sont donc ceux qui présentent une loi de vitesse en puissance de  $x$ . Ceci correspond à un gradient de pression extérieure :

$$\partial p_\infty^* / \partial x = -\rho U_\infty dU_\infty / dx \approx -m(x + x_0)^{2m-1}$$

Dans les faits, cette condition est un peu moins limitative qu'il n'y paraît, car on peut souvent approcher une loi  $U_\infty(x)$ , si celle-ci est monotone, par une fonction telle que (4.63d).

◆ Il y a une autre restriction à la méthode, qui porte sur la valeur de  $m$ . A priori, on peut donner à  $m$  des valeurs quelconques. Cependant, la résolution numérique de l'équation (4.65) montre que, au voisinage de la paroi :

$$m \leq -0,0904 \Rightarrow F'(\eta) = \frac{U}{U_\infty} \leq 0$$

L'écoulement près de la plaque est donc dirigé en sens inverse de l'écoulement général (courbe en pointillés, fig. 4.5).

Cette possibilité existe. On se trouve alors en présence d'une « zone de recirculation ». Le problème est qu'un tel type d'écoulement est très rarement maintenu tout le long de la plaque, car interviennent alors des phénomènes d'instabilité. En outre, lorsque que le gradient de vitesse à la paroi se rapproche de zéro, les hypothèses de la couche limite commencent à être mises en défaut. C'est pourquoi on préfère se cantonner aux solutions obtenues avec  $m > -0,0904$ .

Plus généralement, un écoulement pariétal rétrograde correspond presque toujours à une zone de recirculation, précédée d'une évolution progressive des profils de vitesse, et généralement suivie d'un décollement de la couche limite (fig. 4.6). Alors, l'hypothèse d'auto-similarité est totalement caduque. Le phénomène s'observe particulièrement sur des surfaces courbes, où  $m$  varie fortement avec  $x$ .

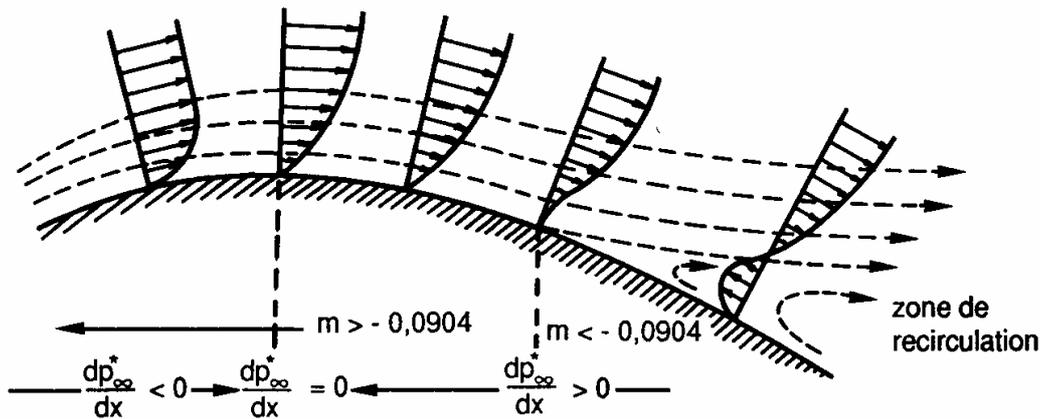


FIG. 4.6. – Exemple d'écoulement avec zone de recirculation  
(d'après R. Comolet)

#### 4.5.2. – Écoulements sur une paroi perméable

♣ Nous n'avons considéré jusqu'à présent que le cas d'une plaque imperméable, où la composante  $V_p$  de la vitesse à la paroi est nulle (condition 4.33b). Cependant, dans certaines applications, on a  $V_p \neq 0$ . C'est ce qui se produit si l'on procède à une aspiration ( $V_p < 0$ ) ou à un soufflage ( $V_p > 0$ ) de la couche limite, pour des raisons d'ordre aérodynamique, ou par exemple dans une opération de séchage (le fluide qui traverse la paroi est alors la vapeur d'eau extraite du matériau à sécher).

##### ◆ Cas général : compatibilité avec la condition d'auto-similarité

Dans le cas le plus général ( $m \neq 0$ ), la composante  $V$  de la vitesse nous est fournie par (4.58b) :

$$V = -F\beta \frac{dU_{\infty}}{dx} + U_{\infty} \frac{d\beta}{dx} (\eta F' - F)$$

On a donc, à la paroi ( $\eta = 0$ ) :

$$V_p = -F(0) \left( \beta \frac{dU_{\infty}}{dx} + U_{\infty} \frac{d\beta}{dx} \right) = -F(0) \frac{d}{dx} (\beta U_{\infty}) \quad (4.68)$$

où  $\beta$  est donné par (4.66d), soit :

$$V_p = -F(0) Cte \frac{d}{dx} \{ (x + x_0) U_{\infty} \}^{1/2} \quad (4.69)$$

Mais l'hypothèse d'auto-similarité n'est respectée que si  $F(0)$  est indépendante de  $x$ . Sinon, les solutions  $F$  de l'équation de Falkner-Skan seront aussi fonction de  $x$ . Il existe donc une seule loi de soufflage  $V_p(x)$  compatible avec la méthode utilisée : cette loi est donnée par (4.69), où  $F(0)$  est une constante, et dépend donc de l'écoulement extérieur par l'intermédiaire de  $U_{\infty}(x)$ .

On voit que la condition exigée sur  $V_p$  est très contraignante, et n'autorise l'usage de l'équation de Falkner-Skan que dans des limites assez strictes. Une extension majeure de la méthode sera cependant réalisable (§ 4.5.4 et ch. 5).

♥ Cas particulier.

Si  $U_\infty = cte$  (solution de Blasius), on doit avoir :

$$V_p = -F(0) \nu^{1/2} \frac{1}{2} U_\infty^{1/2} x^{-1/2} \quad (4.70)$$

c'est-à-dire une loi de soufflage en  $x^{-1/2}$ .

Les solutions de l'équation de Falkner-Skan dépendent évidemment de la valeur choisie pour la condition à la limite  $F(0)$ . Nous donnons dans le tableau (4.4) les solutions  $F''(0)$  qui permettent de calculer la contrainte  $\tau_p$  à partir de (4.67), pour  $m = 0$  (soit  $U_\infty = cte$ ).

TABLEAU 4.4. – Solution  $F''(0)$  de l'équation de Falkner-Skan avec soufflage ou aspiration à la paroi ( $U_\infty = cte$ )

$F(0)$	$F''(0)$
2,0	1,168 12
1,50	0,944 49
1,0	0,728 28
0,5	0,522 54
0	0,332 06
– 0,250	0,244 92
– 0,500	0,165 07
– 0,750	0,094 33
– 1,000	0,036 18
– 1,238	0,000 17

### 4.5.3. – Écoulements sur une paroi inclinée ou sur un dièdre

#### 4.5.3.1. – DONNÉES DU PROBLÈME

Compte tenu des conditions restrictives qui les accompagnent, les exemples que nous avons traités peuvent paraître assez limités eu égard à la variété des conditions expérimentales réelles. Cette impression doit être nuancée car ils incluent en fait un peu plus de choses qu'il n'y paraît à première vue. Ainsi, nous allons montrer que le cas d'une paroi inclinée par rapport à la direction de l'écoulement extérieur entre dans les applications de l'équation de Falkner-Skan.

Soit donc une plaque plane faisant avec la direction de l'écoulement amont un angle  $k\pi/2$ . Deux possibilités sont représentées sur la figure 4.7, selon que l'angle est rentrant ou sortant. L'axe  $Ox$  choisi est porté par la plaque, l'origine  $O$  étant placée au sommet de l'angle. La direction  $y$  est perpendiculaire à la paroi. On introduit enfin un système de coordonnées polaires  $\{r, \theta\}$ .

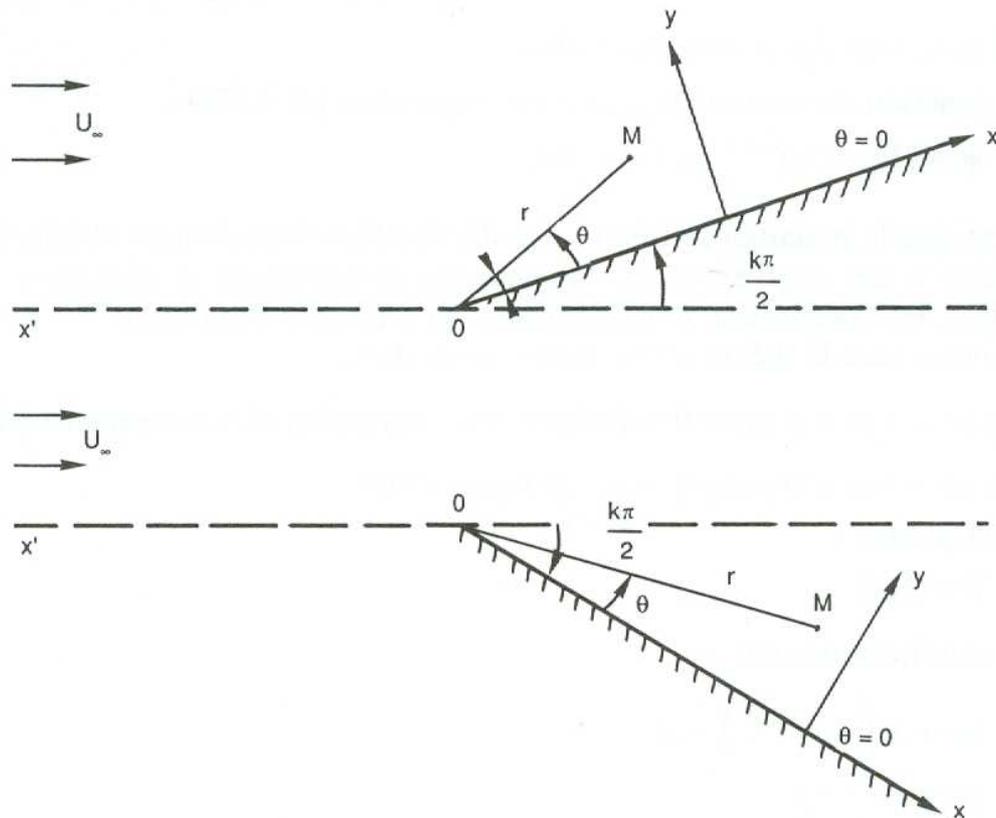


FIG. 4.7. – Écoulement sur une paroi inclinée. Données géométriques.

Nous allons maintenant procéder en deux étapes adaptées à la nouvelle géométrie du problème : tout d'abord la caractérisation du champ de vitesse extérieure  $U_\infty(x)$ , qui sera obtenue en considérant un écoulement de fluide non visqueux ; puis la prise en compte de la viscosité, et donc d'une couche limite le long de la paroi.

#### 4.5.3.2. – CHAMP DES VITESSES POUR UN FLUIDE NON VISQUEUX

##### ♣ Influence de la géométrie sur les trajectoires

Commençons par étudier l'écoulement d'un fluide non visqueux, donc sans condition d'adhérence à la paroi, et par conséquent en l'absence de couche limite. Le champ de vitesse est alors donné par la cinématique des fluides (discipline qui se borne à décrire le mouvement).

L'inclinaison de la paroi va évidemment dévier l'écoulement amont. En particulier, une particule fluide très proche de la ligne  $x'Ox$  devra « prendre le virage » en O. Sa trajectoire sera donc confondue avec la ligne  $x'Ox$ .

Cette propriété constitue une condition à la limite, qui peut être très naturellement prise en compte au moyen de la fonction de courant  $\Psi$ . Rappelons en effet que dans un écoulement permanent, les trajectoires sont les lignes de courant, c'est-à-dire les courbes  $\Psi = cte$ . Cette notion de trajectoire est d'ailleurs intuitive, alors que le concept de ligne de courant reste plus abstrait. Mais pour diverses raisons, on utilise presque exclusivement l'expression « ligne de courant » dans le vocabulaire de la mécanique des fluides.

◆ *Potentiel complexe*

Pour utiliser la fonction de courant dans le sens indiqué ci-dessus, le moyen le plus approprié est de recourir à des fonctions de nombres complexes.

Soit la variable complexe :

$$z = x + i y = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (4.71a)$$

Une fonction de  $z$  sera de la forme :

$$f(z) = A(x, y) + i B(x, y) \quad (4.71b)$$

Introduisons la fonction  $\varphi(x, y)$ , appelée « *potentiel des vitesses* », définie par :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad (4.72a)$$

c'est-à-dire :

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial x} ; \quad V = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (4.72b)$$

et rappelons en même temps les propriétés de  $\Psi$ :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y} ; \quad V = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.72c)$$

De la sorte :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.72d)$$

Considérons ensuite la fonction suivante :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i \Psi(x, y) \quad (4.73a)$$

Sa dérivée s'écrit :

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dy}{dx + i dy} = \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx}}{1 + i \frac{dy}{dx}}$$

D'après les caractéristiques (4.72) de  $\varphi$  et  $\Psi$ , on peut vérifier que le dernier terme possède une propriété remarquable :

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y}}{i} = U - i V$$

d'où :

$$\frac{df(z)}{dz} = U - i V \quad (4.73b)$$

Autrement dit, un calcul analytique dans l'espace  $\{\varphi, \Psi\}$  pourra être transposé dans l'espace  $\{U, V\}$  et permettra donc de revenir au champ de vitesse.

♥ *Application à la paroi inclinée*

Pour que cet écoulement puisse être traité par l'équation de Falkner-Skan, il faut qu'il soit compatible avec la condition d'auto-similarité des vitesses  $U$ , c'est-à-dire tel que  $U_\infty = C(x + x_0)^m$  (4.66a). On doit donc rechercher le potentiel complexe  $f(z)$  correspondant.

En tâtonnant un peu, on arrive assez vite à la formule :

$$\begin{aligned} f(z) &= A(z + z_0)^{m+1} \\ &= A(r + r_0)^{m+1} \{ \cos(m+1)\theta + i \sin(m+1)\theta \} \end{aligned} \quad (4.74a)$$

où  $A$  et  $r_0$  sont des constantes réelles.

C'est la fonction de courant  $\Psi$  qui nous intéresse, c'est-à-dire d'après (4.73a) la partie imaginaire de  $f(z)$ , qui a pour expression :

$$\Psi = A(r + r_0)^{m+1} \sin(m+1)\theta \quad (4.74b)$$

Comme il a été dit plus haut, pour que le potentiel complexe  $f(z)$  décrive bien l'écoulement étudié, il doit satisfaire à des conditions aux limites, qui caractérisent la géométrie de la frontière. En l'occurrence, nous devons avoir ici une trajectoire  $\Psi = cte$  confondue avec le dièdre  $x'Ox$ . Comme la fonction de courant est définie à une constante près, la valeur choisie est arbitraire, et le plus simple est de prendre  $\Psi = 0$ . Nous avons donc :

a)  $\sin(m+1)\theta = 0$  pour  $\theta = 0$  (ligne  $Ox$ ) : condition identiquement vérifiée.

b)  $\sin(m+1)\theta = 0$  pour  $\theta = \pi - k \frac{\pi}{2}$  (ligne  $x'O$ ) soit :

$$(m+1) \left( \pi - k \frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

$$\boxed{m = \frac{k}{2-k}} \quad (4.75)$$

Dans ces circonstances, la dérivée  $df(z)/dz$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{df(z)}{dz} &= A(m+1)(z + z_0)^m \\ &= A(m+1)(r + r_0)^m (\cos m\theta + i \sin m\theta) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Les composantes de la vitesse ont ainsi pour valeur, d'après (4.73b) :

$$\left. \begin{aligned} U_\infty &= A(m+1)(r + r_0)^m \cos m\theta \\ V_\infty &= -A(m+1)(r + r_0)^m \sin m\theta \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

En particulier, au voisinage de la paroi  $Ox$  (où  $\theta$  est petit, donc  $r \approx x$ ), on a :

$$\frac{V_\infty}{U_\infty} = -\frac{\sin m\theta}{\cos m\theta} \approx -m\theta$$

Sachant de plus, grâce à (4.75), que  $m \leq 1$  si  $k \leq 1$  (soit :  $k\pi/2 \leq \pi/2$ ), on peut admettre, près de la surface :

$$\begin{aligned} |V_\infty| &\ll U_\infty \\ U_\infty &\approx A(m+1)(x + x_0)^m \end{aligned} \quad (4.78)$$

#### ♠ Écoulement sur un dièdre

Le développement précédent s'applique sans modification à l'écoulement sur un dièdre. En effet, cette disposition constitue une simple extension, par symétrie relativement à l'axe  $x'O$ , de l'écoulement sur une paroi inclinée d'un angle  $k\pi/2 > 0$  (fig. 4.8).

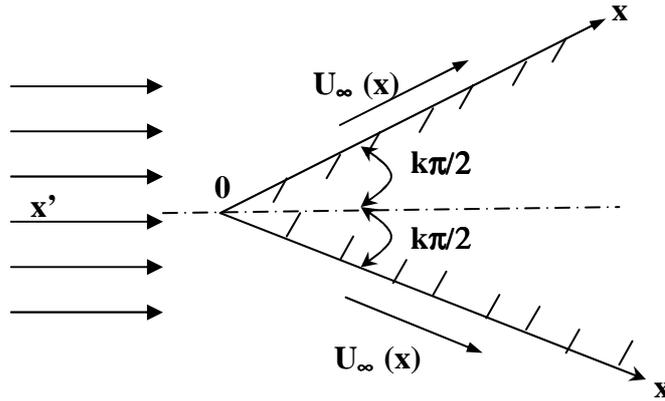


FIG. 4.8. – Écoulement sur les deux faces d'un dièdre

#### 4.5.3.4. – MISE EN ŒUVRE DE LA MÉTHODE

Revenons maintenant à un écoulement de fluide visqueux. Une couche limite laminaire se développe sur la paroi  $Ox$ . Mais vu les ordres de grandeur que nous avons obtenus au paragraphe 4.4.6, nous sommes certains que cette couche limite reste confinée dans une zone où l'angle  $\theta$  est très petit, et l'on peut donc admettre comme loi de vitesse extérieure l'expression (4.78).

Ainsi, nous nous retrouvons dans un cas d'écoulement compatible avec l'hypothèse d'auto-similarité (voir 4.63d). Les composantes  $U$  et  $V$  de la vitesse dans la couche limite sont alors solutions de l'équation de Falkner-Skan (4.65) dans laquelle on fait, d'après (4.75) :  $m = k / (2 - k)$ .

♪ Si, en établissant l'équation de Falkner-Skan, nous avons choisi  $\sigma = 1/2$  (voir §.4.5.1.4 ♦), alors nous aurions ici  $m = 2 / (2 - k)$ .

#### 4.5.4. – Généralisation

Dans la présentation qui vient d'en être donnée, la méthode différentielle repose en particulier sur l'hypothèse d'auto-similarité des profils de vitesse.

Cependant, au prix d'une complexification raisonnable, il est possible de se libérer de la condition précédente, en gardant le même cadre méthodologique, et en conservant le bénéfice qui est d'avoir à résoudre une seule équation différentielle en  $F$ , au lieu d'un système couplé de deux équations aux dérivées partielles. Cette généralisation très féconde bénéficiera en premier lieu aux écoulements turbulents. Elle est présentée au chapitre 5 à propos des écoulements turbulents externes (couches limites et jets plans), dans le cadre du modèle pseudo-laminaire ; son adaptation au cas laminaire est obtenue simplement en écrivant que la viscosité turbulente  $\nu_t$  est nulle.

Enfin, les écoulements externes ne sont évidemment pas limités au strict cadre bidimensionnel plan, et ils peuvent en particulier se développer dans des géométries axisymétriques. La transposition de l'équation de Falkner-Skan en coordonnées cylindriques sera effectuée avec l'étude du jet rond turbulent (Ch. 5).

## 4.6. – MÉTHODE DU BILAN SEMI - INTÉGRAL

### 4.6.1. – Objectifs

L'équation de Falkner-Skan est simple, commode, et elle a de surcroît le mérite de donner des solutions exactes. Cependant, la méthode différentielle comporte deux inconvénients : même sous sa forme la plus générale, elle s'appuie sur les approximations de la couche limite ; et, sauf dans son acception la plus restreinte (solution de Blasius), elle se prête mal au calcul analytique.



Il est tout de même possible de lever ces deux hypothèses en renonçant à la description locale du champ de vitesse au profit d'une description semi-intégrale basée sur le bilan de quantité de mouvement, qui fait intervenir des grandeurs moyennes suivant la direction  $y$ , le problème étant ainsi rendu unidimensionnel en  $x$ . Au bout du compte on n'aura plus là encore qu'une seule équation différentielle à résoudre.



### 4.6.2. – Principe de la méthode

#### ♣ *Domaine d'intégration*

Il s'agit donc d'écrire un bilan de quantité de mouvement sur un domaine  $\mathcal{D}$  adéquat. A partir du bilan général (1.25) et du paragraphe 1.3.3.1, le bilan intégral de quantité de mouvement s'écrit, en régime permanent, dans le champ de pesanteur :

$$\int_S \rho \vec{V} \otimes \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \int_D \rho \vec{g} \, d\tau + \int_S \vec{T} \, dS \quad (4.79)$$

Le domaine d'étude  $\mathcal{D}$  choisi est constitué par une tranche de fluide située entre deux plans  $AB$  et  $CD$  d'abscisses  $x$  et  $x + dx$ , et de longueur unité suivant la direction  $z$  perpendiculaire au plan  $xy$ . Dans la direction  $y$ , il s'étend depuis la plaque jusqu'à une ordonnée  $Y$  grande par rapport à l'épaisseur de la couche limite (fig. 4.9). Les normales aux surfaces  $AB$ ,  $AC$  et  $CD$ , représentées sur la figure, sont dirigées vers l'extérieur de  $\mathcal{D}$ .

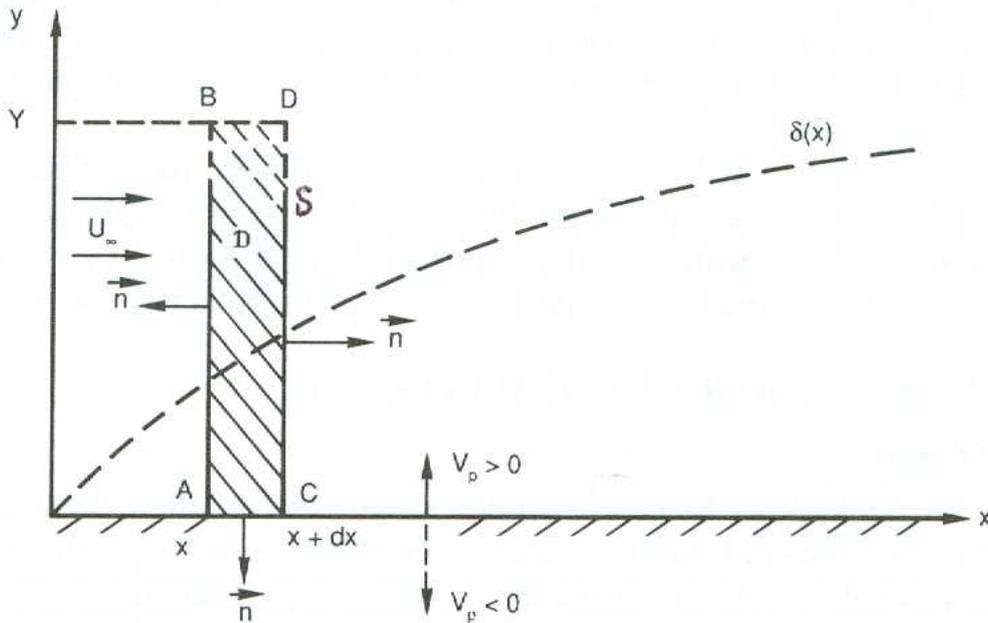


FIG. 4.9. – Domaine d'intégration pour les bilans de masse et de quantité de mouvement.

◆ *Hypothèses*

1) - Aucune hypothèse n'est faite sur une éventuelle similitude des profils de vitesse, ni sur la vitesse  $V_p$  à la paroi qui peut être différente de zéro (paroi poreuse) et fonction quelconque de  $x$ .

2) – Nous admettrons encore la validité des relations (4.18c) et (4.55) :

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\partial p_\infty^*}{\partial x} = -\rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \quad (4.81a)$$

Cette assertion appelle deux remarques :

! Tout d'abord, on doit insister sur le fait que la définition (1.37a) de la pression motrice  $p^*$ , à savoir

$$\overrightarrow{\text{grad}} p^* = \overrightarrow{\text{grad}} p - \rho \vec{g}$$

n'est pas liée à la condition  $\rho = cte$ . Elle s'applique tout aussi bien aux écoulements à masse volumique variable.

!! Mais les relations (4.81a) ont été établies pour une couche limite de fluide isochore. Malgré tout, elles restent bien vérifiées tant que le gradient de masse volumique n'est pas trop grand.

3) – Enfin, dans le cours de la démonstration, nous serons amenés à introduire une ultime simplification, à savoir :

$$\mu \frac{\partial U}{\partial x} \ll p \quad (4.81b)$$

Cette restriction est faible puisqu'elle n'exclut que les écoulements à grand gradient de vitesse (tuyères) ou à basse pression (ambiance raréfiée).

### 4.6.3. – Équation intégrro-différentielle de l'écoulement.

♣ Il s'agit maintenant d'écrire le bilan de quantité de mouvement sur le domaine  $\mathcal{D}$ , et d'en extraire une relation scalaire, ce qui se fera tout naturellement en projetant sur l'axe des  $x$ .

Sauf qu'il y a un problème : nous avons voulu généraliser le modèle en incluant un débit à la paroi. Mais la projection sur la direction  $x$  va faire disparaître ce terme.

Une astuce pour tourner la difficulté consiste à faire appel au bilan de masse (1.26) :

$$\int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (4.82a)$$

Pour rendre ce terme homogène à une quantité de mouvement, nous allons le multiplier par une vitesse de référence qui sera tout simplement la vitesse  $\vec{V}_\infty$  de l'écoulement extérieur :

$$\vec{V}_\infty \int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (4.82b)$$

Nous allons maintenant combiner cette relation et le bilan de quantité de mouvement en soustrayant membre à membre les équations (4.79) et (4.82b) :

$$\int_S \rho \vec{V} \otimes \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS - \vec{V}_\infty \int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \int_D \rho \vec{g} \, d\tau + \int_S \vec{T} \, dS \quad (4.83)$$

Nous avons en particulier (fig. 4.9) :

$$\left. \begin{aligned} - \text{sur } AB : \vec{V} \cdot \vec{n} &= -U_x \\ - \text{sur } CD : \vec{V} \cdot \vec{n} &= U_{x+dx} \\ - \text{sur } AC : \rho \vec{V} \cdot \vec{n} &= -\rho_p V_p(x) \quad (\text{loi de soufflage à la paroi}) \end{aligned} \right\} \quad (4.84)$$

Projetons maintenant l'équation vectorielle (4.83) sur l'axe des  $x$ , en notant que  $T_x$ ,  $U_\infty$  et  $g_x$  sont les composantes suivant  $x$  des vecteurs  $\vec{T}$ ,  $\vec{V}_\infty$  et  $\vec{g}$ .

On voit que la contribution de la surface  $BD$  est nulle ( $\partial U_\infty / \partial y = 0$  donc pas de cisaillement ; force de pression perpendiculaire à la direction  $x$ ) et il reste dans (4.83) :

$$\begin{aligned}
& - \int_{AB} (\rho U^2)_x dS + \int_{CD} (\rho U^2)_{x+dx} dS \\
& - \left\{ -U_\infty \int_{AB} (\rho U)_x dS + U_\infty \int_{CD} (\rho U)_{x+dx} dS - U_\infty \rho_p V_p dx \right\} \\
& = \int_D \rho g_x d\tau + \int_S T_x dS
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Au chapitre 1 (§ 1.2.5), nous avons traité le calcul de  $\vec{T}$  correspondant à l'exemple présent. En tenant compte du sens des normales, les composantes s'écrivent ici :

$$\begin{aligned}
- \text{ sur } AB : & \quad (T_x)_x = p_x - 2\mu \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_x \\
- \text{ sur } CD : & \quad (T_x)_{x+dx} = -p_{x+dx} + 2\mu \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x+dx} \\
- \text{ sur la paroi } AC : & \quad T_{px} = -\tau_p = -\mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}
\end{aligned} \tag{4.86}$$

soit, avec l'hypothèse (4.81b) :

$$\left. \begin{aligned}
(T_x)_x &= p_x \\
(T_x)_{x+dx} &= -p_{x+dx} \\
\int_{AC} T_{px} dS &= -\tau_p dx
\end{aligned} \right\} \tag{4.87}$$

◆ Reportons ces expressions dans (4.85). Après division par  $dx$ , faisons tendre  $dx$  vers zéro ; il vient, si l'on réunit  $p$  et  $\rho g_x$  dans la pression motrice  $p^*$  :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \int_0^Y \rho U^2 dy - U_\infty \frac{d}{dx} \int_0^Y \rho U dy &= - \frac{d}{dx} \int_0^Y p^* dy - U_\infty \rho_p V_p - \tau_p \\
(a) & \qquad (b) & \qquad (c)
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Nous allons arranger un peu les termes (a), (b) et (c) comme suit, en profitant du fait que nous avons ici le droit de permuter les opérateurs  $\int$  et  $\frac{d}{dx}$ .

Terme (a) : multiplions et divisons par  $\rho_\infty U_\infty^2$ , qui est indépendant de  $y$  :

$$\begin{aligned}
(a) &= \frac{d}{dx} \int_0^Y \rho_\infty U_\infty^2 \frac{\rho U^2}{\rho_\infty U_\infty^2} dy \\
&= \rho_\infty U_\infty^2 \frac{d}{dx} \int_0^Y \frac{\rho U^2}{\rho_\infty U_\infty^2} dy + \frac{d}{dx} (\rho_\infty U_\infty^2) \int_0^Y \frac{\rho U^2}{\rho_\infty U_\infty^2} dy
\end{aligned}$$

soit, en développant le dernier terme :

$$(a) = \rho_\infty U_\infty^2 \frac{d}{dx} \int_0^Y \frac{\rho U^2}{\rho_\infty U_\infty^2} dy + \left( U_\infty^2 \frac{d\rho_\infty}{dx} + 2\rho_\infty U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \right) \int_0^Y \frac{\rho U^2}{\rho_\infty U_\infty^2} dy \tag{4.89a}$$

Terme (b) : on multiplie et on divise par  $\rho_\infty U_\infty$  :

$$(b) = U_\infty \frac{d}{dx} \int_0^Y \rho_\infty U_\infty \frac{\rho U}{\rho_\infty U_\infty} dy$$

$$(b) = \rho_\infty U_\infty^2 \frac{d}{dx} \int_0^Y \frac{\rho U}{\rho_\infty U_\infty} dy + \left( U_\infty^2 \frac{d\rho_\infty}{dx} + \rho_\infty U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \right) \int_0^Y \frac{\rho U}{\rho_\infty U_\infty} dy \quad (4.89b)$$

Terme (c) : servons-nous de l'hypothèse (4.81a) :

$$(c) = - \frac{d}{dx} \int_0^Y p^* dy = \rho_\infty U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \int_0^Y dy \quad (4.89c)$$



Avec ces expressions développées de (a), (b), (c), (4.88) s'écrit :

$$\rho U_\infty^2 \frac{d}{dx} \int_0^Y \left( - \frac{\rho U^2}{\rho_\infty U_\infty^2} + \frac{\rho U}{\rho_\infty U_\infty} \right) dy$$

$$+ \rho_\infty U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \int_0^Y \left( - 2 \frac{\rho U^2}{\rho_\infty U_\infty^2} + \frac{\rho U}{\rho_\infty U_\infty} + 1 \right) dy \quad (4.90)$$

$$+ U_\infty^2 \frac{d\rho_\infty}{dx} \int_0^Y \left( - \frac{\rho U^2}{\rho_\infty U_\infty^2} + \frac{\rho U}{\rho_\infty U_\infty} \right) dy = \tau_p + U_\infty \rho_p V_p$$

La borne  $Y$  peut être choisie arbitrairement grande. Sous réserve que les intégrales convergent, faisons  $Y \rightarrow \infty$  dans l'équation précédente et introduisons les grandeurs :

$$\delta_1(x) = \int_0^\infty \left( 1 - \frac{\rho U}{\rho_\infty U_\infty} \right) dy \quad (4.91)$$

$$\delta_2(x) = \int_0^\infty \left( \frac{\rho U}{\rho_\infty U_\infty} - \frac{\rho U^2}{\rho_\infty U_\infty^2} \right) dy = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_\infty U_\infty} \left( 1 - \frac{U}{U_\infty} \right) dy \quad (4.92)$$



$\delta_1$  est appelée *épaisseur de déplacement*, et  $\delta_2$  *épaisseur de quantité de mouvement*. Elles sont construites de telle sorte que leur noyau  $\rightarrow 0$  lorsque  $y \rightarrow \infty$  (contrairement aux intégrales de 4.88), ce qui autorise leur convergence, et on peut vérifier que ce sont des grandeurs finies.



Alors, après un léger réarrangement du second terme, (4.90) s'exprime aisément en fonction de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  :

$$\tau_p = \rho_\infty U_\infty^2 \frac{d\delta_2}{dx} + \rho_\infty U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} (\delta_1 + 2 \delta_2) + \frac{U_\infty^2}{2} \frac{d\rho_\infty}{dx} \delta_2 - U_\infty \rho_p V_p \quad (4.93)$$

Nous aboutissons donc à une équation différentielle en  $x$  qui réalise une synthèse des bilans de masse et de quantité de mouvement, en reliant le frottement à la paroi et le champ de vitesse intégré dans la couche limite.

Lorsque l'écoulement est isochore ( $\rho_\infty = \rho_p = cte$ ) et la paroi imperméable ( $V_p = 0$ ), on retrouve l'équation de Karman (1921) :

$$\tau_p = \rho U_\infty^2 \frac{d\delta_2}{dx} + \rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} (\delta_1 + 2\delta_2) \quad (4.94a)$$

Celle-ci s'écrit encore, en faisant appel au coefficient de frottement  $1/2 C_f = \tau_p / \rho U_\infty^2$  :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_1 + 2\delta_2}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx} \quad (4.94b)$$

#### 4.6.4. – Interprétation de $\delta_1$ et $\delta_2$

Les deux grandeurs définies par (4.91) et (4.92) sont homogènes à des longueurs. Mais la manière la plus intéressante de les interpréter physiquement est de se référer à la notion de débit.

Bien évidemment, dans un écoulement externe, le débit est infini puisque le domaine fluide n'est pas borné. Cependant, en revenant à la définition de  $\delta_1$ , on observera que le produit  $\rho_\infty U_\infty \delta_1$  est fini, et qu'il représente la différence entre le débit de fluide parfait isochore et le débit réel. Autrement dit,  $\rho_\infty U_\infty \delta_1(x)$  est le *déficit de débit-masse* à l'abscisse  $x$  dû à l'existence de la couche limite, c'est-à-dire au freinage provoqué dans un fluide visqueux par la présence de la paroi.

Pour la même raison,  $\rho_\infty U_\infty^2 \delta_2(x)$  s'interprète comme un *déficit de débit de quantité de mouvement* à l'abscisse  $x$  dans un écoulement de couche limite.

#### 4.6.5. – Comment se servir de l'équation de Karman

Pratiquement, l'équation de Karman (4.94a) (ou sa forme généralisée 4.93) se présente comme une relation entre  $\tau_p$  (c'est-à-dire  $(\partial U / \partial y)_{y=0}$ ),  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , donc entre une caractéristique locale et des caractéristiques intégrales du champ des vitesses.

Il faut garder à l'esprit qu'on ne dispose pas d'une solution analytique générale exacte des équations de Navier-Stokes, et que tout le problème vient de là. Bien entendu, on ne connaît pas davantage  $\delta_1(x)$  et  $\delta_2(x)$ .

Cependant, si l'on arrive à établir une forme analytique approchée acceptable pour  $U(x,y)$ , l'approximation sera nettement plus satisfaisante sur  $\delta_1$  et  $\delta_2$  puisque les erreurs locales sur  $U$  seront intégrées, donc « moyennées ». On arrivera ainsi à des valeurs de  $\tau_p$  meilleures que si elles avaient été calculées directement à partir de la forme approchée  $U(x,y)$ .

*Pour tout ce qui suit, nous nous plaçons dans la situation où l'écoulement est isochore, mais avec possibilité de flux de masse à la paroi ( $V_p = V_p(x) \neq 0$ ). Cela revient à faire  $\rho_\infty = \rho_p = cte$  dans (4.93).*

La procédure se décompose ainsi :

♣ On introduit l'ordonnée adimensionnelle (rapportée à l'épaisseur de couche limite):

$$\boxed{y^+ = \frac{y}{\delta(x)}} \quad (4.95a)$$

et l'on se donne *a priori* une forme analytique pour  $U$ , à savoir :

$$\frac{U}{U_\infty} = f(y^+) \quad (4.95b)$$

On précise alors la fonction  $f(y^+)$  en écrivant des relations de compatibilité avec les conditions aux limites à la paroi et dans l'écoulement extérieur.

Notons bien que, en général,  $f(y^+)$  est aussi fonction de  $x$ , sauf s'il y a auto-similarité des vitesses, auquel cas elle ne dépend plus que de  $y^+$ .

◆ On calcule ensuite  $\delta_1(x)$  et  $\delta_2(x)$ , qui s'expriment en fonction de l'épaisseur de couche limite  $\delta(x)$ .

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy = \delta(x) \int_0^\infty (1 - f) dy^+ = C_1(x) \delta(x) \quad (4.96a)$$

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy = \delta(x) \int_0^\infty f(1 - f) dy^+ = C_2(x) \delta(x) \quad (4.96b)$$

En outre,  $\tau_p$  s'exprime aussi en fonction de  $\delta$ :

$$\tau_p = \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} \frac{dy^+}{dy}$$

c'est-à-dire, avec (4.95a et b) :

$$\tau_p = \mu U_\infty f'(0) / \delta \quad (4.96d)$$

♥ Dans l'équation (4.93) (où l'on a fait  $\rho = cte$ ), on remplace  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\tau_p$  par les expressions (4.96). On obtient de cette façon une équation différentielle en  $\delta(x)$  :

$$\frac{\mu}{\rho} f'(0) = U_\infty \delta \frac{d}{dx} (C_2 \delta) + (C_1 + 2C_2) \delta^2 \frac{dU_\infty}{dx} - V_p \delta \quad (4.97)$$

La plupart du temps, cette équation n'a pas de solution analytique, et doit être résolue numériquement.

♠ Connaissant maintenant  $\delta(x)$ , on remonte à  $U(x,y)$  et à  $\tau_p(x)$  par (4.95) et (4.96d).

## 4.6.6. – Résolution de l'équation de Karman : méthode de Pohlhausen

### 4.6.6.1. – PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Nous devons donc commencer par nous fixer une forme analytique pour la distribution de vitesse  $U(y^+)$ . Plusieurs possibilités peuvent être envisagées : polynôme, somme

d'exponentielles, etc. Il s'avère à l'usage que le polynôme de degré  $n$  présente la plus grande souplesse d'emploi. C'est le modèle qui a été retenu par Pohlhausen. On pose donc dans (4.95) :

$$\frac{U}{U_\infty} = f(y^+) = a_0 + a_1 y^+ + \dots + a_n y^{+n} \quad (4.98)$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont en général des fonctions de  $x$ . Quand nous écrivons  $f(y^+)$ , il faut sous-entendre en fait  $f(x, y^+)$ .

Lorsque les coefficients  $a_i$  sont des constantes, alors  $U/U_\infty$  ne dépend que de  $y^+$ , et l'on retrouve le cas particulier des écoulements auto-similaires, qui a fait l'objet des paragraphes 4.4 et 4.5. Il nous servira pour comparer les solutions des équations de Karman et de Blasius (§ 4.6.9).

De toute façon, les  $a_i$  sont déterminés à partir des conditions aux limites, qu'il s'agit maintenant de recenser.

#### 4.6.6.2. – CONDITIONS A LA PAROI

En  $y = 0$ , la fonction  $U$  doit satisfaire à deux conditions.

♣ Condition d'adhérence à la paroi

$$U(x, 0) = 0 \quad \text{d'où} \quad f(0) = 0 \quad (4.99a)$$

Il en découle que :

$$\boxed{a_0 = 0} \quad (4.99b)$$

◆ Condition sur la dérivée seconde

En incluant l'hypothèse (4.81a), dans le cas où  $\rho = \text{cte}$ , la première équation de Navier-Stokes (4.6) s'écrit :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (4.100a)$$

Sachant que  $U(x, 0) = 0 \quad \forall x$  d'où :  $\left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0$ , sur la paroi l'équation précédente se réduit à :

$$V_p(x) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y=0}$$

soit :

$$\boxed{\left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y=0} = - \frac{U_\infty}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{1}{\nu} V_p(x) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}} \quad (4.100b)$$

#### 4.6.6.3. – CONDITIONS À LA LISIÈRE DE LA COUCHE LIMITE

♣ Condition sur la vitesse

Dans une couche limite, quand on s'éloigne de la paroi, la vitesse tend asymptotiquement vers  $U_\infty$ . Comme le polynôme (4.98) n'a pas d'asymptote, on admet que en  $y \geq \delta$  (soit  $y^+ \geq 1$ ), la vitesse  $U$  est égale à la vitesse extérieure, donc en particulier :

$$\boxed{U(x, \delta) = U_\infty} \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(1) = 1 \quad (4.101a)$$

◆ Condition sur la dérivée d'ordre 1

Pour la même raison, on admet que la dérivée première de la vitesse est nulle en  $y \geq \delta$ , de sorte que le polynôme  $U(y)$  vienne tangenter l'ordonnée  $U_\infty$ :

$$\boxed{\left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0} \quad (4.101b)$$

♥ Condition sur la dérivée d'ordre 2

On peut ajouter aux deux conditions précédentes une contrainte analogue à (4.101b) sur la dérivée d'ordre 2, pour « adoucir » la pente de  $U(y)$  au voisinage de  $y = \delta$ :

$$\boxed{\left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y=\delta} = 0} \quad (4.101c)$$

#### 4.6.6.4. – CONSÉQUENCES ET REMARQUES

Au total, cela nous fait donc cinq conditions aux limites, qui permettent de déterminer complètement un polynôme de degré 4 pour la fonction  $f(y^+)$ , soit en incluant tout de suite la propriété  $a_0 = 0$  (4.99b) :

$$\frac{U}{U_\infty} = f(y^+) = a_1 y^+ + a_2 y^{+2} + a_3 y^{+3} + a_4 y^{+4} \quad (4.102)$$

Ajoutons que les conditions (4.101) méritent une mention particulière. On pourrait se passer de la troisième (4.101c), en réduisant le polynôme  $f(y^+)$  à l'ordre 3. Rien n'interdit non plus de rajouter des conditions analogues sur les dérivées d'ordre 3, 4..., ce qui serait physiquement justifié puisque  $U_\infty$  est une valeur asymptotique. Mais alors, où s'arrêter ?

Les conditions retenues ici sont un compromis que la pratique confirme comme très acceptable : le degré 4 du polynôme est suffisant pour coller à la grande majorité des situations réelles, sans conduire à un formalisme trop lourd. De plus, dans l'extension de la méthode aux écoulements anisothermes, il a été montré (Polidori et al., 1999) que les degrés 2 et 3 n'assurent pas l'unicité de la solution pour le champ de température, alors qu'il y a une solution et une seule avec le degré 4.

#### 4.6.7. – Signification de l'épaisseur de couche limite $\delta$ dans le modèle de Pohlhausen

🎵 Arrivés à ce point, nous devons nous attarder un moment sur une question qui est généralement escamotée : que recouvre exactement l'expression « épaisseur de couche limite » ?

Nous en avons donné une définition (4.4) au début de ce chapitre, qui est utilisée dans la méthode différentielle. Mais il est bien évident que **les conditions aux limites (4.101) ci-dessus constituent une autre définition de  $\delta$ , à savoir l'ordonnée pour laquelle le polynôme  $U(y)$  est tangent à la droite  $U = U_\infty$** . On ne parle donc pas de la même chose dans les deux

méthodes, et une comparaison entre les valeurs de  $\delta$  fournies par l'une et par l'autre n'a pas vraiment de sens.

!!! Toutefois dans la pratique, ceci n'est pas d'une très grande importance puisque, à la réflexion, l'épaisseur de couche limite n'apparaît pas comme un concept fondamental, mais plutôt comme un intermédiaire de calcul. Nous y reviendrons dans l'essai comparatif Blasius – Pohlhausen (§ 4.6.9).

#### 4.6.8. – Mise en œuvre de la méthode de Pohlhausen

##### ♣ *Champ de vitesse*

Nous allons maintenant prendre en compte les conditions aux limites (4.99) à (4.101) pour préciser la fonction  $f(y^+)$  (4.102) dont les dérivées sont :

$$\left. \begin{aligned} f' &= a_1 + 2a_2 y^+ + 3a_3 y^{+2} + 4a_4 y^{+3} \\ f'' &= 2a_2 + 6a_3 y^+ + 12a_4 y^{+2} \end{aligned} \right\} \quad (4.103)$$

Et pour alléger un peu l'écriture, nous allons admettre que la paroi est imperméable ( $V_p = 0$ ). Le lecteur est invité à compléter le calcul lui-même en cas de besoin.

##### 1) Condition à la paroi (4.100b)

Sachant que :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y^+} \frac{\partial y^+}{\partial y} = \frac{1}{\delta} f' \quad \text{et que} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta^2} f'' \quad (4.104)$$

on a, avec (4.100b) :

$$f''(0) = \delta^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y=0} = - \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx}$$

et d'autre part, d'après (4.103) :

$$f''(0) = 2a_2$$

$$\text{d'où : } a_2 = - \frac{\delta^2}{2\nu} \frac{dU_\infty}{dx} \quad (4.105)$$

Il est d'usage d'introduire le paramètre sans dimension  $\Lambda$  (lambda majuscule):

$$\Lambda(x) = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} \quad (4.106)$$

Alors on a :

$$a_2 = - \frac{\Lambda}{2} \quad \text{et} \quad f''(0) = - \Lambda \quad (4.107)$$

##### 2) Condition (4.101a) en $y = \delta$

$$f(1) = 1$$

soit en reportant dans (4.102) :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \quad (4.108a)$$

3) Condition (4.101b) en  $y = \delta$

On tire de (4.104) et (4.101b) :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=\delta} = \frac{l}{\delta} f'(l) = 0$$

d'où, en se référant à (4.103) :

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \quad (4.108b)$$

4) Condition (4.101c) en  $y = \delta$

Compte tenu de (4.104) et (4.103), la condition (4.101c) donne :

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{y=\delta} = \frac{l}{\delta^2} f''(l) = 0$$

et donc, avec (4.103) :

$$2a_2 + 6a_3 + 12a_4 = 0 \quad (4.108c)$$

On obtient, en résolvant le système (4.107, 4.108a, b, c) :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 2 + \frac{\Lambda}{6} \\ a_2 &= -\frac{\Lambda}{2} \\ a_3 &= -2 + \frac{\Lambda}{2} \\ a_4 &= 1 - \frac{\Lambda}{6} \end{aligned} \right\} \quad (4.109)$$

d'où l'expression du champ de vitesse :

$$\boxed{\frac{U}{U_\infty} = f(y^+) = \left(2 + \frac{\Lambda}{6}\right)y^+ - \frac{\Lambda}{2}y^{+2} - \left(2 - \frac{\Lambda}{2}\right)y^{+3} + \left(1 - \frac{\Lambda}{6}\right)y^{+4}} \quad (4.110)$$

L'étude de la fonction  $f$  montre que la condition

$$U \leq U_\infty \quad \forall y, \quad \text{soit} \quad f(y^+) \leq 1,$$

est vérifiée si :

$$\Lambda \leq 12 \quad (4.111)$$

En effet, la valeur  $\Lambda = -12$  correspond à l'abscisse de décollement, pour laquelle on

a  $f'(0) = 2 + \frac{\Lambda}{6} = 0$ , donc  $\partial U / \partial y = 0$  et  $\tau_p = 0$ . Toutefois la méthode reste applicable

dans une zone de recirculation tant que l'hypothèse (4.81a) reste acceptable.

◆ *Résolution*

Sur la base des expressions (4.96), quelques calculs simples et sans intérêt conduisent aux valeurs de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\tau_p$  correspondant à la fonction (4.110), à savoir :

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120} = C_1(x) \quad (4.112a)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = 0,1175 - 1,05 \cdot 10^{-3} \Lambda - 1,1 \cdot 10^{-4} \Lambda^2 = C_2(x) \quad (4.112b)$$

$$\tau_p = \frac{\mu U_\infty}{\delta} f'(0) = \frac{\mu U_\infty}{\delta} \left( 2 + \frac{\Lambda}{6} \right) \quad (4.112c)$$

L'équation de Karman (4.94a) devient alors, après multiplication de tous les termes par  $\delta / \mu U_\infty$  :

$$2 + \frac{\Lambda}{6} = \frac{U_\infty}{\nu} \delta \frac{d(C_2 \delta)}{dx} + \frac{1}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} (C_1 + 2C_2) \delta^2 \quad (4.112d)$$

On remplace ensuite  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de  $\Lambda$  (par 4.112a et b), puis  $\Lambda$  en fonction de  $\delta$  (définition 4.106), et on aboutit finalement à une équation différentielle dont l'inconnue est  $\delta$ , et où  $U_\infty(x)$  est une donnée du problème. La procédure est analogue à celle qui a été évoquée dans le cas général (§ 4.6.5).

#### 4.6.9 – Cas particulier d'un écoulement extérieur à vitesse uniforme. Essai comparatif Blasius – Pohlhausen

Lorsque l'écoulement extérieur est à vitesse uniforme, c'est-à-dire tel que :

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} = 0 \quad (4.113)$$

la fonction (4.110) se réduit à :

$$\boxed{\frac{U}{U_\infty} = f(y^+) = 2y^+ - 2y^{+3} + y^{+4}} \quad (4.114)$$

En outre, nous déduisons des expressions (4.112) :

$$\delta_1 = \frac{3}{10} \delta ; \quad \delta_2 = 0,1175 \delta ; \quad \tau_p = \frac{2\mu U_\infty}{\delta} \quad (4.115)$$

Remplaçons les valeurs  $\delta_2$  et  $\tau_p$  de (4.115) dans l'équation de Karman (4.94a), avec  $dU_\infty / dx = 0$ . Il vient, en multipliant par  $\delta$  :

$$2\mu U_\infty = \rho U_\infty^2 \left( 0,1175 \delta \frac{d\delta}{dx} \right), \text{ ou encore :}$$

$$\frac{d\delta^2}{dx} = 34,05 \frac{\mu}{\rho U_\infty}$$

et l'on voit que dans ce cas particulier l'équation de Karman possède une solution analytique simple :

$$\delta(x) = 5,83 \left( \frac{\mu x}{\rho U_\infty} \right)^{1/2} \quad (4.116)$$

Avec cette valeur de l'épaisseur de couche limite, (4.115) donne :

$$\tau_p = 0,343 \left( \frac{\mu \rho}{x} \right)^{1/2} U_\infty^{3/2} \quad (4.117a)$$

Pour tester la méthode de Pohlhausen, nous allons comparer ce résultat avec la solution de Blasius (4.38), qui correspond au cas présent :

$$\tau_p = 0,332 \left( \frac{\mu \rho}{x} \right)^{1/2} U_\infty^{3/2} \quad (4.117b)$$

L'écart entre les deux solutions n'est que de 3%, ce qui est satisfaisant.

En ce qui concerne l'épaisseur de couche limite, à la place du coefficient 5,83 de (4.116), la solution de Blasius (§ 4.4.4) donnait 4,92. Nous avons expliqué plus haut (§ 4.6.7) que la comparaison de ces deux chiffres n'a pas beaucoup de sens, puisqu'ils correspondent à des définitions différentes de  $\delta$ . Notons cependant qu'ils sont du même ordre de grandeur.

Une remarque analogue peut être faite concernant  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , qui sont proportionnels à  $\delta$  dans (4.115). Il est donc inexact de dire, comme on le fait parfois, que ces paramètres sont connus dans la solution de Pohlhausen avec une meilleure précision que  $\delta$ .

La concordance des solutions pour le champ de vitesse a moins d'importance pratique. Vérifions-en quand même la qualité sur un exemple.

Nous avons repris le problème d'un écoulement d'eau sur une plaque plane (tableau 4.3). Pour  $U_\infty = 3 \text{ m/s}$  et  $x = 0,16 \text{ m}$  nous choisissons quatre ordonnées  $y$  dont nous savons d'après le tableau 4.3 qu'elles sont à l'intérieur de la couche limite laminaire. On voit que, sur la vitesse  $U$ , les divergences entre les deux méthodes n'excèdent pas 2%.

TABLEAU 4.5 – Comparaison entre les solutions de Blasius et de Pohlhausen.  
Écoulement d'eau sur une plaque plane.  $U_\infty = 3 \text{ m/s}$  ;  $x = 0,16 \text{ m}$ .

		$\eta = y/\beta(x)$	$y^+ = y/\delta(x)$	$U/U_\infty$
$y = 1 \text{ mm}$	Blasius	4,33		0,966
	Polhausen		0,746	0,972
$y = 0,8 \text{ mm}$	Blasius	3,46		0,886
	Polhausen		0,597	0,896
$y = 0,6 \text{ mm}$	Blasius	2,6		0,772
	Polhausen		0,447	0,757
$y = 0,4 \text{ mm}$	Blasius	1,73		0,544
	Polhausen		0,3	0,552

Enfin, un essai comparatif élargi aux solutions de l'équation de Falkner-Skan montrerait que la solution de Pohlhausen reste très satisfaisante pour  $\Lambda \neq 0$ .

## 4.7. – JETS LAMINAIRES

### 4.7.1. – Introduction aux jets

Les jets sont des écoulements externes issus d'une source localisée appelée orifice (ou buse) de soufflage. Dans une majorité d'applications, ils sont turbulents et ils seront présentés d'une manière plus détaillée au chapitre 5 (§ 5.4 à 5.6). Malgré tout, il est utile de regarder aussi les jets laminaires, pour élargir notre perspective sur les écoulements externes.

Un jet noyé est un écoulement qui débouche dans une ambiance immobile de même nature. En raison des contraintes de viscosité, il se produit un entraînement du fluide ambiant par le jet, sans qu'il en résulte un mélange autrement que par diffusion moléculaire (voir à ce propos l'expérience de Reynolds dans le cas laminaire, ch. 2, § 2.2.1). Mais de ce fait, la quantité de mouvement initiale du jet est progressivement transférée au fluide ambiant, et la conservation de la masse a pour conséquence un ralentissement, et donc un élargissement (appelé *épanouissement*) du jet (voir § 6.1.1). L'allure approximative des profils de vitesse et des lignes de courant est visible sur la figure 4.10.

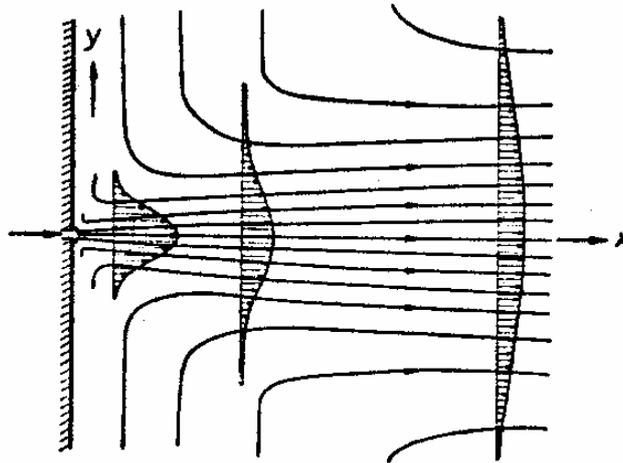


FIG. 4.10 – Structure d'un jet laminaire

### 4.7.2 – Le jet plan noyé

#### 4.7.2.1. – MISE EN ÉQUATION ET CONDITIONS AUX LIMITES

Le modèle du jet plan est une bonne approximation pour beaucoup de jets issus de fentes rectangulaires. La coordonnée  $x$  est prise suivant l'axe du jet, l'origine  $O$  se trouvant sur la section de soufflage, tandis que la coordonnée  $y$  est perpendiculaire au plan de symétrie. L'épaisseur du jet à l'origine est  $2b_0$  et sa vitesse  $U_0$  (voir détails sur la fig. 5.6, ch. 5). En outre, on considère que dans la direction  $z$  perpendiculaire au plan  $xy$  la longueur  $L_0$  de la buse est grande devant  $b_0$ , et l'on néglige l'épanouissement latéral du jet de manière à bénéficier d'un écoulement bidimensionnel.

Pour obtenir un jet entièrement laminaire, l'expérience montre que le nombre de Reynolds dans la buse doit être assez faible (inférieur à 35 approximativement). Au-delà de cette valeur, on se trouve déjà en présence d'un écoulement de transition, laminaire près de l'orifice et turbulent plus loin.

D'autre part, on observe que les hypothèses de la couche limite, ainsi que la condition  $\partial p^* / \partial x = 0$ , sont bien vérifiées lorsque la distance à la buse est supérieure à  $20 b_0$  environ. Les équations à résoudre sont donc les mêmes que (4.21a et b) :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (4.118a)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (4.118b)$$

Ces équations sont soumises à des conditions aux limites et à des conditions de symétrie dues à la géométrie du jet. En particulier, il ne peut y avoir de transfert de quantité de mouvement à travers le plan de symétrie par le jeu des forces de viscosité ; la tension visqueuse doit donc s'annuler en  $y = 0$ , d'où :

$$\left. \begin{array}{l} U(x, y) = U(x, -y) \\ y = 0 : \quad V = 0 \\ \tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ y \rightarrow \infty : \quad U = 0 \end{array} \right\} \quad (4.119)$$

#### 4.7.2.2. – DÉBIT DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

On notera  $J_0$  le débit de quantité de mouvement issu de la buse. Si  $L_0$  est la longueur de celle-ci, sa section est  $2 b_0 L_0$ , et  $J_0$  vaut (cf. 1.30a) :

$$J_0 = L_0 \int_{-b_0}^{b_0} \rho U_0 \cdot U_0 \, dy \quad (4.120a)$$

c'est-à-dire, en admettant une vitesse de soufflage  $U_0$  uniforme :

$$J_0 = 2 \rho b_0 L_0 U_0^2 \quad (\text{en } N \text{ ou } kN) \quad (4.120b)$$

Écrivons d'autre part le bilan intégral de quantité de mouvement entre deux plans parallèles d'abscisses  $x_1$  et  $x_2$ . En situant ces plans assez loin de la buse, dans la région où la pression  $p^*$  est uniforme, on obtient immédiatement :

$$L_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho U^2(x_1, y) \, dy = L_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho U^2(x_2, y) \, dy$$

soit, si l'on inclut la symétrie :

$$J = 2 \rho L_0 \int_0^{\infty} U^2 \, dy = cte \quad (4.121)$$

Pour écrire le même bilan en tête du jet, il faudrait prendre en compte le gradient de pression. En toute rigueur on a donc  $J \neq J_0$ . Cependant, l'approximation :

$$J \approx J_0 = 2 \rho b_0 L_0 U_0^2 \quad (4.122)$$

est considérée comme satisfaisante.

⚠ La plupart du temps, on ne fait pas apparaître dans les calculs la longueur  $L_0$  de la buse, et on se contente de raisonner sur une tranche de longueur  $L_0 = l$ . Nous préférons pour notre part bien mettre en relief l'aspect dimensionnel des lois physiques dans l'écoulement.

#### 4.7.2.3 – BASES DU CALCUL

Soit  $U_m(x)$  la vitesse sur le plan de symétrie du jet :

$$U_m(x) = U(x, 0) \quad (4.123)$$

De même qu'avec les écoulements au voisinage d'une paroi, on cherche s'il existe une transformation des coordonnées  $[x \Rightarrow \beta(x)]$  telle que :

$$\frac{U}{U_m} = f(\eta) \quad \text{où} \quad \eta = \frac{y}{\beta(x)} \quad (4.124)$$

Le raisonnement du paragraphe (4.4.1) se poursuit en faisant intervenir la fonction de courant  $\Psi(x, y)$  déjà bien connue :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y} ; \quad V = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.125)$$

et on obtient à nouveau les relations (4.23) :

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x, y) &= U_m(x) \beta(x) F(\eta) \\ F(\eta) &= \int_0^\eta f(u) du + F(0) \\ f(\eta) &= F'(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (4.126)$$

Alors, le débit de quantité de mouvement  $J$  dans le jet s'écrit d'après (4.121, 4.124 et 4.126) :

$$J = 2 \rho L_0 \int_0^\infty U_m^2(x) F'^2(\eta) \beta(x) d\eta$$

soit :

$$J = 2 \rho L_0 U_m^2 \beta \int_0^\infty F'^2(\eta) d\eta \quad (4.127)$$

que l'on présente encore sous la forme :

$$J = 2 \rho L_0 M \int_0^\infty F'^2(\eta) d\eta \quad (4.128)$$

en posant :

$$M = U_m^2(x) \beta(x) \quad (4.129a)$$

La propriété  $J = cte$  implique alors évidemment :

$$M = cte \quad (4.129b)$$

#### 4.7.2.4. – ÉQUATION ADIMENSIONNELLE DU MOUVEMENT

♣ Un coup d'œil en arrière (§ 4.5.1) nous montre que, au départ, le cadre du présent calcul est le même que celui qui nous a conduit à l'équation de Falkner-Skan, à condition de remplacer  $U_\infty$  par  $U_m$ . On a donc :

$$U = U_m F' \quad (4.130a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_m}{\partial x} F' - U_m F'' \frac{\eta}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \quad (4.130b)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = U_m \frac{F''}{\beta} \quad (4.130c)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = U_m \frac{F'''}{\beta^2} \quad (4.130d)$$

$$V = -F \beta \frac{dU_m}{dx} + U_m \frac{d\beta}{dx} (\eta F' - F) \quad (4.130e)$$

En reportant dans l'équation à résoudre (4.118b) il vient après simplification :

$$U_m F'^2 \frac{dU_m}{dx} - U_m F F'' \frac{dU_m}{dx} - U_m^2 \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dx} F F'' = \nu U_m \frac{F'''}{\beta^2}$$

et, en multipliant par  $\beta^2 / \nu U_m$  pour rendre l'équation adimensionnelle :

$$\frac{\beta^2}{\nu} \frac{dU_m}{dx} F'^2 - \left( \frac{\beta^2}{\nu} \frac{dU_m}{dx} + \frac{\beta}{\nu} U_m \frac{d\beta}{dx} \right) F F'' = F''' \quad (4.131)$$

◆ Il faut maintenant prendre en compte la propriété  $M = cte$  (4.129b) qui fournit une relation entre les paramètres  $U_m$  et  $\beta$ . De (4.129a et b) on déduit :

$$\frac{d}{dx} (U_m^2 \beta) = 2U_m \beta \frac{dU_m}{dx} + U_m \frac{d\beta}{dx} = 0 \quad (4.132)$$

ou encore :

$$\beta^2 \frac{dU_m}{dx} = -\frac{1}{2} U_m \beta \frac{d\beta}{dx} \quad (4.133)$$

ce qui donne, après report dans (4.131) et regroupement des termes :

$$\frac{U_m}{2\nu} \beta \frac{d\beta}{dx} (F'^2 + F F'') + F''' = 0 \quad (4.134)$$

Ici encore, la condition d'existence de solutions auto-similaires est que le coefficient sans dimension présent dans l'équation précédente soit constant. En outre, cette constante est arbitraire. dans la solution de Blasius, nous avons pris  $\frac{1}{2}$  par commodité (§ 4.4.2.1), mais dans le cas des jets on préfère la choisir égale à 1. On pose donc :

$$\frac{U_m}{2\nu} \beta \frac{d\beta}{dx} = 1 \quad (4.135)$$

Alors, l'équation (4.134) du mouvement dans le jet devient finalement :

$$\boxed{F''' + F'^2 + F F'' = 0} \quad (4.136)$$

♥ Cette équation doit être résolue avec les conditions aux limites (4.119) qui, appliquées à (4.130), se transposent ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} F(\eta) = F(-\eta) \\ \eta = 0 : \quad V = 0 \quad \Rightarrow \quad F(0) = 0 \\ \quad \quad \quad \partial U / \partial y = 0 \quad \Rightarrow \quad F''(0) = 0 \\ \quad \quad \quad U = U_m \quad \Rightarrow \quad F'(0) = 1 \\ \eta \rightarrow \infty : \quad U \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad F'(\infty) = 0 \end{array} \right\} \quad (4.137)$$

#### 4.7.2.5. – ÉVOLUTION DE LA VITESSE SUR LE PLAN DE SYMÉTRIE

Éliminons  $U_m$  dans les relations (4.129a et 4.135) de manière à exprimer  $\beta(x)$  en fonction de  $x$  et de la constante  $M$  :

$$\frac{U_m}{2\nu} \beta \frac{d\beta}{dx} = \frac{(M\beta)^{1/2}}{2\nu} \frac{d\beta}{dx} = \frac{M^{1/2}}{3\nu} \frac{d}{dx} \beta^{3/2} = 1$$

Il en ressort la forme fonctionnelle de  $\beta(x)$  :

$$\beta^{3/2} = \frac{3\nu}{M^{1/2}} x + Cte \quad (4.138)$$

La constante n'est pas arbitraire, mais nous n'avons aucun moyen de la déterminer. N'oublions pas en effet que nous raisonnons sur la zone du jet où  $\partial p^* / \partial x \neq 0$ , c'est-à-dire loin de la buse. Pour préciser sa valeur, il nous faudrait une condition de raccordement avec la tête du jet.

En l'absence d'une telle relation, tout ce que nous pouvons faire est d'étudier le phénomène à une abscisse  $x$  assez grande pour que l'on ait :  $Cte \ll (3\nu/M^{1/2})x$  (en pratique :  $x \gtrsim 20 b_0$ ). Alors :

$$\beta = (3\nu)^{2/3} M^{-1/3} x^{2/3} \quad (4.139)$$

et sachant par (4.129) que  $M = U_m^2 \beta = cte$  :

$$U_m = \left( \frac{M}{\beta} \right)^{1/2} = \left( \frac{M^2}{3\nu} \right)^{1/3} x^{-1/3} \quad (4.140)$$

Dans la zone considérée, la vitesse sur l'axe varie donc comme  $x^{-1/3}$ .

#### 4.7.2.6. – DISTRIBUTION TRANSVERSALE DE LA VITESSE U

Revenons maintenant à notre équation (4.136) à résoudre :

$$F''' + F'^2 + F F'' = 0$$

pour laquelle les conditions aux limites ont été énoncées dans (4.137).

Intégrons l'équation une première fois ; il vient :

$$F'' + F F' = cte$$

D'après (4.137), pour la valeur particulière  $\eta = 0$  on a  $F''(0) = F(0) = 0$ . La constante est donc nulle et :

$$F'' + F F' = 0 \quad (4.141)$$

On intègre encore une fois, ce qui donne :

$$F' + \frac{1}{2} F^2 = Cte$$

avec ici  $F'(0) = 1$  et  $F(0) = 0$ , d'où  $Cte = 1$  :

$$F' = 1 - \frac{F^2}{2} \quad (4.142)$$

Cette équation admet une solution qui satisfait la condition limite à l'infini :

$$F = A \operatorname{th} B \eta \quad (4.143)$$

En effet :

$$F' = \frac{AB}{ch^2 B \eta} \quad (4.144)$$

et aussi, d'après (4.142) :  $F' = 1 - \frac{A^2}{2} \frac{sh^2 B \eta}{ch^2 B \eta} = 1 - \frac{A^2}{2} th^2 B \eta$ .

La fonction (4.143) est bien solution de l'équation, à condition que :

i)  $F'(0) = 1$  d'où  $AB = 1$

ii) Les deux écritures de  $F'$  (4.144) soient équivalentes :  $\frac{1}{ch^2 B \eta} = 1 - \frac{1}{2B^2} \frac{sh^2 B \eta}{ch^2 B \eta}$

soit  $2B^2 = 1$  (petit rappel gracieux :  $ch^2 x - sh^2 x = 1$ ), et par conséquent :

$$A = \sqrt{2} \quad ; \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.145)$$

La solution est donc :

$$F = \sqrt{2} \operatorname{th} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \quad (4.146a)$$

et la distribution de vitesse est donnée par :

$$\frac{U}{U_m} = F' = \frac{1}{ch^2 \frac{\eta}{\sqrt{2}}} = 1 - th^2 \frac{\eta}{\sqrt{2}} \quad (4.146b)$$

Les profils de vitesse ont approximativement l'allure représentée sur la figure (4.10).

#### 4.7.2.7 – EXPRESSIONS DE $U_m(x)$ ET $\beta(x)$

♣ Il nous est maintenant loisible, en reprenant l'expression (4.146b) de  $F'$ , de calculer la constante  $M$  qui n'est pas encore connue. Le débit de quantité de mouvement dans le jet est donné par (4.128) :

$$J = 2 \rho L_0 M \int_0^\infty F'^2(\eta) d\eta = 2 \rho L_0 M \int_0^\infty \left( 1 - th^2 \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right)^2 d\eta \quad (4.147a)$$

L'intégrale se calcule en décomposant le terme au carré :

$$\int_0^\infty \left(1 - th^2 \frac{\eta}{\sqrt{2}}\right)^2 d\eta = \int_0^\infty \left\{ \left(1 - th^2 \frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) + \left(th^4 \frac{\eta}{\sqrt{2}} - th^2 \frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \right\} d\eta$$

$$= \sqrt{2} [th\eta]_0^\infty - \frac{\sqrt{2}}{3} [th^3 \eta]_0^\infty = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Alors,  $J = (4\sqrt{2}/3)\rho L_0 M$ , d'où :

$$M = \frac{3}{4\sqrt{2}} \frac{J}{\rho L_0} \quad (4.147b)$$

Si l'on admet la conservation de la quantité de mouvement dans l'écoulement, alors  $J = J_0 = 2\rho b_0 L_0 U_0^2$ , d'où :

$$M = \frac{3}{2\sqrt{2}} b_0 U_0^2 \quad (4.147c)$$

A l'aide de (4.140) nous en déduisons la loi de variation complète de la vitesse maximale  $U_m$  dans le jet :

$$U_m = \left(\frac{M^2}{3\nu}\right)^{1/3} x^{-1/3}$$

soit :

$$U_m = 0,723 \frac{(b_0 U_0^2)^{2/3}}{\nu^{1/3}} x^{-1/3} \quad (4.148)$$

◆ Enfin, (4.139) et (4.147c) nous permettent de préciser la loi de transformation  $\beta(x)$  :

$$\beta = 2,03 \nu^{2/3} (b_0 U_0^2)^{-1/3} x^{2/3} \quad (4.149)$$

#### 4.7.2.8. – DÉBIT DANS LE JET

A une abscisse donnée  $x$ , le débit-masse total dans le jet a pour valeur :

$$q_m = 2\rho L_0 \int_0^\infty U dy \quad (4.150)$$

soit, puisque  $F' = U/U_m$  et  $dy = \beta d\eta$  :

$$q_m = 2\rho L_0 U_m \beta \int_0^\infty F' d\eta = 2\rho L_0 U_m \beta F(\infty) \quad (4.151)$$

Ce débit inclut bien entendu l'entraînement de l'atmosphère ambiante par le jet. La fonction  $F$  étant donnée par (4.146a), on a :

$$q_m = 2\rho L_0 U_m \beta \sqrt{2} \left[ th \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right]_0^\infty = 2\sqrt{2} \rho L_0 U_m \beta$$

et connaissant  $U_m$  par (4.148) nous obtenons :

$$q_m = 4,15 \rho L_0 (\nu b_0 U_0^2)^{1/3} x^{1/3} \quad (4.152)$$

On observe que le long du jet le débit de fluide transporté est une fonction croissante de  $x$ , par suite du transfert progressif de quantité de mouvement du jet vers le fluide ambiant.

Bien entendu, le jet ne s'étend pas jusqu'à l'infini ; il disparaît par diffusion dans le milieu ambiant lorsque la vitesse devient du même ordre de grandeur que la vitesse de diffusion.

Il est utile de comparer le débit  $q_m(x)$  au débit initial  $q_{m0}$  issu de la buse :

$$q_{m0} = 2 \rho L_0 b_0 U_0 \quad (4.153a)$$

Tous calculs faits on trouve :

$$\frac{q_m}{q_{m0}} = 3,30 \frac{1}{(Re_0)^{1/3}} \left( \frac{x}{b_0} \right)^{1/3} \quad (4.153b)$$

en appelant  $Re_0$  le nombre de Reynolds dans la buse (voir ch. 6 pour l'expression de  $Re$  dans une section rectangulaire) :

$$Re_0 = \frac{4 b_0 U_0}{\nu} \quad (4.154)$$

Dans les conditions requises ( $x / b_0 \gtrsim 20$ ,  $Re_0 \lesssim 35$ ) on vérifie que le rapport  $q_m/q_{m0}$  est bien supérieur à 1.

#### 4.7.2.9. – ÉPANOUISSEMENT, TRAJECTOIRES, FRONTIÈRE DU JET

♣ On notera d'abord que d'après la définition de  $\eta$  (4.124), on a  $y = \beta$  pour  $\eta = 1$ , et :

$$\frac{U(\beta)}{U_m} = 1 - th^2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,63 \quad (4.155)$$

La courbe  $\beta(x)$  (4.149) est donc le lieu des points tels que  $U/U_m = 0,63$ .

◆ Quant aux *trajectoires* des particules fluides, confondues avec les lignes de courant en écoulement permanent, ce sont les courbes le long desquelles la fonction de courant  $\Psi(x, y)$  est constante, c'est-à-dire suivant ((4.126) :

$$\Psi = U_m \beta F = cte \quad (4.156a)$$

Les relations (4.146a), (4.148) et (4.149) donnent :

$$\left( \nu \beta U_0^2 \right)^{1/3} x^{1/3} th \frac{\eta}{\sqrt{2}} = 0,482 \times cte = K$$

et donc :

$$\eta = arg th \left\{ K \left( \nu b_0 U_0^2 \right)^{-1/3} x^{-1/3} \right\}$$

ou encore :

$$y = \eta \beta = cte \times x^{2/3} arg th \left\{ K \left( \nu b_0 U_0^2 \right)^{-1/3} x^{-1/3} \right\} \quad (4.156b)$$

La fonction  $arg th u$  est équivalente à  $u$  quand  $u \rightarrow 0$ . Cela signifie ici que  $y$  tend vers une forme en  $x^{1/3}$  lorsque  $x$  est grand.

♥ D'autre part, puisqu'il n'y a pas de mélange entre le jet et le fluide ambiant, mais un simple entraînement, *on peut attribuer une frontière au jet plan laminaire* : c'est une trajectoire particulière qui délimite la section  $[-\eta_j, +\eta_j]$  à l'intérieur de laquelle le débit  $q_j(x)$  est égal au débit initial, soit avec (4.151) et (4.153a) :

$$q_{m0} = 2 \rho L_0 b_0 U_0 = q_j(x) = 2 \rho L_0 U_m \beta \int_0^{\eta_j} F' d\eta \quad (4.157a)$$

ce qui s'écrit également :

$$\Psi_j = U_m \beta F(\eta_j) = b_0 U_0 \quad (4.157b)$$

On en tire :

$$F(\eta_j) = \sqrt{2} \operatorname{th} \frac{\eta_j}{\sqrt{2}} = 0,428 (Re_0)^{1/3} \left( \frac{b_0}{x} \right)^{1/3}$$

et enfin :

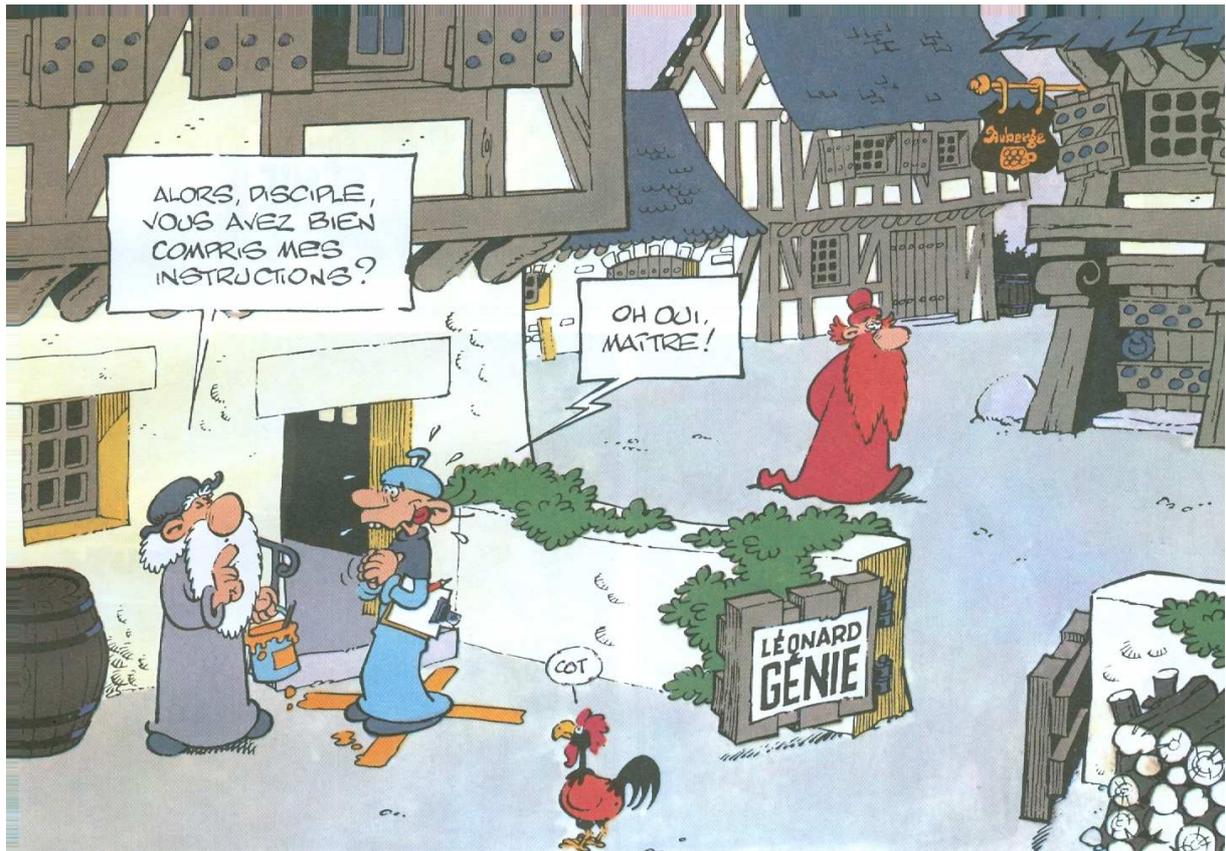
$$\eta_j(x) = \sqrt{2} \operatorname{arg th} \left\{ 0,3 (Re_0)^{1/3} \left( \frac{b_0}{x} \right)^{1/3} \right\} \quad (4.158a)$$

$$y_j = \beta(x) \eta_j(x) \quad (4.158b)$$

La fonction  $\operatorname{arg th} u$  n'est définie que pour  $u < 1$  mais cette condition est bien vérifiée avec les hypothèses adoptées ( $Re < 35$  et  $x/b_0 > 20$ ).

### 4.7.3. – Le jet laminaire axisymétrique

Dans le cas des jets laminaires, le passage de la géométrie plane à la géométrie cylindrique pose un problème épineux qu'il sera plus rapide d'aborder à partir du jet rond turbulent. Voir Annexes au chapitre 5.



Et pour terminer ce chapitre dans la bonne humeur

*C'est en sciant que Léonard devint scie*

Francis BLANCHE