

Chapitre 2

PREMIÈRE APPROCHE : DISTRIBUTION DES TEMPÉRATURES DANS UN ÉCHANGEUR À COURANTS PARALLÈLES

Certaines mouches se promènent, des existences entières, sur des in-quarto sans comprendre un traître mot aux textes les plus simples.

Alphonse ALLAIS

Les échangeurs à courants parallèles sont des appareils géométriquement simples où le champ de température peut être considéré comme unidimensionnel. Bien que leur usage soit relativement limité, nous exposerons leurs propriétés en détail car, au prix de calculs faciles, ils fournissent des renseignements physiques intéressants et constituent en quelque sorte des modèles de référence pour les autres échangeurs.

On rencontre parmi les échangeurs à courants parallèles : des échangeurs à plaques, des échangeurs bitubes (constitués de deux tubes concentriques) et des échangeurs à faisceau de tubes et calandre. Dans tous les cas, le profil de la paroi qui sépare les fluides est rectiligne dans le sens des écoulements.

2.1. – DONNÉES PRÉLIMINAIRES

Nous ne considérons ici que des échangeurs *parfaitement isolés* sur l'ensemble de leur surface extérieure. Les notations utilisées dans toute la suite sont rappelées ci-dessous :

- fluide chaud : indice c
- fluide froid : indice f
- entrée : indice e
- sortie : indice s
- surface d'échange mesurée depuis l'entrée du fluide chaud : S (joue le rôle d'une abscisse)
- surface totale d'échange : Σ
- coefficient local d'échange à travers la paroi : k
- débit-masse : q_m

débit thermique unitaire : $q_t = q_m C_p$ (en W/K)

puissance thermique totale échangée : Φ (en W)

Sauf précision contraire, les températures T des fluides sont des températures de mélange (§ 4.1.2 et 4.1.4).

2.2. – ÉCHANGEURS CO-COURANT

La figure 2.1 représente une coupe schématisée d'un échangeur co-courant, où l'on retrouvera les notations introduites au paragraphe précédent.

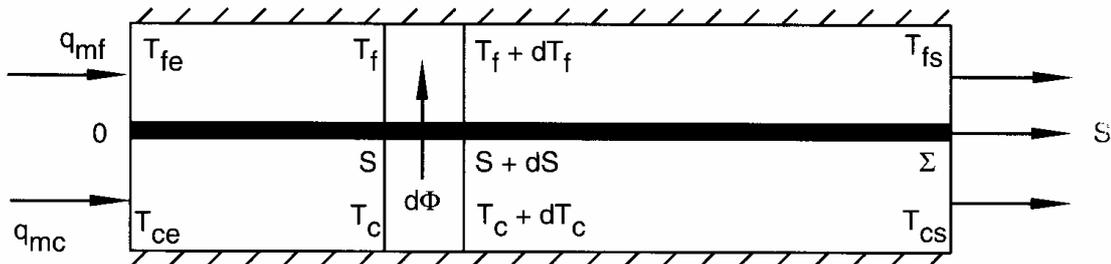


FIG. 2.1 – Schéma d'un échangeur co-courant

♣ Considérons une tranche de l'échangeur correspondant à une surface d'échange dS . Dans cette tranche, le fluide chaud passe de la température T_c à la température $T_c + dT_c$ et le fluide froid de T_f à $T_f + dT_f$. Le flux $d\Phi$ transféré à travers dS est :

$$d\Phi = k (T_c - T_f) dS \quad (2.1)$$

D'autre part, $d\Phi$ est aussi la variation d'enthalpie de chaque écoulement (au signe près) entre S et $S + dS$, soit

- pour le fluide chaud ($dT_c < 0$) :

$$d\Phi = -q_{mc} C_{pc} dT_c \quad (2.2)$$

- pour le fluide froid ($dT_f > 0$) :

$$d\Phi = q_{mf} C_{pf} dT_f \quad (2.3)$$

Il est commode d'introduire ici la notion de « débit thermique unitaire q_t » (ou débit de capacité calorifique) :

$$\boxed{q_t = q_m C_p} \quad (\text{en W/K}) \quad (2.4)$$

Ce paramètre important représente la variation du débit d'énergie transporté par le fluide lorsque la température de celui-ci varie de un degré.

Les équations (2.2) et (2.3) s'écrivent donc maintenant :

$$d\Phi = -q_{tc} dT_c = q_{tf} dT_f \quad (2.5)$$

et l'on voit dès à présent que *la plus forte variation de température sera subie par le fluide qui a le plus petit débit thermique unitaire*. On dit que ce fluide « commande le transfert » (voir aussi § 3.1).

◆ De (2.1) et (2.5) on tire :

$$\frac{dT_c}{T_c - T_f} = - \frac{k}{q_{tc}} dS \quad (2.6)$$

$$\frac{dT_f}{T_c - T_f} = \frac{k}{q_{tf}} dS \quad (2.7)$$

et, en soustrayant (2.7) de (2.6) :

$$\frac{d(T_c - T_f)}{T_c - T_f} = - \left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k dS \quad (2.8)$$

!! Adoptons l'hypothèse : $k = cte$ dans l'échangeur. Alors l'équation (2.8) s'intègre immédiatement :

$$T_c - T_f = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right\} \times cte$$

Pour $S = 0$, $T_c - T_f = T_{ce} - T_{fe}$, d'où :

$$\boxed{\frac{T_c - T_f}{T_{ce} - T_{fe}} = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right\}} \quad (2.9)$$

En particulier, à la sortie de l'échangeur, on a $T_c - T_f = T_{cs} - T_{fs}$, et $S = \Sigma$ surface totale d'échange, de sorte que :

$$\frac{T_{cs} - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fe}} = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k \Sigma \right\} \quad (2.10)$$

On voit donc, d'après (2.9), que l'écart de température $T_c - T_f$ est une fonction exponentielle décroissante de la surface d'échange S , et que $T_c - T_f \rightarrow 0$ quand $S \rightarrow \infty$, cette dernière propriété étant *a priori* évidente.

♥ Examinons maintenant séparément les évolutions de T_c et T_f . De (2.6) et (2.9) on tire d'abord, en multipliant membre à membre :

$$\frac{dT_c}{T_{ce} - T_{fe}} = - \frac{k}{q_{tc}} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right\} dS \quad (2.11)$$

soit :

$$\frac{T_c}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{q_{tf}}{q_{tc} + q_{tf}} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right\} + cte$$

Pour $S = 0$, $T_c = T_{ce}$ d'où :

$$cte = \frac{T_{ce}}{T_{ce} - T_{fe}} - \frac{q_{tf}}{q_{tc} + q_{tf}}$$

et en regroupant :

$$\boxed{\frac{T_c - T_{ce}}{T_{ce} - T_{fe}} = - \frac{q_{tf}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ 1 - \exp \left(- \left[\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right] k S \right) \right\}} \quad (2.12)$$

La température du fluide chaud est donc une exponentielle décroissante de S .

On obtient de même, en partant de (2.7) et (2.9) :

$$\boxed{\frac{T_f - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left\{ 1 - \exp \left(- \left[\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right] k S \right) \right\}} \quad (2.13)$$

Les températures de sortie des deux fluides sont déterminées en faisant $S = \Sigma$ (surface totale d'échange) dans les relations (2.12) et (2.13).

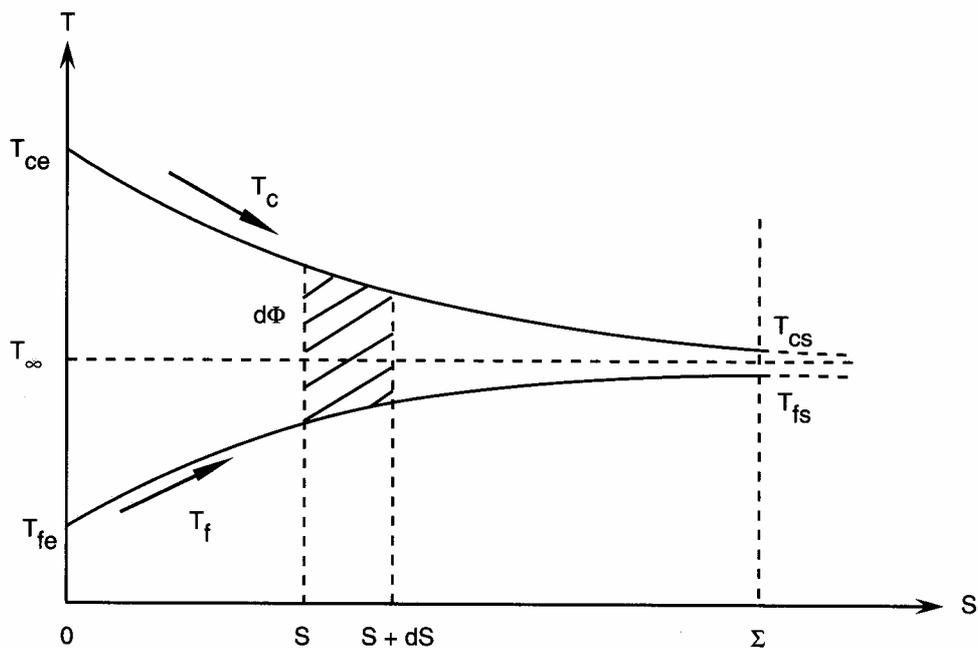


FIG. 2.2 – Distribution des températures dans un échangeur co-courant

Si $S \rightarrow \infty$, d'après (2.9) les températures T_c et T_f tendent vers une même limite T_∞ qui a pour valeur, en la calculant par exemple avec (2.13) :

$$T_\infty = T_{fe} + \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} (T_{ce} - T_{fe})$$

soit :

$$T_{\infty} = \frac{q_{tc} T_{ce} + q_{tf} T_{fe}}{q_{tc} + q_{tf}} \quad (2.14)$$

Cette expression représente la « température de mélange » des deux fluides (§ 4.1.2) : c'est celle que l'on obtiendrait en supprimant la paroi et en mêlant les deux courants.

L'évolution de T_c et T_f est représentée sur la figure 2.2 : la concavité de T_c est tournée vers le haut ($d^2T_c/dS^2 > 0$) cependant que celle de T_f est tournée vers le bas ($d^2T_f/dS^2 < 0$).

On notera que, le flux $d\Phi$ transféré à travers dS étant proportionnel à $T_c - T_f$, il est également proportionnel à l'aire hachurée sur la figure 2.2. La puissance totale de l'échangeur est donc elle-même proportionnelle à l'aire délimitée par les deux courbes $T_c(S)$ et $T_f(S)$.

2.3. – ÉCHANGEURS À CONTRE-COURANT

2.3.1. – Caractères généraux

L'entrée du fluide chaud est maintenant contiguë à la sortie du fluide froid et vice-versa.

Nous supposons toujours que la surface extérieure de l'appareil est parfaitement isolée, et nous choisissons comme sens des abscisses S le sens d'écoulement du fluide chaud : pour une variation $dS > 0$ de S on a donc toujours $dT_c < 0$ (T_c décroît dans cette direction) mais également $dT_f < 0$ puisqu'on se dirige vers l'entrée du fluide froid. La relation (2.5) est donc remplacée par :

$$d\Phi = -q_{tc} dT_c = -q_{tf} dT_f \quad (2.15)$$

avec bien entendu (équation 2.1) :

$$d\Phi = k (T_c - T_f) dS$$

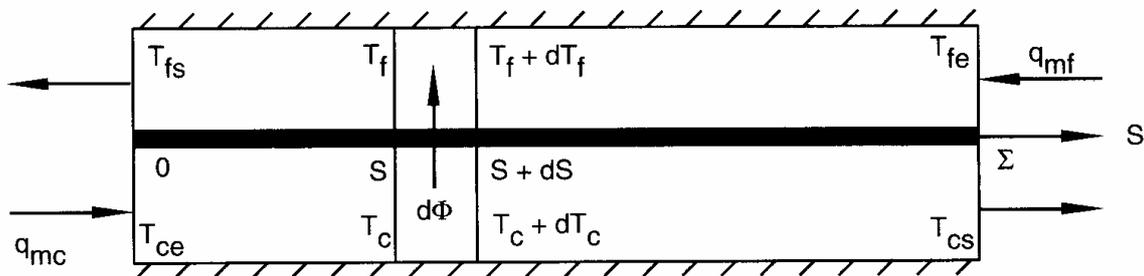


FIG. 2.3. – Échangeur à contre-courant

Les principaux paramètres qui interviennent dans le calcul sont répertoriés sur la figure 2.3, où l'on a fixé l'origine $S = 0$ à l'entrée du fluide chaud.

On obtient finalement :

$$\frac{T_c - T_f}{T_{ce} - T_{fs}} = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right\} \quad (2.16)$$

$$\frac{T_c - T_{ce}}{T_{ce} - T_{fs}} = \frac{q_{tf}}{q_{tf} - q_{tc}} \left\{ \exp \left(- \left[\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right] k S \right) - 1 \right\} \quad (2.17)$$

$$\frac{T_f - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fs}} = \frac{q_{tc}}{q_{tf} - q_{tc}} \left\{ \exp \left(- \left[\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right] k S \right) - 1 \right\} \quad (2.18)$$

Les conditions aux limites sont :

- pour $S = 0$: $T_c = T_{ce}$; $T_f = T_{fs}$ (2.19)

- pour $S = \Sigma$: $T_c = T_{cs}$; $T_f = T_{fe}$

Contrairement au cas de l'échangeur co-courant, il y a ici trois situations possibles selon que l'on a :

$$q_{tc} < q_{tf} \quad \text{ou} \quad q_{tc} = q_{tf} \quad \text{ou} \quad q_{tc} > q_{tf}$$

2.3.2. – Cas où $q_{tc} < q_{tf}$

Plaçons-nous d'abord dans le cas où c'est le fluide chaud qui a le plus petit débit thermique unitaire : c'est donc lui qui « commande le transfert ».

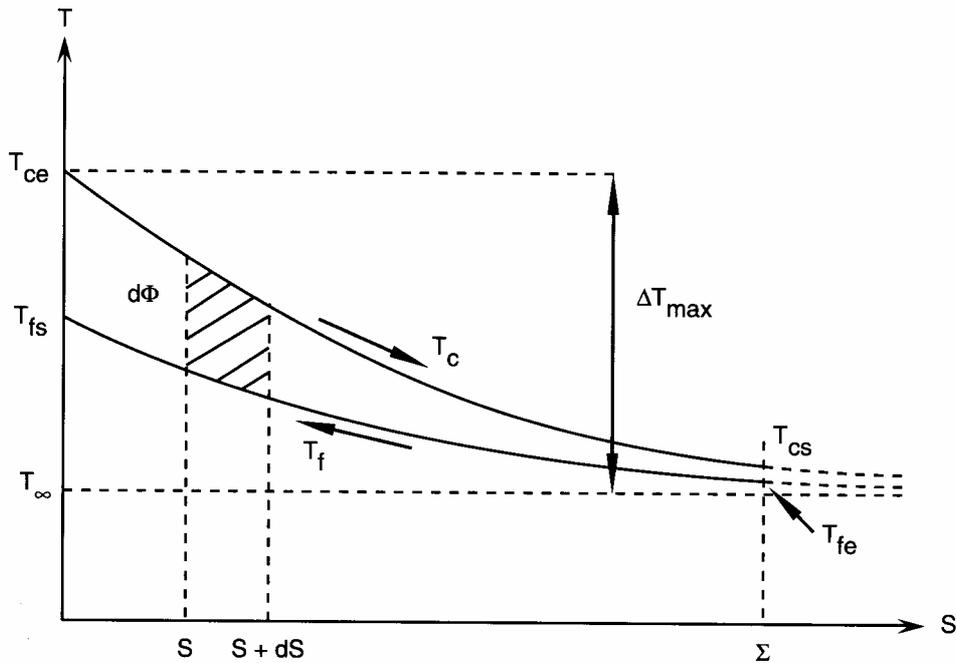


FIG. 2.4. – Distribution des températures dans un échangeur à contre-courant lorsque le fluide chaud commande le transfert ($q_{tc} < q_{tf}$)

Alors, l'examen des expressions (2.17) et (2.18) montre que $d^2T_c/dS^2 > 0$ et $d^2T_f/dS^2 > 0$: les concavités des deux courbes de température sont tournées vers le haut (fig. 2.4).

En outre, lorsque $S \rightarrow \infty$, T_c et T_f tendent vers une valeur asymptotique commune désignée par T_∞ :

$$T_\infty = \frac{q_{tf} T_{fs} - q_{tc} T_{ce}}{q_{tf} - q_{tc}} < T_{fe} \text{ et } T_{cs} \quad (2.20)$$

Si l'échangeur est infiniment long, la température de sortie du fluide chaud est égale à la température d'entrée du fluide froid.

2.3.3. – Cas où $q_{tf} < q_{tc}$

C'est ici le fluide froid qui « commande le transfert » puisqu'il a le plus petit débit thermique unitaire.

On a maintenant $d^2T_c/dS^2 < 0$ et $d^2T_f/dS^2 < 0$: la concavité des courbes T_c et T_f est tournée vers le bas (fig. 2.5).

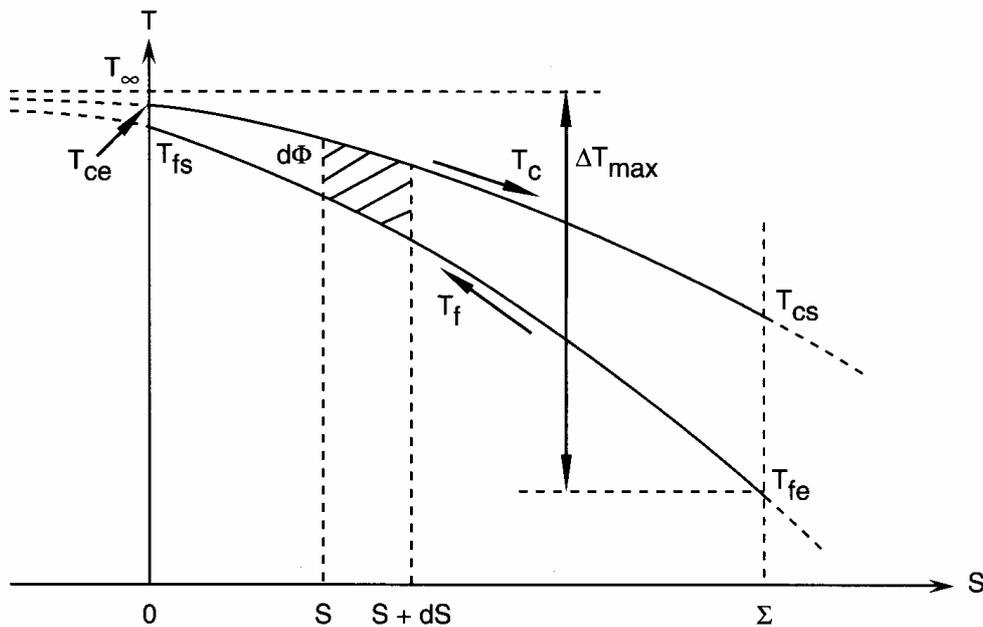


FIG. 2.5. – Distribution des températures dans un échangeur à contre-courant lorsque le fluide froid commande le transfert

Considérons un instant S comme une variable définie sur $]-\infty, +\infty[$. Lorsque $S \rightarrow -\infty$, T_c et T_f tendent vers une limite commune T_∞ :

$$T_\infty = \frac{q_{tf} T_{fs} - q_{tc} T_{ce}}{q_{tf} - q_{tc}} > T_{ce} \text{ et } T_{fs}$$

expression identique à (2.20). En outre, $T_c - T_f \rightarrow 0$.

Concrètement, cela signifie que l'écart de température entre les fluides est minimal du côté de l'entrée du fluide chaud, et que cet écart est d'autant plus petit que la surface d'échange Σ est plus grande (fig. 2.5).

Pour un échangeur infiniment long, la température de sortie du fluide froid est égale à la température d'entrée du fluide chaud.

2.3.4. – Cas où $q_{tf} = q_{tc}$

Les deux fluides ont le même débit thermique unitaire. On voit d'abord immédiatement que, d'après (2.16) :

$$T_c - T_f = cte = T_{ce} - T_{fs} \quad (2.21)$$

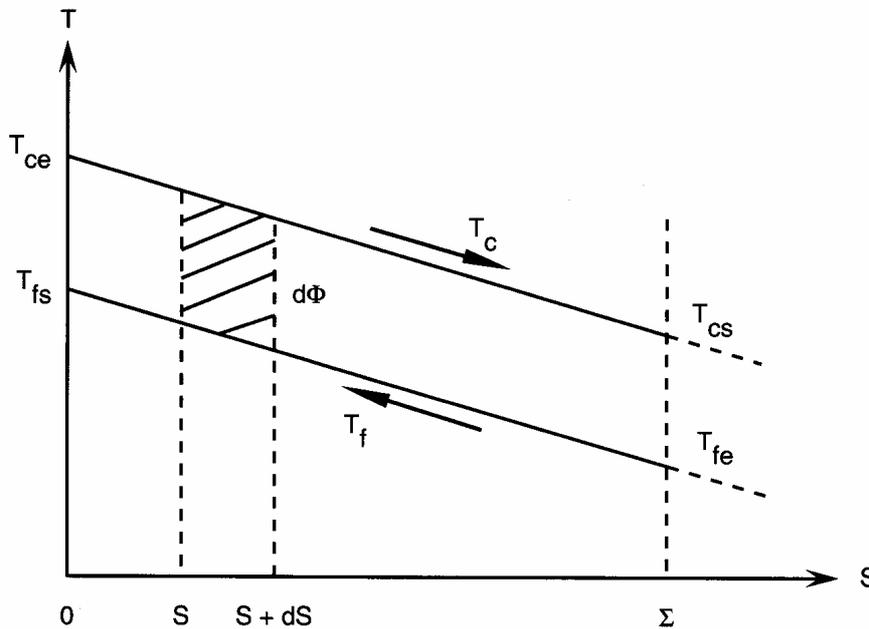


FIG. 2.6 – Échangeur à contre-courant avec $q_{tf} = q_{tc}$

D'autre part, faisons $q_{tc} \rightarrow q_{tf}$ dans l'équation (2.17). Un développement limité de l'exponentielle au premier ordre donne :

$$\frac{T_c - T_{ce}}{T_{ce} - T_{fs}} \approx \frac{q_{tf}}{q_{tf} - q_{tc}} \left(-\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k S = -\frac{k S}{q_{tc}} \quad (2.22)$$

et de même pour T_f .

A la limite, lorsque $q_{tc} = q_{tf} = q_t$, on a :

$$\boxed{\frac{T_c - T_{ce}}{T_{ce} - T_{fs}} = \frac{T_f - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fs}} = -\frac{k S}{q_t}} \quad (2.23)$$

Les températures T_c et T_f sont des fonctions linéaires de S , représentées par deux droites parallèles (fig. 2.6).

2.3.5. – Deux remarques

Pour conclure sur les échangeurs à contre-courant, soulignons deux points :

- * Comme avec les échangeurs co-courant, la puissance de l'appareil est proportionnelle à l'aire délimitée par les courbes T_c et T_f (sur les figures 2.4, 5 et 6 on a symbolisé par une surface hachurée le flux local $d\Phi$ à travers un élément de surface dS).
- * Dans les trois cas examinés il est possible d'avoir $T_{fs} > T_{cs}$, ce qui est une disposition favorable, irréalisable dans un échangeur co-courant (fig. 2.2).

2.4. – ÉCHANGEURS À FLUIDE ISOTHERME

Il arrive que l'un des fluides ait une température quasi-uniforme dans l'échangeur, et même qu'il impose cette température à la paroi si le coefficient d'échange est assez élevé. Cela se produit généralement lorsque le fluide subit un changement de phase, c'est-à-dire dans les condenseurs ou les évaporateurs (cf. Échangeurs à changement de phase, chapitre 5). On a ainsi $T_c \cong cte$ dans un condenseur, et $T_f \cong cte$ dans un évaporateur.

La distinction entre écoulements de type co-courant ou contre-courant n'a plus ici de raison d'être, car le sens de circulation du fluide non isotherme est maintenant sans importance.

Regardons par exemple le problème du *condenseur*. Partant des équations (2.1) et (2.5) qui expriment le flux échangé à travers un élément de surface dS , nous avons :

$$d\Phi = k (T_c - T_f) dS = q_{tf} dT_f \quad (2.24)$$

et d'autre part, puisque $T_c \approx cte$ dans un condenseur, nous pouvons écrire :

$$dT_f = - d(T_c - T_f) \quad (2.25)$$

d'où :

$$\frac{d(T_c - T_f)}{T_c - T_f} = - \frac{k}{q_{tf}} dS \quad (2.26)$$

soit :

$$T_c - T_f = \exp \left(- \frac{k}{q_{tf}} S \right) \times cte \quad (2.27)$$

Sachant que $T_f = T_{fe}$ pour $S = 0$, on obtient la distribution de température T_f (fig.2.7) :

$$\frac{T_f - T_{fe}}{T_c - T_{fe}} = 1 - \exp \left(- \frac{k S}{q_{tf}} \right) \quad (2.28)$$

De même, dans un *évaporateur*, on a :

$$\frac{T_c - T_{ce}}{T_{ce} - T_f} = - \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{k S}{q_{tc}} \right) \right\} \quad (2.29)$$

D'un point de vue pratique, le rapprochement de (2.28) et de (2.13) ou (2.18) montre que pour le condenseur, l'hypothèse $T_c \approx cte$ est équivalente à la condition $q_{tc} \rightarrow \infty$ (c'est-à-dire en fait $q_{tc} \gg q_{tf}$) ; symétriquement, avec un évaporateur, $T_f \approx cte$ peut être remplacée par $q_{tf} \rightarrow \infty$.

On retrouve cette approximation dans d'autres applications, par exemple lorsqu'on calcule les déperditions thermiques dans une cheminée : dans la méthode recommandée par le Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (CSTB), on admet q_{tf} (air extérieur) $\gg q_{tc}$ (fumées) (voir problème N° 4).

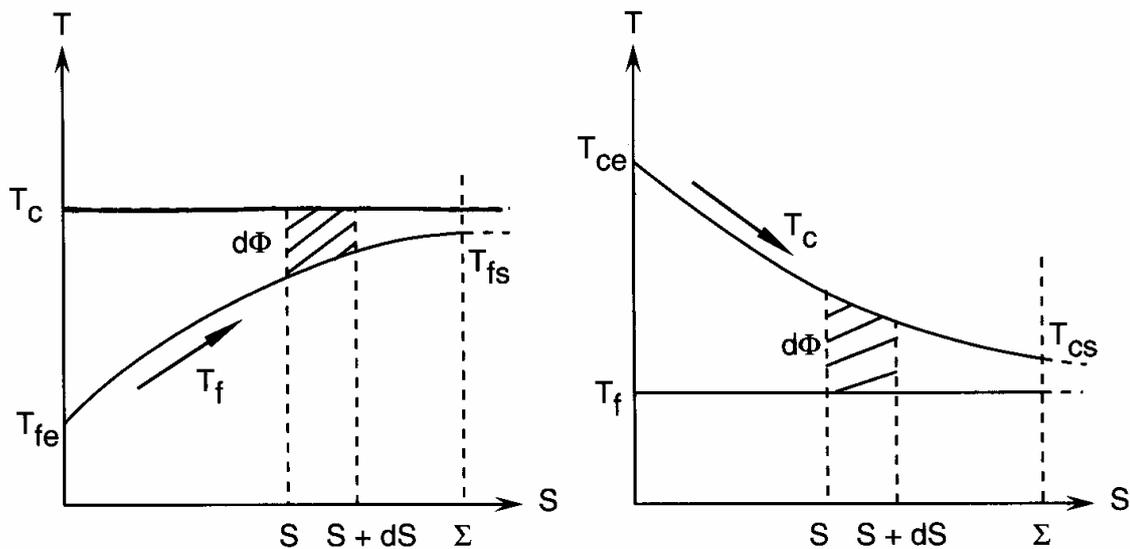


FIG. 2.7 – Distribution des températures dans un condenseur (à gauche) et dans un évaporateur (à droite)

2.5. – PUISSANCE D'UN ÉCHANGEUR À COURANTS PARALLÈLES

2.5.1. – Expression de la puissance

Quel que soit le modèle d'échangeur considéré, le flux transféré localement à travers un élément dS de la surface d'échange est toujours (2.1) :

$$d\Phi = k (T_c - T_s) dS$$

Si l'échangeur est à courants parallèles, appelons « a » l'extrémité pour laquelle $S = 0$ et « b » l'extrémité où $S = \Sigma$ (fig. 2.8), ce qui permet de traiter simultanément les configuration co-courant et contre-courant. On notera :

- pour $S = 0$: $T_c - T_f = \Delta T_a$

- pour $S = \Sigma$: $T_c - T_f = \Delta T_b$

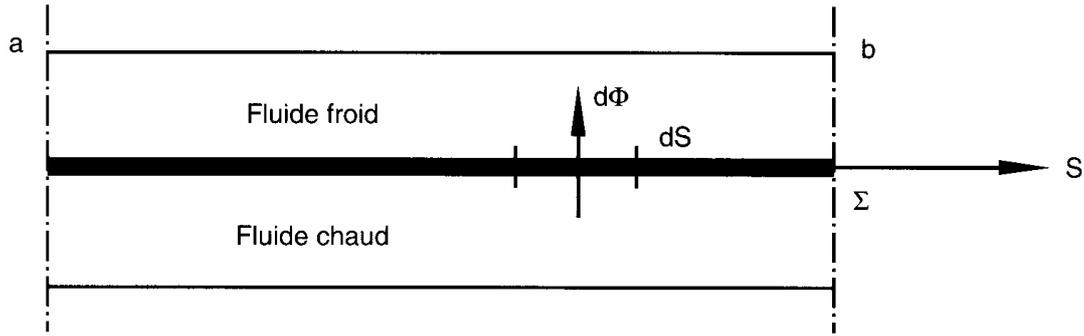


FIG. 2.8 – Schéma général d'un échangeur à courants parallèles

Alors, d'après (2.9) et (2.16), on peut écrire dans tous les cas (avec + en co-courant et – en contre-courant) :

$$\frac{T_c - T_f}{\Delta T_a} = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right\} \quad (2.30)$$

et par conséquent :

$$d\Phi = k \Delta T_a \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right\} dS \quad (2.31)$$

Rappelons que la solution (2.30) s'appuie sur l'hypothèse $k = cte$ dans l'échangeur. Alors, (2.31) s'intègre facilement pour donner la puissance globale de l'appareil :

$$\Phi = k \Delta T_a \int_0^{\Sigma} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right\} dS$$

c'est-à-dire :

$$\Phi = \Delta T_a \frac{1 - \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} \right) k \Sigma \right\}}{\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}}} \quad (2.32)$$

A l'extrémité « b », où $S = \Sigma$ et $T_c - T_f = \Delta T_b$, on a d'après (2.30) :

$$\frac{\Delta T_b}{\Delta T_a} = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} \right) k \Sigma \right\} \quad (2.33)$$

d'où :

$$\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} = - \frac{1}{k \Sigma} \operatorname{Ln} \frac{\Delta T_b}{\Delta T_a} \quad (2.34)$$

Reportons (2.33) et (2.34) dans (2.32) ; cela donne :

$$\boxed{\Phi = \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\frac{1}{k \Sigma} \operatorname{Ln} \frac{\Delta T_a}{\Delta T_b}}} \quad (2.35)$$

On écrit habituellement :

$$\boxed{\Phi = k \Sigma \Delta T_{LM}} \quad (2.36)$$

et l'on appelle « *différence de température logarithmique moyenne* » (en abrégé *DTLM*) l'expression :

$$\Delta T_{LM} = \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\text{Ln}(\Delta T_a / \Delta T_b)} \quad (2.37)$$

En pratique, cette moyenne logarithmique diffère souvent assez peu de la moyenne arithmétique $\Delta T_M = (\Delta T_a + \Delta T_b) / 2$. Par exemple, avec $\Delta T_b / \Delta T_a < 2$, l'écart entre les deux moyennes est inférieur à 4%.

2.5.2. – Influence de la surface d'échange Σ

Pour apprécier l'influence de la surface d'échange sur la puissance de l'échangeur, commençons par regarder le cas particulier d'un *échangeur à contre-courant* où $q_{tf} = q_{tc}$ (§.2.3.4). Alors, d'après (2.21) :

$$d\Phi = k (T_c - T_f) dS = k (T_{ce} - T_{fs}) dS$$

d'où en appelant Σ la surface totale d'échange :

$$\Phi = k (T_{ce} - T_{fs}) \Sigma$$

et :

$$d\Phi / d\Sigma = k (T_{ce} - T_{fs}) = cte \quad (2.38)$$

Tous les mètres carrés de la surface d'échange sont donc équivalents : quelle soit Σ , chaque mètre carré ajouté aura la même performance thermique.

Mais dans tous les autres cas, on voit très bien à partir de (2.32) que :

$$d\Phi / d\Sigma \rightarrow 0 \text{ quand } \Sigma \rightarrow \pm \infty \text{ (+ si } q_{tc} < q_{tf} \text{ et - si } q_{tf} < q_{tc} \text{)}$$

Chaque mètre carré de surface supplémentaire a donc de moins en moins de valeur thermique, mais il coûte aussi cher : c'est *une taxe sans valeur ajoutée*. En conséquence, il faudra rechercher une surface d'échange Σ économiquement optimale.

2.5.3. – Cas général

Dans un échangeur quelconque, le champ de température n'est plus unidimensionnel, mais bi ou tri-dimensionnel. Mais dans l'hypothèse $k = cte$, on a toujours localement :

$$d\Phi = k (T_c - T_f) dS$$

De ce fait, le flux total échangé est proportionnel au volume limité par les surfaces $T_c(x, y, z)$ et $T_f(x, y, z)$. Cependant, il n'est plus proportionnel à la différence de température logarithmique moyenne ΔT_{LM} . Cette grandeur n'a donc pas de sens physique bien net en dehors des échangeurs à courants parallèles, et son usage systématique ne s'impose nullement.