



# ÉCOULEMENTS EXTERNES GRAVITAIRES

Deuxième édition complétée

**Jacques PADET**  
*Professeur Émérite*

# PRÉSENTATION

Au départ, cette étude des écoulements externes soumis à un champ de pesanteur était conçue comme un simple additif à *Fluides en Ecoulement – Méthodes et Modèles* (FEMM en abrégé dans la suite), mais au fil des pages, des développements sont apparus nécessaires, si bien qu'elle se présente maintenant comme un opuscule autonome. Elle est divisée en trois parties : *Fluides stratifiés / Ecoulements atmosphériques / Ecoulements à surface libre*.

La première partie traite seulement de statique, mais elle est indispensable pour comprendre la structure et la stabilité des couches gazeuses ou liquides dans un champ de pesanteur. Le cas de l'eau est spécialement détaillé en raison de son comportement particulier et de son importance pratique. A la suite de questions soulevées par des pilotes de ballons atmosphériques, y ont été incluses des considérations sur le comportement des montgolfières et des ballons à gaz, étroitement dépendant des propriétés de l'atmosphère. A titre anecdotique, les paramètres de vol d'un ballon-sonde sur Titan sont étudiés en annexe.

Dans la seconde partie, les propriétés de la couche limite atmosphérique sont abordées comme une application de la convection mixte turbulente. La rigueur dans l'introduction et l'interprétation de certains paramètres (nombre de Richardson atmosphérique, longueur de Monin-Obukhov) a fait l'objet d'une attention particulière. On trouve ensuite des considérations plus qualitatives sur la relation entre stabilité de l'atmosphère et dispersion des effluents, et sur les effets du vent. Un petit exercice en annexe permet d'évaluer le risque de voir s'envoler les tuiles d'un toit.

Les écoulements à surface libre occupent la plus grande place du présent ouvrage. Leur étude n'est pas limitée au régime turbulent, mais porte aussi sur le régime laminaire, que l'on rencontre le plus souvent dans les écoulements en film. Les notions d'écoulement fluvial et torrentiel sont traitées sous une forme plus générale que ce que l'on trouve habituellement dans la littérature (à ce propos, on insiste sur le fait que la distinction fluvial/torrentiel se rencontre aussi dans les écoulements laminaires). Un paragraphe et un exercice sont également consacrés à la convection thermique dans les écoulements à surface libre. Enfin, la notion de pente critique (ou plutôt « optimale ») est introduite aussi bien en régime laminaire qu'en régime turbulent : elle permet en particulier de caractériser assez simplement l'aptitude d'un cours d'eau (et plus généralement d'un écoulement de liquide) à former des méandres.

*Je tiens particulièrement à remercier la SFT pour avoir accepté d'héberger mes différents ouvrages sur son site internet.*

Reims. Juin 2015

## Rappels de nomenclature:

Dans le texte, on a utilisé des abréviations pour désigner les ouvrages de J. PADET :

- FEMM : pour *Fluides en Ecoulement, Méthodes et Modèles*
- ET : pour *Echangeurs Thermiques*
- PTC : pour *Principes des Transferts Convectifs*

Les notations utilisées ici sont les mêmes que dans ces trois ouvrages. Quelques symboles nouveaux ont été introduits directement dans le texte, mais leur signification est rappelée chaque fois que nécessaire.

# TABLE DES MATIÈRES

## 1. - Stratification d'un fluide dans le champ de pesanteur

- 1.0. - Notion de stratification
- 1.1. - Stratification de l'atmosphère au repos
- 1.2. - Stratification d'un liquide au repos
- 1.3. - Théorème d'Archimède
- 1.4. - Équilibre d'une atmosphère stratifiée
- 1.5. – Exemples de stratification thermique dans l'atmosphère
- 1.6. – Comportement d'une bouffée exogène
- 1.7. – Formation d'un nuage
- 1.8. – Approche dynamique de la stabilité
- 1.9. – Équilibre et stabilité des ballons à air chaud et des ballons à gaz
- 1.10. – Comportement comparé des ballons à air chaud et des ballons à gaz
- 1.11. – Équilibre et stratification d'un plan d'eau

ANNEXE 1.1. – Retour sur la dilatabilité de l'eau

ANNEXE 1.2. – Gradient de masse volumique dans l'air. Dilatabilité

ANNEXE 1.3 – Exercice : Un ballon sur Titan

## 2. – Écoulements atmosphériques

- 2.1. – Le vent et la couche limite atmosphérique
- 2.2. – Écoulement et stabilité d'une atmosphère stratifiée
- 2.3. – Modèle unidimensionnel : écoulement de Couette turbulent
- 2.4. – Stabilité de l'atmosphère et dispersion des effluents
- 2.5. – Structures thermoconvectives
- 2.6. – Panorama des critères de stabilité
- 2.7. – Quand le vent rencontre des obstacles

ANNEXE 2.1. – Exercice : Des tuiles dans le vent

## 3. – Écoulements à surface libre

- 3.1. – Présentation
- 3.2. – Caractères particuliers
- 3.3. – Écoulements uniformes : généralités
- 3.4. – Vitesse et débit dans les écoulements uniformes
- 3.5. – Écoulements graduellement variés
- 3.6. – Convection forcée dans les écoulements à surface libre

ANNEXE 3.1. – Convection dans un écoulement en film laminaire

ANNEXE 3.2. – Surface libre : contrainte tangentielle et coefficient d'échange

ANNEXE 3.3. – Les méandres d'un cours d'eau : une tentative d'optimisation

A3.3.1 – Pente optimale en régime turbulent

A3.3.2 – Aptitude d'un cours d'eau à former des méandres

A3.3.3 – Pente optimale en régime laminaire

ANNEXE 3.4. – Relation entre pente critique et nombre de Reynolds

**Bibliographie.**

**Index**

# ÉCOULEMENTS EXTERNES GRAVITAIRES

## 1. - STRATIFICATION D'UN FLUIDE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

### 1.0. - Notion de stratification

L'idée générale de stratification correspond à une superposition de couches fluides de propriétés différentes, à l'image d'un millefeuille.

Plus précisément, considérons une couche de fluide immobile entre deux plans horizontaux. On dira que cette couche fluide est *stratifiée* si une ou plusieurs de ses propriétés physiques varient selon l'altitude  $z$ . Cette stratification peut présenter plusieurs aspects.

La « *stratification barométrique* » est liée à l'équation différentielle de l'hydrostatique (FEMM, 1.36b) (l'axe  $z$  étant dirigé vers le haut) :

$$dp = - \rho g dz \quad (1.1)$$

Elle implique donc une diminution de pression quand l'altitude augmente, quel que soit le fluide considéré.

La « *stratification thermique* » représente une variation de la température selon la verticale. Elle peut provenir des conditions aux limites, de la nature du fluide (gaz parfait ...), ou des deux à la fois.

Enfin, dans un fluide inhomogène stable, on observera une « *stratification massique* », caractérisée par une décroissance de la masse volumique en fonction de l'altitude.

Avec les fluides réels, pour lesquels la masse volumique dépend de la température, deux cas vont se présenter : dans les liquides, un gradient de température entraîne une simple modification de la stratification barométrique, et éventuellement massique ; dans les gaz, il se manifeste un couplage entre les deux stratifications, qui sont intimement liées.

### 1.1. – État de référence de l'atmosphère : stratification adiabatique

La structure de l'atmosphère est gouvernée par quelques lois générales, et par des conditions aux limites thermiques et mécaniques. Examinons d'abord un cas de stratification qui constitue un état de référence : il s'agit de la « *stratification adiabatique* ».

#### 1.1.1. - HYPOTHÈSES DE CALCUL

♣ Dans tous les cas, l'air obéit à la loi de l'hydrostatique (1.1), ainsi qu'à la *loi des gaz parfaits* :

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad (1.2)$$

◆ On postule ensuite que les fluctuations verticales d'une petite masse d'air au sein du fluide ambiant sont assez rapides pour être *adiabatiques* (ce qui revient à dire que la masse d'air se comporte comme si elle était isolée thermiquement du milieu ambiant)

♥ On admet enfin que les évolutions au sein du fluide sont *réversibles*.

La conséquence de ◆+♥ est que les évolutions aléatoires qui se produisent au sein du fluide sont *isentropiques*, et obéissent donc à la loi :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cte} \quad (1.3)$$

!!! La combinaison des lois (1.1) à (1.3) dans l'atmosphère va conduire à une stratification barométrique et thermique dite « adiabatique » qui constituera une référence dans un certain nombre d'applications.

### 1.1.2. - STRATIFICATION BAROMÉTRIQUE DE RÉFÉRENCE

Comme il a été dit plus haut, la stratification barométrique traduit un gradient de pression vertical, qui va être ici en relation avec un gradient de masse volumique.

Choisissons deux niveaux, l'un quelconque d'altitude  $z$ , l'autre de référence  $z_0$  (on choisira souvent  $z_0 = 0$ ). Entre ces deux ordonnées, l'application de la loi isentropique (1.3) donne :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \text{cte} \quad (1.4)$$

D'autre part, l'équation d'état s'écrit, respectivement aux altitudes  $z$  et  $z_0$  :

$$\left. \begin{array}{l} p / \rho = rT \\ p_0 / \rho_0 = rT_0 \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

De (1.4) et (1.5) on tire :

$$\frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{T}{T_0}$$

ou encore, en éliminant  $p$  à partir de (1.4) :

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.6)$$

Revenons maintenant à la loi de l'hydrostatique (1.1). Elle s'écrit, en tenant compte de la relation (1.6) précédente :

$$dp = -\rho_0 g \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} dz \quad (1.7)$$

d'où :

$$\frac{dp}{p^{1/\gamma}} = -\frac{\rho_0 g}{p_0^{1/\gamma}} dz \quad (1.8)$$

Sachant que  $\int \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ , l'intégration de (1.8) donne, avec  $\alpha = 1/\gamma$  :

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{(p_0)^{1/\gamma}} z + cte \quad (1.9)$$

et, avec  $p = p_0$  en  $z = 0$  :

$$cte = p_0^{(\gamma-1)/\gamma}$$

soit :

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{(p_0)^{1/\gamma}} z p_0^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

d'où finalement l'expression de  $p$  en fonction de  $z$  :

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.10a)$$

que l'on exprimera de préférence en fonction de  $T_0$ , par (1.5) :

$$\boxed{p = p_0 \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g}{r T_0} z \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (1.10b)$$

Pour l'air, on a (avec des valeurs légèrement arrondies) :

$$\gamma = 1,4 ; \frac{\gamma}{\gamma-1} = 3,5 ; \frac{\gamma-1}{\gamma} = 0,286 \quad (1.11a)$$

$$r = 288 \text{ J / kg.K} \quad (1.11b)$$

Avec  $z = 100 \text{ m}$  et  $T_0 = 293 \text{ K} = 20^\circ\text{C}$ , le calcul donne :

$$p = 0,988 p_0, \text{ soit } p - p_0 = -1160 \text{ Pa} = -0,0116 \text{ bar}$$

et avec  $z = 1000 \text{ m}$  :

$$p - p_0 = -11150 \text{ Pa} = -0,1115 \text{ bar}$$

La variation est donc presque linéaire. En outre, si l'on compare avec la loi de l'hydrostatique pour un fluide isochore (FEMM 1.38d) :

$$p - p_0 = -\rho_0 g z \quad (1.12)$$

avec  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$  on trouve :  $1176 \text{ Pa}$  pour  $100 \text{ m}$  et  $11760 \text{ Pa}$  pour  $1000 \text{ m}$ .

*La correction apportée par la loi (1.10) est donc assez faible. Mais cela ne veut pas dire que le développement précédent est inutile, car la loi isentropique va nous permettre de calculer l'évolution de la température en fonction de l'altitude.*

### 1.1.3. - STRATIFICATION THERMIQUE DE RÉFÉRENCE

Revenons maintenant aux relations (1.6), pour y prendre la loi de variation de  $T$  avec la pression, et reportons dans (1.10). On obtient immédiatement une fonction linéaire décroissante :

$$\boxed{\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{p_0} z} \quad (1.13)$$

On doit concéder toutefois que cette équation décrit une évolution théorique idéale, rarement respectée dans la réalité, car elle est modifiée par les conditions aux limites (relief, température du sol, nébulosité ...) et par la turbulence atmosphérique. Malgré cela, la loi (1.13) est importante en ceci qu'elle constitue *une référence*, par le gradient de température qu'elle fait apparaître, et qui est appelé « *gradient adiabatique* »  $(dT/dz)_{ad}$  :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} = - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0 g T_0}{p_0} \quad (1.14)$$

D'après l'équation d'état (1.5), on a :

$$\frac{p}{\rho r T} = 1 = \frac{p_0}{\rho_0 r T_0}$$

de sorte que :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} = - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho g T}{p} = - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g}{r} \quad (1.15a)$$

Sachant que pour l'air, la constante  $r$  des gaz parfaits vaut  $288 \text{ J/kg.K}$ , le gradient adiabatique a pour valeur  $0,00973 \text{ }^\circ\text{C/m}$ . On a l'habitude de l'arrondir à :

$$\boxed{(dT/dz)_{ad} = - 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C/m} = - 1^\circ\text{C}/100\text{m}} \quad (1.15b)$$

En outre, le profil de température « adiabatique » (1.13) peut encore s'écrire :

$$T_{ad} = T_0 + z \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} \quad (1.16a)$$

 *Dans une atmosphère obéissant rigoureusement à la loi isentropique, la température diminue donc d'un degré Celsius quand on s'élève de 100 mètres. Mais il serait incorrect d'ériger cette propriété particulière en règle générale : le gradient réel varie dans des proportions importantes, en fonction des conditions aux limites.*

Dans la pratique, les profils réels de température dans l'atmosphère sont souvent linéarisés, sous la forme :

$$T = T_0 + \lambda z \quad (1.16b)$$

où  $\lambda$  est un gradient moyen qui peut être supérieur ou inférieur à :

$$\lambda_{ad} = (dT/dz)_{ad} \quad (1.16c)$$

## 1.2. - Théorème d'Archimède

Le théorème (ou principe) d'Archimède n'a pas été explicitement abordé dans FEMM (ch. 1), mais il est utile de l'évoquer ici, comme outil pour une présentation élémentaire de la stabilité d'un fluide stratifié.

♣ Dans un fluide immobile, le bilan local des forces en présence se réduit à (FEMM 1.36a) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \rho \vec{g} \quad (1.17a)$$

Donnons-nous alors, dans le fluide, un domaine  $D$  de frontière  $S$ , et intégrons la relation précédente sur  $D$  ( $d\tau$  représentant un petit élément de volume) :

$$\int_D \overrightarrow{\text{grad}} p \, d\tau = \int_D \rho \vec{g} \, d\tau \quad (1.17b)$$

Le second membre de l'équation est le poids  $\vec{P}$  du fluide contenu dans  $D$  :

$$\int_D \rho \vec{g} \, d\tau = \vec{P} \quad (1.17c)$$

Quant au premier membre, il contient les termes diagonaux du tenseur des contraintes  $\overline{\overline{T}}$ , à savoir la pression  $-p$ . Sachant que dans le cas général on a (cf. FEMM 1.31 et 1.32) :

$$\int_D \text{div} \overline{\overline{T}} \, d\tau = \int_S \vec{T} \, dS$$

où  $\vec{T}$  est le vecteur contrainte sur  $dS$ , il ne reste ici, en l'absence de mouvement, que le terme de pression, d'où en n'oubliant pas que  $p$  (force de compression) est comptée positive, et que la normale  $\vec{n}$  à  $S$  est orientée vers l'extérieur de  $D$  (FEMM, ch. 1) :

$$\int_D \overrightarrow{\text{grad}} p \, d\tau = - \int_S p \vec{n} \, dS \quad (1.18a)$$

Ce terme représente donc la résultante  $\vec{F}_p$  des forces de pression exercées par le fluide ambiant sur la surface  $S$ , encore appelée « *poussée d'Archimède* », ou « *poussée hydrostatique* » :

$$\int_S p \vec{n} \, dS = \vec{F}_p \quad (1.18b)$$

Finalement, à l'équilibre, on a donc :

$$\vec{P} = - \vec{F}_p \quad (1.19)$$

*Autrement dit, la résultante des forces de pression sur la frontière de  $D$  est égale et opposée au poids du fluide contenu dans  $D$ , donc dirigée vers le haut.*

◆ Imaginons maintenant de remplacer le contenu de  $D$  par un milieu matériel différent, de masse volumique  $\rho_m \neq \rho$ , et par conséquent de poids  $\vec{P}_m \neq \vec{P}$ . Le « *principe d'Archimède* » stipule (même si ce n'est pas sa formulation classique) que *cette opération ne change pas la répartition de pression sur  $S$ , et ne modifie donc pas la résultante  $\vec{F}_p$* , qui reste définie par (1.18b).

Une conséquence immédiate en est que le domaine  $D$  est soumis à une force verticale désignée comme son « *poids apparent* »  $\vec{P}_a$  :

$$\vec{P}_a = \vec{P}_m + \vec{F}_p \quad (1.20a)$$

ou encore, en projection sur l'axe  $z$  dirigé vers le haut,  $P_m$  et  $F_p$  étant traditionnellement considérés en valeur absolue :

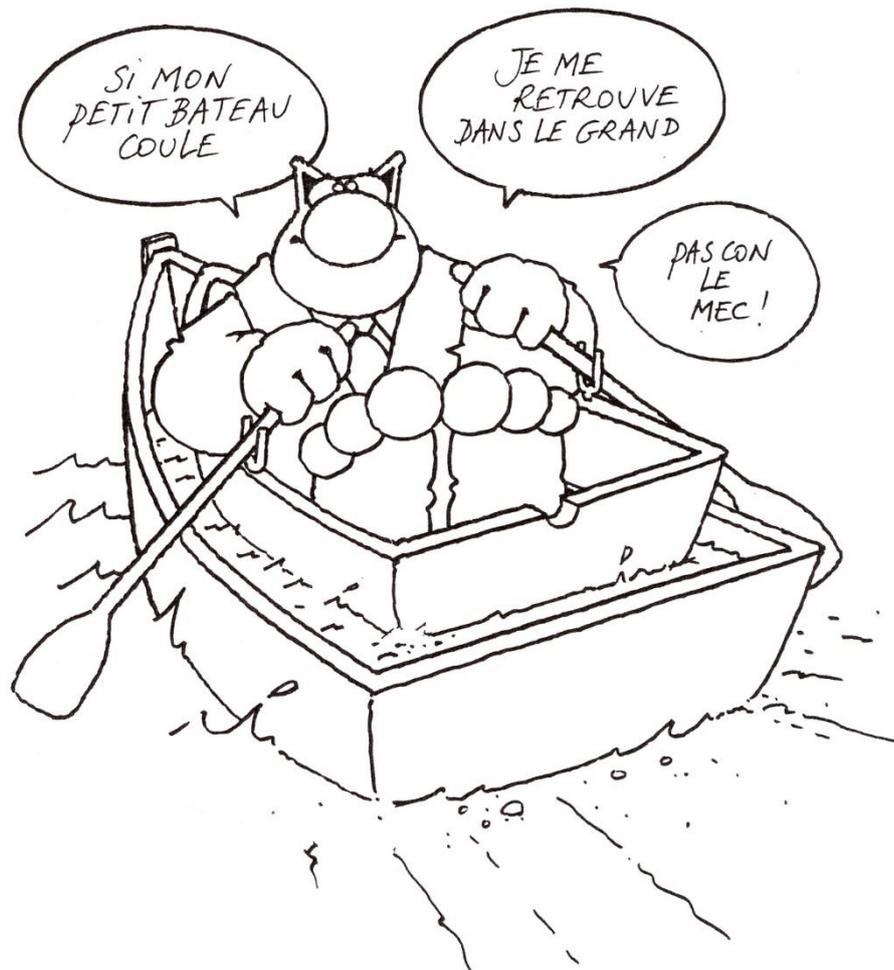
$$P_a = -P_m + F_p \quad (1.20b)$$

Alors,  $P_a$  est exprimé en valeur algébrique. La force appliquée à  $D$  est dirigée vers le haut si  $P_a > 0$ , et dirigée vers le bas si  $P_a < 0$  ( $D$  étant plus léger ou plus lourd que le fluide ambiant).

*Cette propriété constitue ce qu'on peut appeler le « théorème d'Archimède ».*

Mais alors, si  $\vec{P}_a$  n'est pas compensée par une autre force extérieure, l'équilibre est rompu :  $D$  va subir un mouvement ascendant ou descendant selon le sens de  $\vec{P}_a$ .

♥ La situation est analogue si le domaine  $D$  contient le même fluide, mais à une température différente, donc à une masse volumique différente. Dans ce cas, le poids apparent  $\vec{P}_a$  est appelé « poussée thermique » ou encore *force de flottabilité*.



### 1.3. - Stratification d'un liquide au repos

#### ♣ *Liquide homogène*

Dans un liquide, la pression et la température sont deux variables faiblement couplées, par l'intermédiaire de la masse volumique. En effet, la stratification barométrique obéit à la loi locale de l'hydrostatique, dans laquelle  $\rho = \rho(T)$  :

$$dp = - \rho(T) g dz$$

Mais comme la dilatabilité des liquides est très faible, la répercussion sur la pression est négligeable. On peut donc appliquer la loi (1.12) relative aux fluides isochores.

Quant à la stratification massique représentée par  $\rho(z)$ , ou plus précisément par  $\rho[T(z)]$ , elle dépendra directement des conditions aux limites sur la température. Ce point sera repris plus loin (§ 1.8 ; annexe 1.2).

#### ◆ *Domaine fluide inhomogène constitué de liquides non miscibles*

Si deux ou plusieurs liquides non miscibles se trouvent en état de coexistence, on peut considérer de façon schématique que chacun d'eux est constitué de gouttes en contact les unes avec les autres. Généralement, les fluides ont des masses volumiques différentes, et même si la différence est faible, le théorème d'Archimède va s'appliquer à chaque goutte. En vertu de quoi les gouttes les plus légères se réuniront progressivement en haut, et les gouttes les plus lourdes au fond. C'est ce que l'on peut très facilement observer en versant du vinaigre dans de l'huile (ou l'inverse) : les gouttes de vinaigre, plus denses, vont tomber au fond du récipient, et l'huile formera une couche homogène au-dessus, la surface de séparation étant un plan horizontal.

### 1.4. - Équilibre d'une atmosphère stratifiée

Ces préliminaires étant acquis, portons alors notre attention sur une petite masse d'air, ou particule fluide - au sens de FEMM § 1.1.1 - (on dit souvent une *bouffée d'air*, pour parler de façon imagée, ou encore une *bulle*) qui, à la suite d'une fluctuation aléatoire, passerait accidentellement de l'altitude  $z$  à l'altitude  $z + dz$  (fig. 1.1). Cet événement se produira dans les conditions précisées plus haut (§ 1.1.1), donc de façon isentropique.

♣ - Les caractéristiques de la bouffée d'air dans sa position de départ (niveau  $z$ ) étaient :  $p$ ,  $\rho$  et  $T$ .

◆ - L'air ambiant immobile obéit à la loi d'état (1.2) et à la loi de la statique (1.1), le champ de température  $T$  étant déterminé par les conditions aux limites (au sol et dans la partie supérieure de l'atmosphère).

Ses caractéristiques à l'altitude  $z + dz$  sont : pression  $p + dp$ , température  $T + dT$  et masse volumique  $\rho + d\rho$ . La relation entre les variations de ces trois grandeurs est obtenue en opérant une dérivation logarithmique de l'équation d'état ( $p/\rho = rT$ ), soit :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} \tag{1.21}$$

♥ - Mais les caractéristiques de la bouffée d'air dans sa nouvelle position ( $z + dz$ ) ne sont pas les mêmes, *sauf pour la pression* : comme les variations de pression se transmettent à la vitesse du son, on admet que l'équilibre des pressions est réalisé instantanément, et donc que la nouvelle pression de la bouffée d'air est la pression de l'air ambiant, soit  $p + dp$ .

Par contre, sa masse volumique sera  $\rho + \delta\rho$ , la variation  $\delta\rho$  étant déduite de la loi isentropique (1.3) :

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad \text{soit : } \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} \quad (1.22)$$

avec en général :  $\delta\rho \neq d\rho$ .

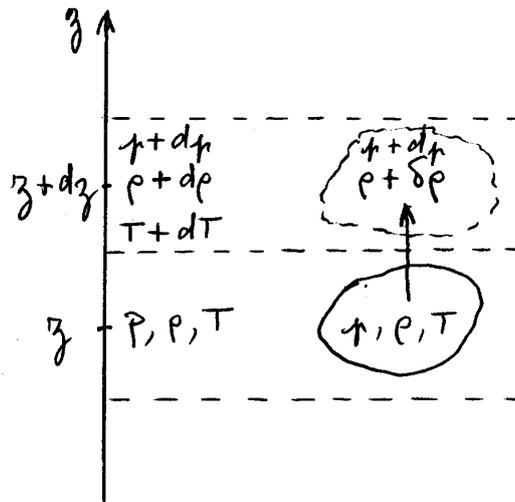


FIG. 1.1 - Stratification atmosphérique

♠ - La *condition de stabilité* de l'atmosphère peut être exprimée de façon élémentaire comme une condition de retour spontané de la bouffée d'air à son niveau initial, après la perturbation dont elle a fait l'objet.

- Si la bouffée d'air a été soulevée ( $dz > 0$ ), pour retomber elle doit devenir plus dense que l'air environnant (c'est-à-dire se refroidir davantage), ce qui s'exprime par :

$$\delta\rho > d\rho \quad (1.23)$$

soit, avec (1.21) et (1.22) :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} > \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}$$

Ajoutons-y la loi de la statique (1.1) :  $dp = -\rho g dz$ . Il vient :

$$\frac{dT}{T} > -\frac{\rho g dz}{p} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$$

d'où, avec  $dz > 0$ , l'expression de la *condition de stabilité* :

$$\boxed{\frac{dT}{dz} > -\frac{\rho g T}{p} \frac{\gamma - 1}{\gamma}} \quad (1.24)$$

- Si la bouffée d'air descend, elle doit devenir plus légère que l'air environnant pour retourner à sa place, d'où :

$$\delta \rho < d\rho \quad \text{mais cette fois avec } dz < 0 \quad (1.25)$$

Le calcul aboutit à la même inégalité (1.24), qui représente donc la condition générale de stabilité. En outre, on observe que le second membre de (1.24) n'est autre que le gradient de température adiabatique  $(dT/dz)_{ad}$  (relation 1.15). La condition de stabilité s'écrit donc aussi (fig. 1.2) :

$$\boxed{\frac{dT}{dz} > \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}} \quad (1.26)$$

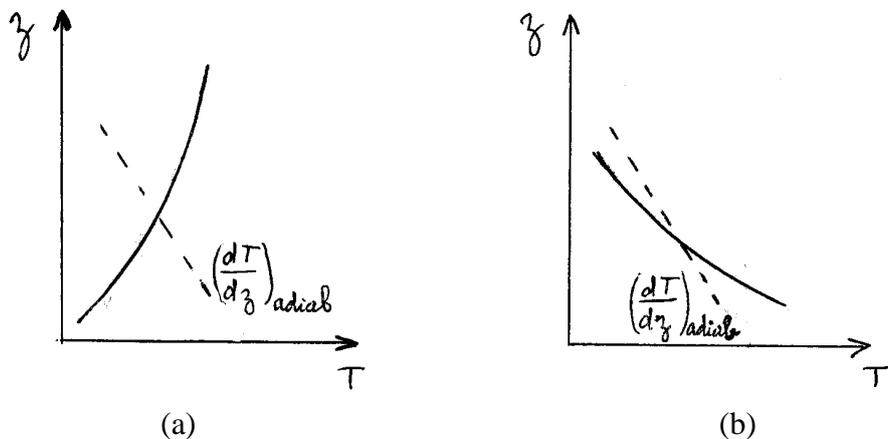


FIG. 1.2 – (a) : Stabilité ; (b) : Instabilité

Quand le gradient de température est inférieur au gradient adiabatique, on est en situation d'instabilité : l'écart de masse volumique entre la bouffée et l'air ambiant la maintient en mouvement.

Lorsque  $(dT/dz) = (dT/dz)_{ad}$ , la bouffée est toujours en équilibre thermique avec l'ambiance : l'équilibre est indifférent (*atmosphère neutre*).

⚡ Attention à ne pas confondre la distribution verticale de la température  $T(z)$  (courbes en traits pleins sur les figures 1.2 et 1.3) avec  $(dT/dz)_{ad}$  qui est une pente de référence (matérialisée par des pointillés sur les mêmes figures).

Ajoutons qu'une grande masse d'air stable est appelée « *anticyclone* » ; c'est également une zone de hautes pressions. A l'inverse, les cyclones se développent dans des atmosphères très instables qui sont aussi des régions de basses pressions.

## 1.5. – Exemples de stratification thermique dans l'atmosphère

♣ Par une nuit claire, ou au petit matin, le refroidissement du sol par rayonnement vers la haute atmosphère entraîne un refroidissement de l'air, ce qui correspond à une condition de forte stabilité (fig. 1.2a).

◆ Toujours par temps clair, le réchauffement matinal du sol par le soleil après le refroidissement de la nuit peut finir par donner une température de l'air presque constante en fonction de  $z$  (sur une hauteur limitée, bien entendu) : on est encore en situation de stabilité. Une telle configuration se rencontre également par ciel couvert, lorsque le sol et les nuages sont presque à la même température.

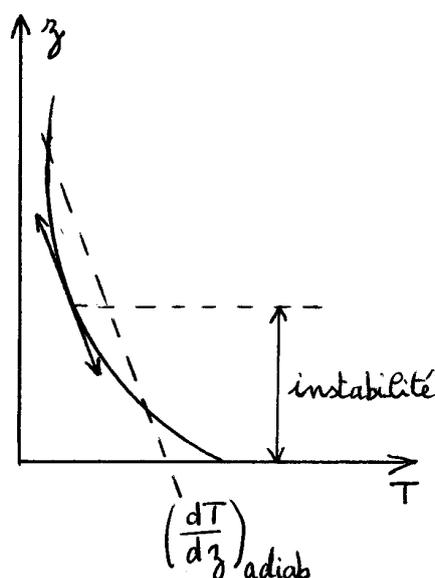


FIG. 1.3 – Suradiabatisme : couche instable au voisinage du sol

♥ Si la journée ensoleillée se prolonge, le sol réchauffé par le soleil réchauffe à son tour l'air des couches inférieures de l'atmosphère, si bien que, à proximité du sol, le gradient de température peut devenir inférieur au gradient adiabatique : une zone d'instabilité s'installe (en particulier, les points les plus chauds de la surface du sol vont donner naissance à des bouffées ascendantes), alors que l'atmosphère reste stable à plus haute altitude (fig. 1.3) : autrement dit, elle bloquera les perturbations qui proviennent de la zone de surface. Cette situation assez défavorable du point de vue de la pollution est qualifiée de « suradiabatisme » (voir § 2).

♠ Sur une plus grande hauteur, en régime périodique, considérons une succession de jours moyennement chauds et de nuits assez froides : le réchauffement de l'air pendant le jour va se faire sur une hauteur inférieure à la hauteur refroidie pendant la nuit. Il peut en résulter, pendant le jour, la présence d'une « couche d'inversion » entre la zone soumise à l'influence du sol et la zone non perturbée située plus haut (fig. 1.4). Cette région présente un gradient de température supérieur au gradient adiabatique ; elle est donc stable. Lorsque la région inférieure est instable, on retrouve la condition de suradiabatisme. Si la région supérieure est également instable, la couche d'inversion bloque toute communication entre ces deux régions.

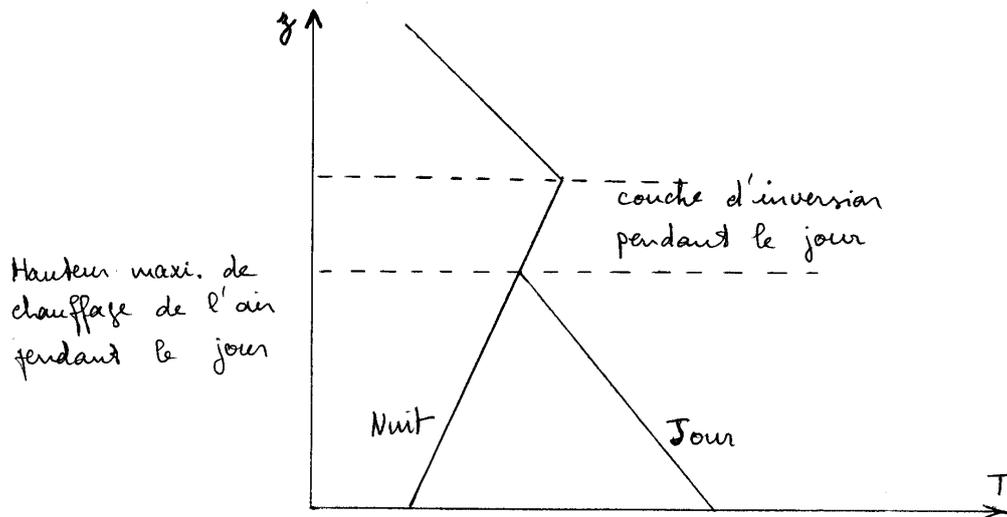


FIG. 1.4 – Représentation schématique d'une couche d'inversion

### 1.6. – Comportement d'une bouffée exogène

Imaginons à présent une bouffée chaude (on dit parfois aussi une *bulle*, mais les deux appellations permettent d'utiliser l'indice  $b$ ) générée au niveau  $z_I$ . Parmi les multiples causes possibles, on peut citer un échauffement local au sol dû à l'éclairement du soleil à travers une trouée dans les nuages, ou une source chaude comme une cheminée.

En  $z_I$ , les paramètres de l'atmosphère sont :  $p_I ; \rho_I ; T_I$ , et ceux de la bouffée :  $p_b ; \rho_b ; T_b$  (équilibre des pressions),  $\rho_{bI} ; T_{bI}$ . Le profil linéarisé de température atmosphérique est, selon (1.16b) :

$$T = T_I + \lambda z \quad (1.27a)$$

La question est de savoir à quelle altitude la bouffée va se stabiliser.

En admettant un comportement isentropique de cette bouffée, sa température  $T_b$  va évoluer en fonction de l'altitude selon la loi (1.13), soit avec les notations présentes :

$$T_b = T_{bI} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_I g T_{bI}}{p_I} z \quad (1.27b)$$

ou plus commodément, selon (1.16c) :

$$T_b = T_{bI} + \lambda_{ad} z \quad (1.27c)$$

La bouffée se stabilisera quand sa masse volumique sera identique à celle de l'atmosphère ambiante, c'est-à-dire quand les deux seront en équilibre thermique, donc lorsqu'on aura  $T = T_b$ , soit :

$$T_I + \lambda z = T_{bI} + \lambda_{ad} z$$

d'où l'altitude correspondante :

$$z = \frac{T_{bI} - T_I}{\lambda - \lambda_{ad}} \quad (1.27d)$$

avec :  $\lambda_{ad} = (dT/dz)_{ad} = -0,01^\circ\text{C}/m$  d'après (1.15b).

Lorsque  $\lambda = \lambda_{ad}$  (atmosphère neutre, § 1.4 ♠), on voit que la stabilisation n'a jamais lieu. Pour  $\lambda > \lambda_{ad}$  (atmosphère stable),  $z$  est positif, il existe donc une altitude d'équilibre. Par contre, avec  $\lambda < \lambda_{ad}$  (atmosphère instable),  $z$  est négatif : il faudrait que la bouffée descende pour trouver un niveau d'équilibre, mais comme elle va monter puisqu'elle est plus chaude, cet équilibre ne sera jamais atteint.

Toutefois, on voit bien qu'il y a dans ce résultat théorique quelque chose d'un peu réducteur au point de vue physique. Ceci a le mérite d'illustrer les limites de l'hypothèse adiabatique : en réalité, par diffusion thermique et massique, l'équilibre de température finit toujours par se réaliser avec l'ambiance, et la stabilisation se fait alors d'elle-même. En plus, une loi comme (1.27a) n'est valable que sur une hauteur limitée. Mais malgré cela, les tendances sont correctement dégagées par cette analyse élémentaire.

### 1.7. – Formation d'un nuage

Supposons maintenant que l'air est humide. C'est un mélange d'air sec et de vapeur d'eau qui sera considéré comme un gaz parfait. A la température  $T$ , on désigne par  $P_V$  la pression partielle de vapeur d'eau, et par  $P_S$  la pression de vapeur saturante. On définit le *degré hygrométrique local* de l'air par :

$$h = \frac{P_V}{P_S} \quad (1.28a)$$

En première approximation,  $P_S$  est liée à la température par :

$$\ln P_S = 26,4 - \frac{5450}{T} \quad (1.28b)$$

Un nuage se forme à l'apparition de la condensation, c'est-à-dire lorsque :

$$P_V = P_S \quad \text{ou encore} \quad h = 1 \quad (1.28c)$$

Reprenons un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, mais cette fois, la bouffée qui se forme à l'altitude  $z_I$  n'est pas une bulle plus chaude : elle reçoit une certaine quantité de vapeur d'eau, par évaporation, ou émission à partir d'une cheminée, ce qui lui donnera un degré hygrométrique  $h_{bI}$ . Les caractéristiques de la bouffée et de l'air sont donc :

- A l'altitude  $z_I$ 
  - pour l'air :  $p_I ; T_I ; P_{S1} ; h_I = 0$  (air sec)
  - pour la bouffée :  $p_{bI} = p_I ; T_{bI} = T_I ; h_{bI} ; P_{V1}$
- A l'altitude  $z$ 
  - pour l'air :  $p ; T ; h = 0$
  - pour la bouffée :  $p_b = p ; T_b ; h_b ; P_{Vb}$

Les conditions étant fixées au niveau  $z_I$ , on cherche à quelle altitude aura lieu la condensation. L'hypothèse du gaz parfait pour l'air humide a comme conséquence :

$$\frac{P_{Vb}}{p} = cte = \frac{P_{V1}}{p_I} \quad (1.28d)$$

La bouffée obéit à la relation (1.6) qui s'écrit, avec les présentes notations :

$$\frac{T_b}{T_l} = \left( \frac{p_b}{p_l} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.29a)$$

La conjonction de (1.28d) et (1.29a) donne :

$$\frac{T_b}{T_l} = \left( \frac{P_{Vb}}{P_{Vl}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Puisque nous nous intéressons à la formation du nuage, qui se produira lorsque  $P_{Vb} = P_S$  (relation 1.28c), il faut en tirer  $P_{Vb}$  :

$$P_{Vb} = P_{Vl} \left( \frac{T_b}{T_l} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.29b)$$

avec, d'après (1.28a) :

$$P_{Vl} = h_{bl} P_{Sl} \quad (1.29c)$$

d'où, en faisant intervenir (1.28b), la température de condensation  $T_b$  dans la bouffée d'air humide, obtenue en résolvant l'équation :

$$\exp\left(26,4 - \frac{5450}{T_b}\right) = h_{bl} P_{Sl} \left( \frac{T_b}{T_l} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.30)$$

Choisissons comme application numérique :  $T_l = 280 K$  et  $h_{bl} = 0,75$ . On obtient avec (1.28b) :  $P_{Sl} = 1028 Pa$ , et (1.30) donne la température de formation du nuage :

$$T_b = 275 K$$

Pour déterminer l'altitude correspondante, il faut connaître le profil de température dans l'atmosphère. Prenons par exemple une atmosphère stable, avec  $\lambda = -0,65.10^{-2} K/m$  ( $\lambda > \lambda_{ad}$ , § 1.6). A partir de  $T_b = T_l + \lambda z$ , on tire alors :

$$z = 770 m$$

On se doit de réitérer ici les réserves exprimées au § 1.6 sur les hypothèses simplificatrices adoptées. Malgré tout, une théorie élémentaire comme celle-ci a le mérite de donner des indications physiques intéressantes.

Ajoutons que, dans certaines circonstances (liées aux variations de température et d'humidité selon  $z$ ), il peut se produire une répétitivité dans la formation des bancs de nuages, donnant une structure en mille-feuille. Ce phénomène est difficilement perceptible depuis le sol, sauf dans certaines régions où le relief est favorable à son observation (fig. 1.5).



FIG. 1.5 – *Stratifications nuageuses. En haut : Côte de l'Alaska. En bas : Vallée de l'Alsek (Yukon, Canada) (Photographies de l'auteur)*

## 1.8. – Approche dynamique de la stabilité

### 1.8.1. – BASES

La théorie élémentaire présentée au paragraphe 1.4. peut être considérée comme une approche « statique » de la stabilité, car on y recherche une condition pour qu'une particule fluide déplacée ait envie de retourner d'où elle vient, sans considération de mouvement.

Envisageons maintenant une approche plus dynamique, qui prenne en compte le déclenchement du mouvement, celui-ci étant accessible par la relation fondamentale de la mécanique :

$$\vec{F} = m \vec{\gamma} \quad (1.31a)$$

On considère donc un fluide ambiant stratifié, de masse volumique  $\rho = \rho(z)$ , dans lequel la pression obéit à la loi de l'hydrostatique (1.1). A l'altitude  $z$ , se trouve une particule fluide de masse volumique  $\rho_p$ , provenant du niveau  $z_0$  (on prend généralement  $z_0 = 0$ ), et à la même pression que le fluide ambiant (cf § 1.4. ♥).

La force exercée sur cette particule est son poids apparent (1.20b), soit en raisonnant sur un volume unité :

$$P_a = g(\rho - \rho_p) \quad (1.31b)$$

Toujours pour un volume unité, en projection sur l'axe  $z$ , la relation (1.31a) devient alors :

$$g(\rho - \rho_p) = \rho_p \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1.31c)$$

Admettons que  $z$  est voisin de  $z_0$ . La masse volumique en  $z_0$  est notée  $\rho_0$ . Elle est la même pour le fluide ambiant et pour la particule dans son état initial :

$$\rho(0) = \rho_0 = \rho_{p0} \quad (1.31d)$$

Un développement limité au premier ordre de  $\rho$  et  $\rho_p$  au voisinage de  $z_0$  donne alors :

$$\rho = \rho_0 + (z - z_0) \frac{d\rho}{dz} \quad (1.32a)$$

$$\rho_p = \rho_0 + (z - z_0) \frac{d\rho_p}{dz} \quad (1.32b)$$

et (1.31c) devient, en posant  $z_0 = 0$  :

$$g z \left( \frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_p}{dz} \right) = \rho_p \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1.33)$$

### 1.8.2. – CAS DES LIQUIDES

Pour les liquides, la masse volumique ne dépend que de la température. On a donc dans le fluide ambiant :

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho}{dT} \frac{dT}{dz} = -\rho_0 \beta \frac{dT}{dz} \quad (1.34a)$$

où  $\beta$  est le coefficient de dilatation thermique (ou *dilatabilité*) du fluide, en  $K^{-1}$  (voir FEMM, 2.15a).

Quant à la particule fluide, on admet que son déplacement se fait de façon adiabatique, et que sa température ne change pas, d'où :

$$\frac{d\rho_p}{dz} = 0 \quad (1.34b)$$

L'équation du mouvement (1.33) s'écrit finalement, en prenant en compte (1.31d) et en simplifiant par  $\rho_0$  :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left( g \beta \frac{dT}{dz} \right) z = 0 \quad (1.35a)$$

le gradient de température  $dT/dz$  dans le fluide étant donné.

En vue d'alléger l'écriture, posons :

$$N^2 = g \beta \frac{dT}{dz} \quad (1.35b)$$

de sorte que :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z = 0 \quad (1.36)$$

Les solutions de cette équation sont de trois sortes, selon le signe de  $dT/dz$ , et caractérisent l'état du fluide au regard de la stabilité :

- \*  $N^2 > 0$  :  $dT/dz > 0 \Rightarrow z \propto e^{i|N|t}$  : *stable* (mouvement oscillant)
- \*  $N^2 < 0$  :  $dT/dz < 0 \Rightarrow z \propto e^{\sqrt{|N^2|}t}$  : *instable* (mouvement accéléré) (1.37)
- \*  $N^2 = 0$  :  $dT/dz = 0 \Rightarrow z = cte$  (en l'absence de vitesse initiale) : *neutre*

Dans ce calcul simple, les frottements visqueux n'ont pas été pris en compte. Ils ont évidemment un effet amortisseur sur le mouvement, mais ne modifient pas fondamentalement les résultats précédents. Ceux-ci sont conformes à ce qu'une analyse intuitive basée sur le théorème d'Archimède pouvait laisser prévoir, à savoir que la stratification sera stable si le liquide est plus froid au fond qu'à la surface.

### 1.8.3. – CAS DES GAZ

Pour les gaz, la démarche est presque identique à celle du paragraphe 1.4. Exposons-la cependant, car elle apporte quelques précisions supplémentaires.

Dans l'atmosphère ambiante, la propriété (1.34a) est remplacée ici par l'équation d'état  $p/\rho = rT$  (ce qui revient à dire que  $\beta = 1/T$ , voir Annexe 1.2). En y ajoutant la loi de l'hydrostatique  $dp/dz = -\rho g$  ; on arrive à :

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{g \rho^2}{p} - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dz} \quad (1.38a)$$

Quant à la particule fluide, elle obéit simultanément à la loi de l'hydrostatique, et à la loi isentropique (1.22), qui s'écrit avec les présentes notations :  $d\rho_p/\rho_p = (1/\gamma)(dp/p)$  ( $dp$  et  $p$  étant les mêmes que dans l'atmosphère ambiante, en raison de l'équilibre des pressions). Il vient alors, en admettant que  $\rho_p/\rho \cong \rho^2$  :

$$\frac{d\rho_p}{dz} = -\frac{\rho^2 g}{\gamma p} \quad (1.38b)$$

d'où :

$$\frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_p}{dz} = -\frac{g\rho^2}{p} - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dz} + \frac{g\rho^2}{\gamma p} = -\frac{\rho}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} + \frac{\rho g T}{p} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right\}$$

On retrouve ici le gradient adiabatique de référence (définition 1.15a), et alors :

$$\frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_p}{dz} = -\frac{\rho}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.38c)$$

En remplaçant dans (1.33), et en admettant que  $\rho \cong \rho_p$ , on obtient :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z = 0 \quad (1.39a)$$

avec :

$$N^2 = \frac{g}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.39b)$$

Vis-à-vis de la stabilité, les conclusions sont analogues à celles du paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} N^2 > 0 &\Rightarrow z \propto e^{i|N|t} && : \text{stabilité} \\ N^2 < 0 &\Rightarrow z \propto e^{\sqrt{|N^2|}t} && : \text{instabilité} \\ N^2 = 0 &\Rightarrow dz/dt = cte = 0 && : \text{neutralité} \end{aligned} \quad (1.40)$$

En outre, ces résultats confirment le bien-fondé de l'analyse simplifiée qui a fait l'objet du paragraphe 1.4. En particulier, pour la neutralité, on retrouve la condition :

$$\frac{dT}{dz} = \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \quad (1.41)$$

🎵 L'intérêt du paramètre  $N$  est de quantifier le degré d'instabilité (ou de stabilité) hydrostatique, qui est donc fonction de l'écart entre le gradient réel et le gradient adiabatique de température, et aussi de  $1/T$  : toutes choses égales par ailleurs, on se rapproche donc de la neutralité lorsque la température augmente.

#### 1.8.4. – TEMPÉRATURE POTENTIELLE

Dans la littérature, on introduit parfois une « température potentielle  $\Theta$  » définie par :

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{dT}{dz} - \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \quad (1.42a)$$

(cf. 1.15a, 1.39b), soit :

$$\Theta = T - T_0 - z \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \quad (1.42b)$$

ou encore, avec (1.16a) :

$$\Theta = T - T_{ad} \quad (1.42c)$$

En thermodynamique, d'après la relation de Mayer, on a :

$$r = \frac{\gamma - 1}{\gamma} C_p \quad (1.43a)$$

Sachant que :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g}{r}$$

la définition précédente s'écrit donc aussi :

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{dT}{dz} + \frac{g}{C_p} \quad (1.43b)$$

d'où :

$$\Theta = T + \frac{g}{C_p} z + cte \quad (1.43c)$$

🎵 La littérature livre d'autres définitions de la température potentielle (ou de la température adiabatique 1.16a). Il est recommandé de toujours bien vérifier la définition de ces diverses grandeurs avant de les utiliser.

## 1.9. – Équilibre et stabilité des ballons à air chaud et des ballons à gaz

### 1.9.1. – OBJETS VOLANTS PLUS LÉGERS QUE L'AIR

L'équilibre et la stabilité des diverses catégories de ballons sont en relation étroite avec les propriétés de l'atmosphère. Leur étude trouve naturellement sa place ici, comme application des paragraphes précédents.

Les ballons contiennent un gaz plus léger que l'air, et utilisent la poussée d'Archimède pour se mouvoir verticalement. On en distingue deux familles, selon le gaz utilisé :

- *Les ballons à air chaud* (plus souvent appelés « *montgolfières* ») : leur enveloppe est peu extensible ; le volume d'air qu'ils contiennent est donc fixé. La température de cet air est variable : elle est commandée par un brûleur à gaz placé au-dessus de la nacelle, et par une soupape d'évacuation située au sommet de l'enveloppe. Quant à la pression intérieure, elle est en équilibre avec la pression extérieure, les ballons étant ouverts à leur partie inférieure.
- *Les ballons à gaz* (en fait à hélium, l'hydrogène étant abandonné pour des raisons de sécurité) : leur enveloppe est incomplètement gonflée, et leur volume est donc variable. C'est la masse de gaz contenue dans l'enveloppe qui est imposée. Du fait de la déformabilité de l'enveloppe, l'équilibre de pression est également réalisé entre le gaz et l'air ambiant.

On notera que, quelle que soit sa catégorie, le comportement d'un ballon est analogue à celui d'une particule fluide (bouffée d'air ou bulle) écartée de son point d'équilibre (§.1.4 et 1.8), ou d'une bouffée exogène (§.1.6) : au cours d'un déplacement vertical, il est admis en première approximation que le gaz du ballon subit une évolution isentropique, tandis que l'atmosphère ambiante répond à la loi des gaz parfaits.

## 1.9.2. – BALLONS À AIR CHAUD (MONTGOLFIÈRES)

### 1.9.2.1. – Données

Les données principales sont :

- le volume  $\Omega$  de l'enveloppe
- la pression atmosphérique  $p(z)$ , la température  $T(z)$  et le gradient  $dT/dz$
- la température  $T_b$  du gaz dans le ballon (ou sa masse volumique  $\rho_b$ )
- la masse propre  $M_b$  du ballon (enveloppe, nacelle, bouteilles de gaz, passagers...)

### 1.9.2.2. – État d'équilibre initial

Admettons que la montgolfière soit stabilisée à l'altitude  $z$ , la poussée hydrostatique  $F_p(z)$  équilibrant son poids total  $P_{te}$ , qui comprend le poids propre et le poids du gaz :

$$P_{te} = M_b g + \rho_b \Omega g \quad (1.44a)$$

$$F_p(z) = \rho \Omega g \quad (1.44b)$$

A l'équilibre, le poids apparent  $P_{ae}$  du ballon (1.20b) est nul :

$$P_{ae} = F_p(z) - P_{te} = 0 \quad (1.44c)$$

soit :

$$(\rho - \rho_b) \Omega - M_b = 0 \quad (1.44d)$$

### 1.9.2.3. – Intervention d'une commande d'altitude

Cette commande consiste, soit à chauffer l'air du ballon au moyen d'un brûleur à gaz, soit à évacuer de l'air chaud par la soupape supérieure (celui-ci est remplacé par de l'air froid qui entre naturellement par l'ouverture inférieure).

Dans les deux cas, on considère que l'opération est très rapide, et se traduit par un échelon de température  $\Delta T_b$  dans le ballon, d'où un échelon de masse volumique  $\Delta \rho_b$ . Le niveau  $z$  ne change pas ; la transformation est donc isobare, de sorte que selon la loi des gaz parfaits  $\rho_b = p / r T_b$ . En prenant la dérivée logarithmique il vient :

$$\frac{\Delta \rho_b}{\rho_b} = - \frac{\Delta T_b}{T_b} \quad (1.45)$$

Le poids total (1.44a) est alors :

$$P_t(z) = M_b g + (\rho_b + \Delta \rho_b) \Omega g \quad (1.46a)$$

La poussée  $F_p(z)$  (1.44b) n'est pas modifiée, d'où le nouveau poids apparent :

$$P_a(z) = F_p(z) - P_t(z) = (\rho - \rho_b - \Delta \rho_b) \Omega g - M_b g$$

et compte tenu de (1.44d) :

$$P_a(z) = - \Delta \rho_b \Omega g \quad (1.46b)$$

ou encore, avec (1.45) :

$$P_a(z) = \rho_b \frac{\Delta T_b}{T_b} \Omega g \quad (1.46c)$$

Le ballon est donc maintenant soumis à une force dirigée vers le bas ou vers le haut selon le signe de  $\Delta T_b$ , ce qui a pour conséquence un mouvement vertical.

#### 1.9.2.4. – Phase transitoire

Examinons ensuite la situation lorsque le ballon passe à l'altitude  $z + dz$ .

La masse volumique de l'air extérieur devient :  $\rho + d\rho$ , la variation  $d\rho$  étant donnée par (A 2.3a) (Annexe 1.2) :

$$d\rho = -\frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right) dz \quad (1.47)$$

La pression dans le ballon est égale à la pression ambiante, soit maintenant  $p + dp$ . L'air chaud subit une évolution adiabatique, d'où une variation de masse volumique  $\delta(\rho_b + \Delta\rho_b)$  gouvernée par la loi (1.22), soit ici :

$$\frac{\delta(\rho_b + \Delta\rho_b)}{\rho_b + \Delta\rho_b} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} \quad (1.48)$$

D'après (1.21), on a :

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (1.49a)$$

ce qui s'écrit aussi, avec (1.47) :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= -\frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right) dz + \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} dz \\ \frac{dp}{p} &= \frac{1}{T} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} dz \end{aligned} \quad (1.49b)$$

Pendant le déplacement  $dz$ , à partir de (1.48), la masse volumique dans le ballon varie donc de :

$$\delta(\rho_b + \Delta\rho_b) = \frac{\rho_b + \Delta\rho_b}{T} \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} dz \quad (1.50a)$$

Cette variation doit être reliée à la variation de température  $\Delta T_b$  de l'air chaud (qui est le paramètre de commande), selon (1.45) :

$$\delta(\rho_b + \Delta\rho_b) = \frac{1}{\gamma-1} \frac{\rho_b}{T} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} dz \quad (1.50b)$$

d'où une variation du poids du ballon :

$$dP_t = \delta(\rho_b + \Delta\rho_b) \Omega g \quad (1.51a)$$

$$dP_t = \frac{1}{\gamma-1} \frac{\rho_b}{T} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \Omega g dz \quad (1.51b)$$

Entre  $z + dz$ , la variation de la poussée (1.44b) a pour valeur :

$$dF_p = d\rho \Omega g \quad (1.52a)$$

ou, avec (1.47) :

$$dF_p = -\frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right) \Omega g dz \quad (1.52b)$$

Le poids apparent (1.46b) devient alors :

$$P_a(z + dz) = P_a(z) + dF_p - dP_t \quad (1.53)$$

### 1.9.2.5. – Nouvelle position d'équilibre

Pour une variation finie d'altitude  $\Delta z$ , on aura en admettant  $dT/dz = cte$  :

$$P_a(z + \Delta z) = \rho_b \frac{\Delta T_b}{T_b} \Omega g - \left[ \frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\rho_b}{T} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right] \Omega g \Delta z \quad (1.54a)$$

La nouvelle altitude d'équilibre  $z + \Delta z_e$  est atteinte lorsque  $P_a(z + \Delta z_e) = 0$ , soit après simplification et regroupement des termes :

$$\rho_b \frac{\Delta T_b}{T_b} = \frac{\rho}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_b}{\rho} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e \quad (1.54b)$$

Mais sachant que, en  $z = 0$ , du fait de l'équilibre des pressions :

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad \text{et} \quad \frac{p}{\rho_b} = rT_b$$

on a :

$$\frac{\rho_b}{\rho} = \frac{T}{T_b} \quad (1.54c)$$

qu'il est préférable de remplacer dans (1.54b) :

$$\frac{T}{T_b} \frac{\Delta T_b}{T_b} = \frac{1}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e \quad (1.55)$$

d'où l'on tire  $\Delta z_e$ .

On notera que  $\Delta z_e$  ne dépend ni de la masse du ballon, ni de son volume, mais uniquement des grandeurs qui caractérisent l'air chaud et l'atmosphère.

D'autre part, avec  $\Delta T_b > 0$ , le poids apparent (1.46c) est positif, le déplacement aura lieu vers le haut, et donc on doit avoir  $\Delta z_e > 0$ . Ceci n'est possible que si l'expression entre accolades est positive. De même elle devra aussi être positive si  $\Delta T_b < 0$ , puisqu'alors  $\Delta z_e$  sera négatif (déplacement vers le bas). Autrement dit, *la condition d'existence d'une position d'équilibre* est :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} > 0 \quad (1.56)$$

### 1.9.2.6. – Stabilité du ballon à air chaud

Pour préciser dans quelles conditions la stabilité du ballon est assurée, revenons au paragraphe 1.8.1, et pour commencer à la relation (1.31a) dans laquelle  $F$  est ici le poids apparent  $P_a$ , et  $m$  la masse totale  $M_t$  du ballon. Il sera plus commode de reprendre les mêmes

notations, l'indice 0 représentant le niveau de départ (avec  $z_0 = 0$ ), et  $z$  l'ordonnée courante. L'équation de la dynamique s'écrit en conséquence :

$$P_a(z) = M_t(z) \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1.58)$$

où  $P_a(z)$  est donné par (1.54a), et où la masse totale :

$$M_t(z) = M_t(z_0) + \Delta M_t(z) = \frac{I}{g} (P_t(z_0) + \Delta P_t(z)) \quad (1.59a)$$

est déduite de (1.46a) et (1.51b).

Alors (1.58) devient, avec l'appoint de (1.45) :

$$M_t(z) = M_b + (\rho_b - \rho_b \frac{\Delta T_b}{T_b}) \Omega + \frac{I}{\gamma - 1} \frac{\rho_b}{T} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \Omega z \quad (1.59b)$$

En première approximation, nous négligerons le terme en  $z$  (une vérification numérique montre qu'il intervient pour moins de 1%). Si l'on inclut en outre la relation d'équilibre (1.44d), il reste :

$$M_t(z) = \left( \rho - \rho_b \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \Omega \quad (1.59c)$$

Reportons (1.54a) (en remplaçant  $\Delta z$  par  $z$ ) et (1.59c) dans (1.58). On voit alors que cette dernière s'écrit d'une manière analogue à (1.39a) :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z + cte = 0 \quad (1.59d)$$

avec :

$$N^2 = \frac{\rho}{\rho - \rho_b (\Delta T_b / T_b)} \frac{g}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_b}{\rho} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.60)$$

soit, compte tenu de (1.54c) :

$$N^2 = \frac{I}{1 - \frac{T}{T_b} \frac{\Delta T_b}{T_b}} \frac{g}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \left( 1 - \frac{\Delta T_b}{T_b} \right) \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.61)$$

Le critère de stabilité est le même qu'en (1.40), à savoir :

$$N^2 > 0$$

et l'on retrouve la condition (1.56) obtenue en considérant l'altitude d'équilibre.

**!!** Cependant, le paramètre  $N^2$  permet de quantifier le degré de stabilité, et donc de comparer les conditions de stabilité des différents types de ballon (§ 1.10).

**!!!** Il y a une différence évidente entre les équations (1.39a) et (1.60) : la seconde comporte une constante, tandis que la première n'en a pas. La raison en est que l'étude du paragraphe 1.8. porte sur une bouffée déplacée de sa position d'équilibre, de sorte que l'accélération est nulle lorsqu'elle repasse en  $z = 0$ . Ici, nous sommes dans une situation comparable à celle d'une bouffée exogène (§ 1.6), dont l'état d'équilibre est modifié, si bien qu'elle est soumise à une accélération initiale en  $z = 0$ , ce qui est exprimé par le terme constant de (1.59d).

Par contre, avant son décollage, la montgolfière est arrimée au sol par une corde, sur laquelle elle exerce une traction. Tout se passe alors comme si elle était déplacée de sa position d'équilibre et on retrouve les conditions de l'équation (1.39a) quand elle est libérée.

### 1.9.3. – BALLONS À GAZ

Nous reprenons pour les ballons à gaz le cadre de raisonnement et les notations utilisés pour les montgolfières. Mais maintenant, le volume  $\Omega$  de l'enveloppe est variable, tandis que la masse de gaz embarquée est fixée.

#### 1.9.3.1 – Données

Les données principales sont :

- la pression atmosphérique  $p(z)$ , la température  $T(z)$  et le gradient  $dT/dz$
- la masse  $M_g$  du gaz contenu dans l'enveloppe, et sa masse volumique  $\rho_g(T)$
- la masse propre  $M_b$  du ballon (enveloppe, nacelle, passagers...)

#### 1.9.3.2. – État d'équilibre initial

Admettons que le ballon soit en équilibre à l'altitude  $z$ , la poussée hydrostatique  $F_p(z)$  équilibrant son poids total  $P_{te}$ , qui comprend le poids propre et le poids du gaz :

$$P_{te} = M_b g + M_g g \quad (1.62)$$

La température et la pression du gaz sont égales à la pression  $p$  et à la température  $T$  ambiantes. On en déduit la masse volumique du gaz :

$$\rho_g = \frac{p}{r_g T} \quad (1.63a)$$

où  $r_g$  est la constante du gaz parfait considéré ( $r_g = 2060 \text{ J/kg.K}$  pour l'hélium).

Le volume  $\Omega$  de l'enveloppe (qui n'est pas imposé *a priori*) est alors :

$$\Omega = \frac{M_g}{\rho_g} = M_g \frac{r_g T}{p} \quad (1.63b)$$

d'où la poussée appliquée au ballon :

$$F_p = \rho \Omega g = \rho M_g \frac{r_g T}{p} g \quad (1.63c)$$

et comme, dans l'atmosphère :

$$p / \rho T = r \quad (1.63d)$$

il vient :

$$F_p = \rho \Omega g = M_g \frac{r_g}{r} g \quad (1.64)$$

Le poids apparent du ballon (1.20b) est nul à l'équilibre :

$$P_{ae} = F_p - P_{te} = 0 \quad (1.65a)$$

d'où la condition d'équilibre:

$$M_g \left( \frac{r_g}{r} - 1 \right) - M_b = 0 \quad \text{ou} \quad \rho \Omega - M_b - M_g = 0 \quad (1.65b)$$

### 1.9.3.3. – Intervention d'une commande d'altitude

Sauf dans des cas très spécifiques, les ballons à gaz n'emportent pas de bouteille de gaz d'appoint. La commande d'altitude consiste à larguer du lest pour monter (voir § 1.9.4), et à évacuer du gaz par une soupape pour descendre.

Ce dernier cas revient à imposer une variation de la masse de gaz :  $\Delta M_g < 0$ .

Le poids total devient alors :

$$P_t(z) = M_b g + (M_g + \Delta M_g) g \quad (1.66)$$

D'autre part, la variation de  $M_g$  entraîne une variation  $\Delta \Omega$  du volume de l'enveloppe, qui a pour expression (cf. 1.63b) :

$$\Delta \Omega = \Delta M_g \frac{r_g T}{p} \quad (1.67)$$

d'où une nouvelle valeur de la poussée (cf. 1.64) :

$$F_p(z) = \rho (\Omega + \Delta \Omega) g = (M_g + \Delta M_g) \frac{r_g}{r} g \quad (1.68)$$

et un nouveau poids apparent :

$$P_a(z) = F_p(z) - P_t(z) = \left\{ (M_g + \Delta M_g) \frac{r_g}{r} - M_b - (M_g + \Delta M_g) \right\} g \quad (1.69a)$$

ce qui donne, avec la condition d'équilibre (1.65b) :

$$P_a(z) = \Delta M_g \left( \frac{r_g}{r} - 1 \right) g \quad (1.69b)$$

Le ballon est donc maintenant soumis à une force dirigée vers le bas ( $\Delta M_g < 0$ ), avec pour conséquence un mouvement vertical descendant.

### 1.9.3.4. – Phase transitoire

Quand le ballon arrive à l'altitude  $z + dz$ , la masse volumique de l'air extérieur devient  $\rho + d\rho$ , la variation étant donnée par (1.47) :

$$d\rho = -\frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right) dz \quad (1.70)$$

La pression dans le ballon est égale à la pression ambiante, soit maintenant  $p + dp$ . Le gaz subit une évolution adiabatique, d'où une variation de masse volumique  $\delta \rho_g$  gouvernée par la loi (1.22), qui s'écrit ici :

$$\frac{\delta \rho_g}{\rho_g} = \frac{1}{\gamma_g} \frac{dp}{p} \quad (1.71a)$$

où  $\gamma_g$  est l'exposant de la loi de transformation isentropique pour le gaz considéré ( $\gamma_g = 1,66$  dans le cas de l'hélium).

La variation de pression dans l'atmosphère est encore donnée par (1.49b) :

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{T} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} dz \quad (1.71b)$$

d'où :

$$\delta p_g = \frac{\gamma}{\gamma_g} \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\rho_g}{T} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} dz \quad (1.71c)$$

Elle a pour conséquence une variation  $\delta(\Omega + \Delta\Omega)$  du volume du ballon :

$$\delta(\Omega + \Delta\Omega) = (M_g + \Delta M_g) \delta \left( \frac{1}{\rho_g} \right) = - (M_g + \Delta M_g) \frac{\delta p_g}{\rho_g^2} \quad (1.72a)$$

le volume total de l'enveloppe étant à présent :

$$\Omega(z + dz) = \Omega + \Delta\Omega + \delta(\Omega + \Delta\Omega) \quad (1.72b)$$

La valeur correspondante de la poussée (1.68) a donc pour expression :

$$F_p(z + dz) = (\rho + d\rho) [\Omega + \Delta\Omega + \delta(\Omega + \Delta\Omega)] g \quad (1.73)$$

Pendant ce temps, la masse totale  $M_g + \Delta M_g$  ne change pas, et le poids total est toujours (1.66):

$$P_t(z + dz) = P_t(z) = P_t$$

On en déduit le poids apparent :

$$P_a(z + dz) = F_p(z + dz) - P_t \quad (1.74a)$$

soit, en développant :

$$P_a(z + dz) = (\rho + d\rho) [\Omega + \Delta\Omega + \delta(\Omega + \Delta\Omega)] g - (M_b + M_g + \Delta M_g) g \quad (1.74b)$$

D'après la condition d'équilibre (1.65b) :

$$\rho \Omega = M_b + M_g \quad (1.74c)$$

En négligeant le terme du second ordre ( $d\rho \delta\Omega$ ), il reste :

$$\frac{1}{g} P_a(z + dz) = \rho \{ \Delta\Omega + \delta(\Omega + \Delta\Omega) \} + d\rho (\Omega + \Delta\Omega) - \Delta M_g \quad (1.75)$$

Les différents termes de cette expression sont donnés par (1.63b), (1.67), (1.70) et (1.72a). On y ajoutera (1.63a) et (1.63d) d'après lesquelles :

$$\frac{\rho}{\rho_g} = \frac{r_g}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\rho T}{p} = \frac{1}{r} \quad (1.76)$$

Pour une variation finie d'altitude  $\Delta z$ , en admettant à nouveau  $dT/dz = cte$ , le calcul donne finalement :

$$\frac{1}{g} P_a(z + \Delta z) = \Delta M_g \left( \frac{r_g}{r} - 1 \right) - (M_g + \Delta M_g) \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z \quad (1.77a)$$

### 1.9.3.5. – Nouvelle position d'équilibre

La nouvelle position d'équilibre  $z + \Delta z_e$  est atteinte lorsque  $P_a(z + \Delta z_e) = 0$ , ce qui donne la valeur de  $\Delta z_e$  :

$$\Delta M_g \left( \frac{r_g}{r} - 1 \right) = (M_g + \Delta M_g) \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e \quad (1.77b)$$

De même que pour le ballon à air chaud (§ 1.9.2.5), on constate ici que  $\Delta z_e$  est indépendant de la masse propre  $M_b$ . Ce paramètre ne dépend pas non plus de la masse de gaz embarquée, mais seulement de sa variation relative  $\Delta M_g / M_g$ .

Nous avons dit également que l'opération consiste à évacuer du gaz ( $\Delta M_g < 0$ ), ce qui fait descendre le ballon ( $\Delta z_e < 0$ ). Sachant que  $r_g > r$  et  $M_g > |\Delta M_g|$ , la condition d'existence d'une altitude d'équilibre est donc :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} > 0 \quad (1.78)$$

### 1.9.3.6. – Stabilité du ballon à gaz

Reprenons le développement et les notations du paragraphe 1.9.2.6. L'équation de départ est encore (1.58):

$$P_a(z) = M_t(z) \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1.79a)$$

où  $P_a(z)$  provient de (1.69b), et où :

$$M_t(z) = M_b + M_g + \Delta M_g = cte \quad (1.79b)$$

Elle se met à nouveau sous la forme :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z + cte = 0 \quad (1.79c)$$

avec :

$$N^2 = \frac{M_g + \Delta M_g}{M_b + M_g + \Delta M_g} \frac{g}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.80)$$

Le critère de stabilité est toujours :

$$N^2 > 0$$

et l'on retrouve la condition (1.78), avec les mêmes commentaires qu'au § 1.9.2.6.

## 1.9.4. – DÉLESTAGE D'UN BALLON

Jeter du lest (sous la forme de sable) est un moyen simple de gagner de l'altitude, en diminuant le poids du ballon. Pour les ballons à gaz, c'est d'ailleurs le seul moyen utilisé. Il est rarement mis en œuvre avec les ballons à air chaud, sauf cas d'urgence. Cependant, si nous voulons comparer des choses comparables, il est nécessaire d'étudier le comportement des deux types de ballons lors d'un délestage.

### 1.9.4.1. – Délestage d'un ballon à air chaud

Il n'est pas nécessaire de reprendre tous les calculs. Notons simplement les différences par rapport à une commande d'altitude utilisant l'air chaud du ballon (§ 1.9.2).

♣ A l'instant de la commande, il n'y a pas de variation de température, et (1.45) devient :  

$$\Delta T_b = \Delta \rho_b = 0 \quad (1.81a)$$

C'est maintenant la masse propre du ballon qui est diminuée de  $\Delta M_b$  (masse du lest balancé), et le poids total (1.46a) est donné par :

$$P_t(z) = (M_b - \Delta M_b)g + \rho_b \Omega g \quad (1.81b)$$

La poussée  $F_p(z)$  (1.44b) et la condition d'équilibre initial (1.44d) sont inchangées, d'où le nouveau poids apparent (1.46) :

$$P_a(z) = F_p(z) - P_t(z) = \Delta M_b g \quad (1.81c)$$

◆ Pendant le déplacement, la variation (1.51b) du poids du ballon est :

$$dP_t = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\rho_b}{T} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \Omega g dz \quad (1.82a)$$

La variation de la poussée (1.52b) restant la même, le poids apparent (1.53 – 1.54a) est remplacé par :

$$P_a(z + \Delta z) = \Delta M_b g - \left[ \frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{dz} \right)_{ad} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\rho_b}{T} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right] \Omega g \Delta z \quad (1.82b)$$

d'où la nouvelle altitude d'équilibre  $\Delta z_e$ , donnée avec l'assistance de (1.54c) par :

$$\Delta M_b = \frac{\rho}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Omega \Delta z_e \quad (1.83a)$$

La condition (1.56) d'existence d'une position d'équilibre est devenue :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} > 0 \quad (1.83b)$$

Elle est très peu différente de (1.56) (voir § 1.10).

♥ La stabilité du ballon est toujours caractérisée à partir de l'équation dynamique (1.58), dans laquelle, sachant que  $\Delta T_b = 0$ , (1.59b) est remplacée par :

$$M_t(z) = M_b - \Delta M_b + \rho_b \Omega + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\rho_b}{T} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \Omega z \quad (1.84a)$$

soit, avec (1.44d), et en négligeant le terme en  $z$  :

$$M_t(z) = -\Delta M_b + \rho \Omega \quad (1.84b)$$

L'équation (1.58) se met encore sous la forme :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z + cte = 0 \quad (1.84c)$$

où l'on a maintenant, à la place de (1.61) :

$$N^2 = \frac{\rho \Omega}{\rho \Omega - \Delta M_b} \frac{g}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.85)$$

Pour la condition de stabilité ( $N^2 > 0$ ), on retrouve (1.83b).

♠ D'autre part, l'accélération initiale est donnée par la constante de (1.84c) :

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0} = -cte = \frac{\Delta M_b}{\rho \Omega - \Delta M_b} g \quad (1.86)$$

#### 1.9.4.2. – Délestage d'un ballon à gaz

♣ Les conditions initiales sont les mêmes qu'en (1.9.3.2).

A l'instant de la commande, la masse de gaz reste constante ( $\Delta M_g = 0$ ), et le volume aussi ( $\Delta \Omega = 0$ ). C'est la masse propre du ballon qui est diminuée de  $\Delta M_b$ , et le poids total (1.66) est maintenant :

$$P_t(z) = (M_b - \Delta M_b)g + M_g g \quad (1.87a)$$

La poussée  $F_p(z)$  (1.68) reste ici égale à la poussée initiale  $F_p$  (1.64). Le nouveau poids apparent (1.69b) est alors :

$$P_a(z) = F_p(z) - P_t(z) = \left\{ M_g \frac{r_g}{r} - M_b + \Delta M_b - M_g \right\} g \quad (1.87b)$$

soit avec la condition d'équilibre (1.65b) :

$$P_a(z) = \Delta M_b g \quad (1.87c)$$

Au départ, on se trouve donc exactement dans la même situation qu'avec un ballon à air chaud (relation 1.81c).

◆ Pendant le déplacement, le poids du ballon (1.87a) ne varie pas :

$$P_t(z) = P_t(z + dz) = P_t$$

tandis que la poussée (1.73) devient (avec  $\Delta \Omega = 0$ ) :

$$F_p(z + dz) = (\rho + d\rho) [\Omega + \delta\Omega] g \quad (1.88a)$$

ce qui a pour conséquence (en incluant la condition d'équilibre (1.65b), et en négligeant le terme du second ordre  $d\rho \delta\Omega$ ), un nouveau poids apparent :

$$P_a(z + dz) = F_p(z + dz) - P_t = \rho \delta\Omega + d\rho \Omega + \Delta M_b g \quad (1.89a)$$

Les différents termes de cette expression sont donnés par (1.70), (1.72a) puis (1.71c). Sachant que  $\Omega = M_g / \rho_g$ , et compte tenu de (1.76), il vient finalement, à la place de (1.77a) :

$$\frac{1}{g} P_a(z + \Delta z) = \Delta M_b - M_g \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z \quad (1.89b)$$

La position d'équilibre  $\Delta z_e$  est alors donnée par :

$$\Delta M_b = M_g \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e \quad (1.90)$$

Sachant que le délestage doit provoquer une montée du ballon, sa condition d'existence est donc :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} > 0 \quad (1.91)$$

identique à (1.78) (commande par le gaz).

♥ Dans l'équation dynamique (1.79a),  $P_a(z)$  est originaire de (1.89b) (avec à nouveau le changement de notation :  $z = 0$ , et  $\Delta z \Rightarrow z$ ), et  $M_t(z)$  provient de (1.87a) :

$$M_t(z) = M_b - \Delta M_b + M_g \quad (1.92)$$

Le paramètre de stabilité devient :

$$N^2 = \frac{M_g}{M_b - \Delta M_b + M_g} \frac{g}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \quad (1.93)$$

La stabilité est respectée avec  $N^2 > 0$ , condition identique à (1.91).

♠ L'accélération initiale (1.86) est remplacée par :

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0} = -cte = \frac{\Delta M_b}{M_b - \Delta M_b + M_g} g \quad (1.93)$$

## 1.10 – Comportement comparé des ballons à air chaud et des ballons à gaz

### 1.10.1. – BASES DE COMPARAISON

La comparaison ne peut se faire que sur la base de données numériques.

Pour les montgolfières, des ordres de grandeur usuels sont :

$$\begin{array}{lll} M_b = 250 \text{ kg} & \Omega = 2200 \text{ m}^3 & T = 15 \text{ }^\circ\text{C} = 288 \text{ K} \\ \rho = 1,213 \text{ kg/m}^3 & T_b = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373 \text{ K} ; & \rho_b = 0,936 \text{ kg/m}^3 \\ M_g = \rho_b \Omega = 2060 \text{ kg} & \gamma = 1,4 & r = 288 \text{ J/kg.K} \end{array}$$

Pour les ballons à hélium :

$$\begin{array}{lll} M_b = 250 \text{ kg} & \Omega \cong 600 \text{ m}^3 & T = 15 \text{ }^\circ\text{C} = 288 \text{ K} \\ \rho_g = 0,169 \text{ kg/m}^3 & M_g = \Omega \rho_g \cong 101 \text{ kg} & \\ \gamma_g = 1,66 & r_g = 2060 \text{ J/kg.K} & \end{array}$$

Dans les deux cas :  $(dT/dz)_{ad} = 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C/m}$

Le comportement des ballons peut être comparé selon quatre caractéristiques :

- la condition de stabilité  $N^2 > 0$  (équivalente à l'existence d'une altitude d'équilibre)
- le niveau d'équilibre  $\Delta z_e$
- l'accélération initiale
- l'amortissement ou l'amplification du mouvement, liés à la valeur numérique de  $N^2$ .

### 1.10.2. - COMMANDE PAR DÉLESTAGE



#### Condition de stabilité

Pour le ballon à air chaud, elle est donnée par (1.83b) :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} > 0$$

$$\frac{dT}{dz} > 3,5 [1 - 0,715 \times 0,772] \times (-0,01) \text{ } ^\circ\text{C} / \text{m}$$

$$\frac{dT}{dz} > -0,0157 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{m}$$

Pour le ballon à gaz, c'est (1.91) :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} > 0$$

$$\frac{dT}{dz} > 3,5 \times 0,4 \times (-0,01) \text{ } ^\circ\text{C} / \text{m}$$

$$\frac{dT}{dz} > -0,014 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{m}$$



La différence est faible, et on peut considérer que la condition de stabilité est la même pour les deux modèles de ballon. Il semble cependant que dans une étroite fourchette de gradient thermique ( $-0,0157 < dT/dz < -0,014$ ) le ballon à air chaud est stable alors que le ballon à gaz est déjà en situation d'instabilité.

On remarquera aussi que les deux modèles de ballons restent stables dans une atmosphère légèrement instable (si :  $-0,0157$  ou  $-0,014 < dT/dz < -0,01 = (dT/dz)_{ad}$ ).



#### Niveau d'équilibre

Pour calculer  $\Delta z_e$ , il faut se fixer un gradient atmosphérique satisfaisant la condition de stabilité précédente. Prenons le cas d'une atmosphère neutre :

$$\frac{dT}{dz} = \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} = -0,01 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{m}$$

On doit aussi donner la masse délestée. Choisissons  $\Delta M_b = 1 \text{ kg}$ .

L'altitude d'équilibre du ballon à air chaud est donnée par (1.83a) :

$$\Delta M_b = \frac{\rho}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Omega \Delta z_e$$

et pour le ballon à gaz, par (1.90) :

$$\Delta M_g = M_g \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e$$

- Dans le premier cas :  $I = \frac{1,213}{288} \times (-0,01 + 0,0157) \times 2200 \Delta z_e$

$$\Delta z_e = 19 \text{ m}$$

- Dans le second :  $I = 101 \times \frac{1}{288} \times \frac{2060}{288} \times (-0,01 + 0,014) \Delta z_e$

$$\Delta z_e = 100 \text{ m}$$

Avec une atmosphère stable (dans laquelle par exemple  $dT/dz = 0$ ), on trouve respectivement :

$$\Delta z_e = 7 \text{ m pour le ballon à air chaud}$$

$$\Delta z_e = 28,7 \text{ m pour le ballon à gaz.}$$

♪♪ Pour une même masse délestée, le gain d'altitude d'un ballon à gaz est très supérieur à celui d'une montgolfière. Toutefois, plus l'atmosphère est stable, plus l'écart entre les deux diminue.

#### ♥ Accélération initiale

Avec le ballon à air chaud, on a (1.86) :

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0} = \frac{\Delta M_b}{\rho \Omega - \Delta M_b} g$$

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0} = \frac{1}{1,213 \times 2200 - 1} \times 9,8 = 3,75 \cdot 10^{-4} g$$

et avec le ballon à gaz (1.93):

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0} = \frac{\Delta M_b}{M_b - \Delta M_b + M_g} g$$

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0} = \frac{1}{250 - 1 + 101} g = 2,85 \cdot 10^{-3} g$$

♪♪ L'accélération initiale du ballon à gaz (qui ne dépend pas du gradient thermique atmosphérique) est huit fois plus grande que celle du ballon à air chaud. Cet écart est dû en grande partie à la différence des masses de gaz embarqué (§1.10.1) : 2060 kg d'air chaud contre 100 kg d'hélium. La plus faible poussée hydrostatique exercée sur le ballon à gaz, due à son plus faible volume, atténue seulement un peu la différence.

#### ♠ Amortissement ou amplification

• En situation de stabilité ( $N^2 > 0$ ), l'accélération est maximale en position initiale ; elle devient nulle à la position d'équilibre, et  $N^2$  mesure la décélération entre ces deux points.

- Avec le ballon à air chaud (1.85) :

$$N^2 = \frac{\rho \Omega}{\rho \Omega - \Delta M_b} \frac{g}{T} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T}{T_b} \right] \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\}$$

- Avec le ballon à gaz (1.92) :

$$N^2 = \frac{M_g}{M_b - \Delta M_b + M_g} \frac{g}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\}$$

Pour l'un et l'autre, l'influence de la masse délestée  $\Delta M_b$  est insignifiante. En atmosphère neutre, on trouve respectivement :  $N^2 = 2.10^{-4}$  (air chaud),  $N^2 = 2,8.10^{-4}$  (gaz), et avec  $dT/dz = 0$  :  $N^2 = 5,45.10^{-4}$  (air chaud),  $N^2 = 10.10^{-4}$  (gaz).

♪♪ On constate que le ralentissement du mouvement est plus important pour le ballon à gaz. En outre, il est d'autant plus marqué que l'atmosphère est plus stable.

● *En situation d'instabilité* ( $N^2 < 0$ ), prenons par exemple  $dT/dz = -0,022 \text{ °C/m}$ . On obtient :  $N^2 = -1,8.10^{-4}$  pour le ballon à air chaud, et  $N^2 = -4,9.10^{-4}$  pour le ballon à gaz.

♪♪ On voit que l'accélération du ballon à gaz est amplifiée par rapport à celle du ballon à air chaud ( $N^2$  est plus grand en valeur absolue). Dans ce cas, le ballon à gaz est beaucoup plus instable que la montgolfière.

### 1.10.3 – COMMANDE PAR LE GAZ

Les résultats sont très voisins de ceux obtenus par délestage, aussi bien qualitativement que quantitativement. Pour la stabilité du ballon à gaz, ils sont même rigoureusement identiques. Les commentaires précédents restent donc valables.

### 1.10.4. – CONCLUSIONS

!!! Les calculs présentés plus haut reposent sur des hypothèses simplificatrices qu'il est bon de rappeler :

- - Les échanges de chaleur entre le gaz des ballons et l'atmosphère ne sont pas pris en compte (l'enveloppe est considérée comme un isolant parfait)
- - On néglige la dimension des ballons, qui sont considérés comme des points ; à l'intérieur, la température et la pression sont donc supposées uniformes
- - On admet que  $dT/dz = cte$  sur la hauteur de déplacement des ballons
- - La sollicitation initiale est supposée instantanée (ceci est valable pour le délestage, mais inexact pour la commande par le gaz)
- - La traînée (résistance aérodynamique) des ballons pendant leur déplacement est négligée (elle a un effet de freinage)

Compte tenu de ces réserves, l'analyse ci-dessus montre un comportement contrasté entre ballons à air chaud (BAC) et ballons à gaz (BAG).

♣ Lorsque BAC et BAG sont sous condition de stabilité, le mouvement engendré par une modification de la masse totale est plus amorti pour le BAG, qui se révèle donc *stricto sensu* plus stable que le BAC.

Par contre, sous condition d'instabilité, c'est l'inverse ; le mouvement du BAG est beaucoup plus amplifié. Le BAG est alors plus instable que le BAC.

◆ Si l'on considère la sensibilité à une même sollicitation, le BAG présente toujours une accélération initiale supérieure, et, en situation stable, l'amplitude de son déplacement est nettement supérieure à celle du BAC. Dans tous les cas, il est donc beaucoup plus sensible que le BAC.

Ce résultat correspond à l'expérience des aérostiers. Ceux-ci rapportent qu'une simple poignée de sable lancée par-dessus bord suffit à déclencher un mouvement très perceptible sur un BAG. D'ailleurs, Jules Verne disait déjà, dans *L'île mystérieuse* : « On sait de quelle sensibilité statique sont doués les aérostats ».

La raison principale en est que, toutes charges comprises, le BAG est plus léger que le BAC. Le reste est lié à la différence de propriétés entre l'air et l'hélium (ou l'hydrogène).

♥ D'un point de vue pratique, le pilotage d'un BAG en condition de stabilité demande plus de doigté. En condition d'instabilité, il peut devenir extrêmement délicat.

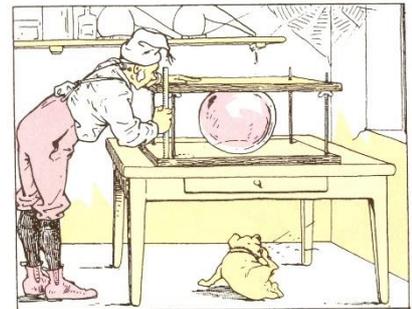
### Cosinus calcule la force ascensionnelle des ballons à deux sous.



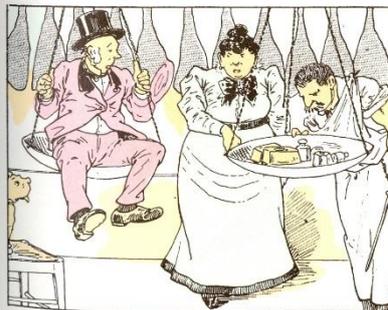
Cosinus est tiré de ses réflexions par le passage inopiné dans son champ visuel d'un ballon qui fait naître aussitôt dans son esprit certaines idées.



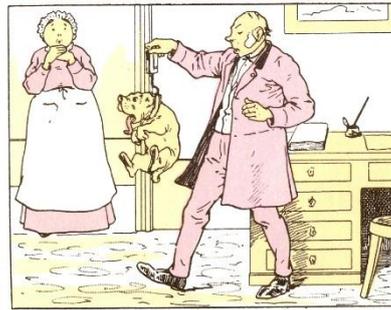
Ces idées reçoivent immédiatement un commencement d'exécution que Sphéroïde, chien d'initiative, s'empresse d'encourager du geste de la voix.



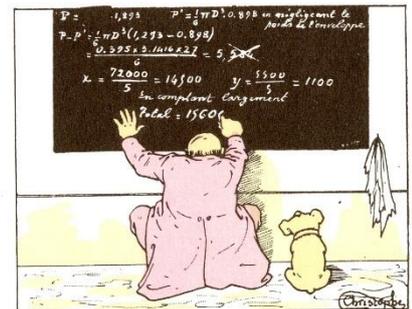
Puis, au moyen d'un appareil de son invention, Cosinus mesure, à 3 ou 4 centimètres près, le diamètre de l'objet. Il trouve qu'il est égal à 0<sup>m</sup>30.



Après quoi, Cosinus se rend chez le boucher voisin et, s'installant dans la balance destinée aux veaux, exprime le désir « qu'on détermine son poids absolu par la méthode de la double pesée ». « Oh! monsieur, dit la bouchère, on pèse ici plutôt triple que double! » Cosinus déplore l'ignorance de cette femme en matière de sciences expérimentales.



Ayant appris qu'il pèse 72 kilos, Cosinus qui a son idée, entreprend de rechercher, par une méthode approximative, au moyen d'un appareil nommé dynamomètre, le poids de Sphéroïde dont l'attitude témoigne qu'il goûte peu ce genre d'expériences. Sphéroïde apprend même avec une complète indifférence qu'il pèse 5 k. 500.



En possession de tous les éléments du problème, Cosinus se livre à de profonds calculs qui lui apprennent qu'il lui suffira de 45 600 ballons à 0 fr. 10 (dont 14 500 pour lui et 1 100 pour Sphéroïde), afin de pouvoir entreprendre son voyage par la voie aérienne. Dans ses calculs, Cosinus a cru pouvoir négliger le poids de l'enveloppe.

*N.B.* A l'époque du savant Cosinus, les ballons de fêtes foraines étaient gonflés au gaz de ville (encore appelé gaz d'éclairage), riche en hydrogène (au moins 50%), mais néanmoins plus lourd que l'hydrogène pur. Actuellement, ils sont gonflés à l'hélium.

Le ballon (de  $1200 \text{ m}^3$ ) qui permit à Léon Gambetta de quitter Paris en 1870 était également gonflé au gaz d'éclairage.

## 1.11. - Équilibre et stratification d'un plan d'eau

### 1.11.1. – DILATATION THERMIQUE : LE CAS PARTICULIER DE L'EAU

Pour la plupart des liquides, la masse volumique diminue quand la température augmente, et ceci de façon presque linéaire. Cela revient à dire que la dilatabilité  $\beta$  est positive, et peu dépendante de la température.

L'eau présente une exception notable par rapport à ce type de comportement : à partir de  $T = 0^\circ\text{C}$ , sa masse volumique augmente jusqu'à  $T_m = 3,98^\circ\text{C}$  (valeur souvent arrondie à  $4^\circ\text{C}$ ), puis diminue avec une variation non linéaire.

On est surpris de constater que la valeur maximale  $\rho_m = \rho(T_m)$  fait l'objet de divergences dans la littérature. La raison principale en est celle-ci :

En 1795, avec l'introduction du système métrique, le kilogramme a été défini comme la masse d'un décimètre cube d'eau à la température de  $4^\circ\text{C}$ . Le besoin d'un étalon solide a entraîné la réalisation d'un tel étalon en matériau métallique, conservé au Pavillon de Breteuil, à Sèvres. Ultérieurement, il s'est avéré que la masse de celui-ci était très légèrement supérieure à la masse d'un litre d'eau, et comme par définition, c'est l'étalon qui est la référence, le Comité International des Poids et Mesures a rétrogradé la masse volumique de l'eau à  $\rho_m = 999,975 \text{ kg/m}^3$ . Cependant, on trouve encore fréquemment des tables de valeurs numériques dans lesquelles  $\rho_m = 10^3 \text{ kg/m}^3$ . D'autres valeurs circulent aussi, dont l'origine est incertaine. Mais heureusement, dans la grande majorité des cas, ces divergences n'ont guère de conséquences pratiques. Le problème le plus sérieux n'est pas là, mais dans la détermination de la dilatabilité  $\beta$  (cf. Annexe 1.1).

### 1.11.2. – CONSÉQUENCE SUR LA STRATIFICATION D'UN PLAN D'EAU

Une conséquence de la propriété précédente est que, entre  $0$  et  $4^\circ\text{C}$ , la dilatabilité  $\beta$  est négative, et les conditions de stabilité (1.37) sont inversées. Dans un plan d'eau, on ne peut donc trouver aucune couche profonde permanente dont la température soit inférieure à  $4^\circ\text{C}$  (sauf sous l'effet de conditions aux limites très spécifiques). Toute particule fluide qui se trouverait dans ce cas se verrait transférée au-dessus du niveau de température  $T_m$ , vers la couche supérieure correspondant à sa masse volumique  $\rho$ . En particulier, dans des conditions climatiques d'hiver où la surface d'un plan d'eau est gelée, le gradient de température est inversé, l'eau la plus froide se situant vers la surface (fig. 1.6). Ceci n'est cependant pas vrai pour les fonds marins, en raison de la salinité de l'eau.

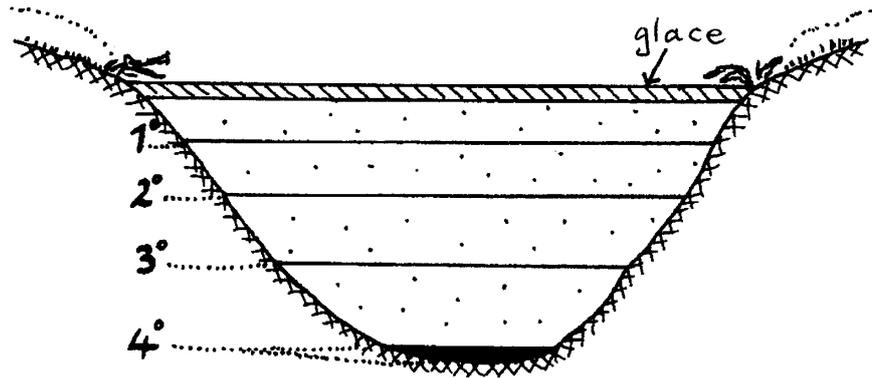


FIG. 1.6. – Exemple de stratification thermique d'un plan d'eau douce en hiver (d'après C. Pielou)

Par contre, en régime permanent, si la température de l'atmosphère est supérieure à  $4^{\circ}\text{C}$ , le profil de température est monotone décroissant à partir de la surface (fig. 1.7).

#### 1.11.3. – COUCHE DE MÉLANGE ET THERMOCLINE

Dans les conditions d'été, on observe généralement une structuration particulière comportant une *couche de mélange* et une *thermocline* (fig. 1.7 et 1.8).

En effet, les mesures de températures sur une verticale font apparaître une première zone superficielle, de profondeur  $h$  (fig. 1.8) où la température est sensiblement uniforme. Cette zone, appelée « *couche de mélange* », est due à l'action des agents extérieurs (essentiellement le vent) qui ont pour effet de brasser l'eau et donc d'homogénéiser la température. L'épaisseur de la couche de mélange est extrêmement variable selon les conditions géométriques et thermiques, allant de quelques dizaines de centimètres à plusieurs dizaines de mètres.

En dessous de la couche de mélange se situe une couche de quelques centimètres à quelques mètres d'épaisseur, la « *thermocline* », où un réajustement se produit, avec une température qui diminue très rapidement. Puis, sous la thermocline, on retrouve un profil de température sensiblement linéaire et variant lentement avec la profondeur (fig. 1.8). Dans les calculs, on schématise la thermocline par une discontinuité  $\Delta T$  de la température  $T$ .

On se doit de signaler que ce type de stratification se rencontre aussi bien dans les étendues d'eau douce que dans les eaux salines (mers ou océans).

Quant à la masse volumique de l'eau, au-dessus de  $4^{\circ}\text{C}$  elle évolue bien entendu en sens inverse de la température. Dans la couche de mélange, elle est donc à peu près uniforme, mais présente une augmentation rapide dans la thermocline (schématisée par une discontinuité  $\Delta\rho$ ), pour croître ensuite plus lentement lorsqu'on descend vers le fond.

En dehors des aspects thermiques et mécaniques, la présence d'une thermocline a aussi des conséquences biologiques, les espèces vivantes que l'on rencontre étant généralement différentes au-dessus et en dessous de celle-ci.

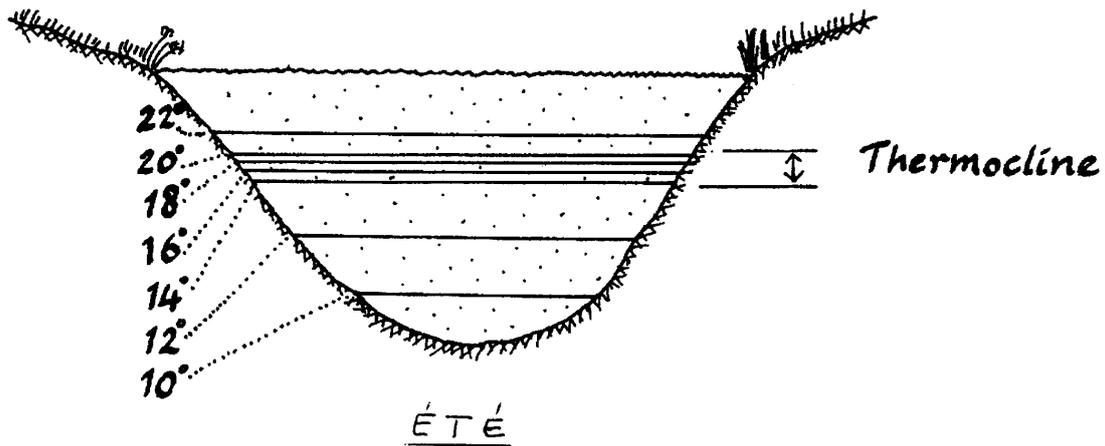


FIG. 1.7 – Exemple de stratification d'un plan d'eau douce en été (d'après C. Pielou)

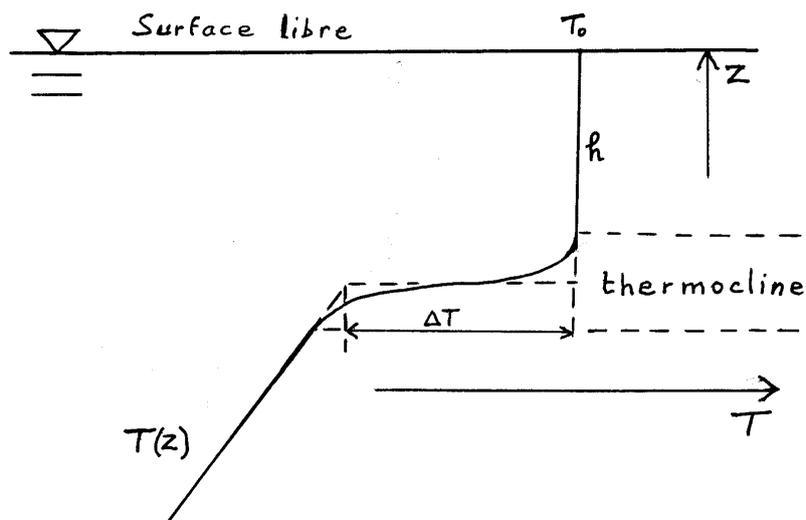


FIG. 1.8 – Stratification thermique d'un plan d'eau avec couche de mélange ( $h$ ) et thermocline

🎵 Un cas très particulier de thermocline mérite d'être signalé : c'est le célèbre phénomène « *El Niño* », qui affecte périodiquement le centre et le sud-est de l'océan Pacifique, et qui a des conséquences extrêmement importantes sur le climat. Il est du à la présence d'une couche de mélange constituée d'eau douce chaude, apportée par des pluies abondantes, dont l'épaisseur peut atteindre quelques dizaines de mètres. Celle-ci surmonte une couche profonde d'eau froide et salée, donc sensiblement plus dense, ce qui conduit à une situation de forte stabilité, et à une limitation des échanges massiques et thermiques entre les couches océaniques, et entre l'océan et l'atmosphère.

## ANNEXE 1.1 : RETOUR SUR LA DILATABILITÉ DE L'EAU

Compte tenu des propriétés particulières de l'eau, un complément sur le calcul de sa dilatabilité n'est pas inutile.

♣ Tout d'abord, il est recommandé de calculer la masse volumique de l'eau avec la formule adoptée par le Comité International des Poids et Mesures, à savoir :

$$\rho(t) = a_5 \left\{ 1 - \frac{(t + a_1)^2 (t + a_2)}{a_3 (t + a_4)} \right\} \quad (\text{A1.1})$$

avec  $t$  en °C, et (valeurs arrondies) :

$$a_1 = -t_m = -3,98 \text{ °C}$$

$$a_2 = 301,8 \text{ °C}$$

$$a_3 = 522\,500 \text{ °C}$$

$$a_4 = 69,35 \text{ °C}$$

$$a_5 = \rho_m = 999,975 \text{ kg/m}^3$$

Un échantillon de valeurs de  $\rho$  calculées selon cette formule est donné ci-dessous :

| $t$ (°C) | $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) |
|----------|-----------------------------|
| 0        | 999,84                      |
| 1        | 999,90                      |
| 2        | 999,943                     |
| $t_m$    | $\rho_m$                    |
| 6        | 999,943                     |
| 10       | 999,70                      |
| 20       | 998,206                     |
| 40       | 992,21                      |
| 60       | 983,175                     |

!!! A cet égard, il faut signaler que les valeurs de  $\rho$  données dans notre ouvrage « Echangeurs Thermiques » (tables numériques à la fin du chapitre « Problèmes »), et empruntées à d'autres auteurs, sont partiellement incorrectes.

Heureusement, dans beaucoup de cas, les variations de  $\rho$  en fonction de  $t$  n'ont pas à être prises en compte, mais elles conditionnent la dilatabilité  $\beta$ , qui est d'importance majeure en convection mixte ou naturelle.

◆ Rappelons maintenant la définition de  $\beta$  (FEMM, 2.15a), la température  $t$  étant exprimée ici en °C :

$$\beta(t) = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{A1.2})$$

soit, avec la formule (A1.1), en simplifiant et en considérant  $\rho \cong \rho_m = a_5$  :

$$\beta(t) = (t + a_1) \frac{[2(t + a_2) + (t + a_1)](t + a_4) - (t + a_1)(t + a_2)}{a_3(t + a_4)^2} \quad (\text{A1.3})$$

d'où les valeurs numériques suivantes :

| $t$ ( $^{\circ}\text{C}$ ) | $\beta$ ( $1/\text{K}$ ) |
|----------------------------|--------------------------|
| 0                          | $-0,677.10^{-4}$         |
| $t_m$                      | 0                        |
| 6                          | $0,312.10^{-4}$          |
| 10                         | $0,88.10^{-4}$           |
| 20                         | $2,06.10^{-4}$           |
| 30                         | $3,02.10^{-4}$           |
| 40                         | $3,83.10^{-4}$           |

Comme on pouvait s'y attendre vu l'allure de la fonction  $\rho(t)$ , la dilatabilité est négative en dessous de  $t_m$ , nulle pour  $t = t_m = 3,98$   $^{\circ}\text{C}$ , et positive au-dessus. Mais le plus important est la variation considérable de  $\beta(t)$ , même si elle se ralentit un peu au-delà de  $40$   $^{\circ}\text{C}$ .

← Il faut donc être prudent lorsqu'on utilise une valeur moyenne de  $\beta$  en convection mixte ou naturelle : cette approximation n'est acceptable que dans une plage de température assez étroite (disons  $\pm 5$   $^{\circ}\text{C}$  à partir de  $t = 15$   $^{\circ}\text{C}$ ). L'impact de cette propriété est souvent négligé dans les applications. Pourtant, on mesure ici les limites de l'approximation de Boussinesq avec ce fluide universellement présent, mais très particulier

🎵 Quant à la valeur  $\beta = 2,6.10^{-4}$  qui traîne un peu partout sur Internet, on ignore ses conditions de validité. Il semblerait qu'elle concerne l'eau de mer, mais sans autre précision. Dans le doute, mieux vaut l'ignorer.

◆ Les mécaniciens et thermiciens sont principalement concernés par la *masse volumique des fluides*, et donc par sa variation avec la température, exprimée par la dilatabilité  $\beta$ .

Par contre, les physiciens s'intéressent davantage au *volume massique des fluides*, dont la variation avec la température est caractérisée par un « coefficient  $\alpha$  de dilatation volumique ».

Quel est le rapport entre  $\alpha$  et  $\beta$  ? La réponse est assez triviale, mais détaillons-la quand même.

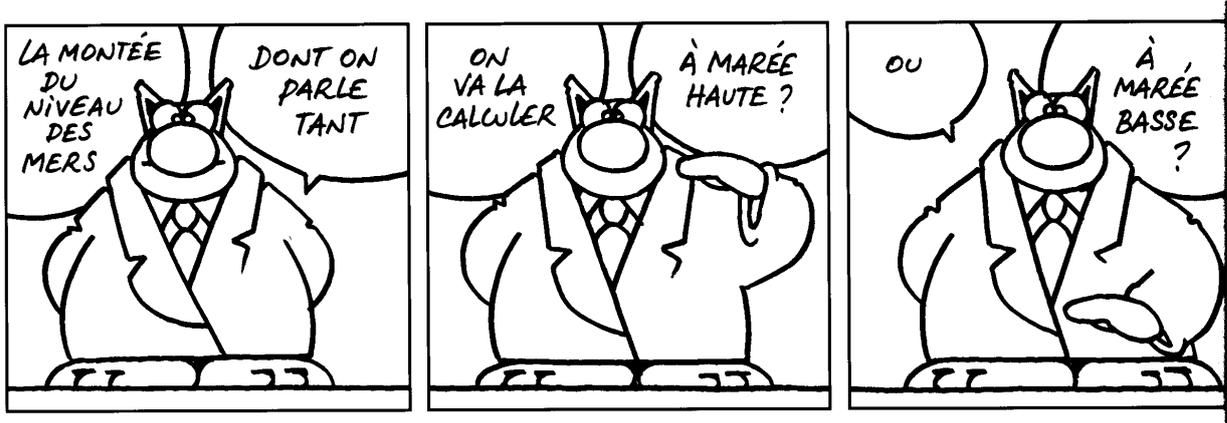
Soit  $\nu$  le volume massique du fluide ( $\text{m}^3/\text{kg}$ ). Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis respectivement par :

$$\alpha = \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT} ; \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \quad (\text{A1.4})$$

Sachant que  $\rho = 1/v$ , on a encore :

$$\beta = -v \frac{d}{dT} \left( \frac{1}{v} \right) = \frac{1}{v} \frac{dv}{dT} = \alpha \quad (\text{A1.5})$$

$\alpha$  ou  $\beta$ , c'est donc exactement la même chose.



Ph. Gelluck – *Le chat*

## ANNEXE 1.2 : GRADIENT DE MASSE VOLUMIQUE DANS L'AIR - DILATABILITÉ

♣ On rappelle d'abord que les caractéristiques de l'atmosphère au repos sont gouvernées par l'équation d'état (1.2), par la loi de la statique (1.1), et par les conditions aux limites, qui imposent généralement le gradient de température  $dT/dz$ .

Il en résulte une stratification thermique et barométrique de l'atmosphère, qui s'accompagne évidemment d'une « stratification volumétrique », c'est-à-dire d'un gradient de masse volumique  $d\rho/dz$ . Pour le calculer, on partira de l'équation d'état  $p/\rho = rT$ , ou :

$$\rho = \frac{p}{rT} \quad (\text{A 2.0})$$

En dérivant, il vient :

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{rT} \frac{dp}{dz} - \frac{p}{r} \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dz} \quad (\text{A 2.1})$$

soit, avec l'équation de la statique  $dp/dz = -\rho g$  :

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{1}{rT} \rho g - \rho T \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dz}$$

ou encore, en permutant les deux derniers termes :

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} + \frac{g}{r} \right) \quad (\text{A 2.2})$$

(relation d'ailleurs identique à (1.38a) du fait que  $p/\rho = rT$ ).

Il est commode d'introduire ici le gradient adiabatique (1.15a), qui constitue une référence pour caractériser l'état de l'atmosphère, ce qui donne (cf. 1.11) :

$$\boxed{\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right)} = -\frac{\rho}{T} \left( \frac{dT}{dz} - 3,5 \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} \right) \quad (\text{A 2.3a})$$

On voit ainsi que lorsque l'altitude augmente,  $\rho$  diminue si :

$$\frac{dT}{dz} > 3,5 \frac{dT}{dz} \Big|_{ad}$$

et augmente dans le cas contraire.

En particulier, on est en présence d'une « atmosphère isochore » lorsque  $d\rho/dz = 0$ , c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{dT}{dz} = -3,5 \frac{dT}{dz} \Big|_{ad} = -3,5 \cdot 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}/\text{m} \text{ ou } -3,5 \text{ } ^\circ\text{C}/100\text{m} \quad (\text{A 2.3b})$$

ce qui correspond donc à un état de forte instabilité.

🎵 D'un point de vue pratique, on voit que l'on peut admettre l'approximation  $\rho = cte$  sur une épaisseur de 10 à 30 m. Par exemple, à la température ambiante, pour  $dz = 20\text{m}$  et  $dT/dz = 0$ , on a  $|d\rho/\rho| \cong 1,6\%$ . Mais dans les mêmes conditions, cet écart monte à 8 % pour une différence de niveau de 100 m.

◆ La dilatabilité d'un gaz parfait répond à la définition générale (FEMM, 2.15a) :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A 2.4})$$

et donc, d'après l'équation d'état (A 2.0) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{p}{r} \frac{1}{T^2}$$

d'où :

$$\beta = -\frac{rT}{p} \left( -\frac{p}{r} \frac{1}{T^2} \right)$$

et par conséquent :

$$\boxed{\beta = \frac{1}{T}} \quad (\text{A 2.5})$$

## ANNEXE 1.3 : EXERCICE

### Un ballon-sonde sur Titan

L'envoi d'un ballon-sonde figure parmi les projets d'exploration de Titan, satellite de Saturne pourvu d'une atmosphère.

Les données recueillies par la sonde Huygens (Tokano & al., 2006) sont les suivantes :

- atmosphère : 95% d'azote
- température au sol :  $T = 93,6 \text{ K}$  ( $-179,4 \text{ °C}$ ) ; pression au sol :  $p = 1,47 \text{ bar}$
- gradient de température dans la basse atmosphère :  $dT/dz = -10^{-3} \text{ °C/m}$
- accélération de la pesanteur :  $g_T = 1,4 \text{ m/s}^2 \cong g/7$

Pour la sonde, on admettra :

- gaz : hélium ; commande d'altitude par réserve de gaz embarquée.
- masse :  $M_b = 350 \text{ kg}$

#### Questions

- 1) L'atmosphère est-elle stable ou instable ? Le ballon est-il en situation de stabilité ?
- 2) Calculer la masse d'hélium nécessaire à l'équilibre au niveau du sol, et le volume du ballon.
- 3) Quelle masse de gaz  $\Delta M_g$  faut-il injecter dans le ballon pour monter de 100 m ?
- 4) Calculer l'accélération initiale et l'amortissement du mouvement. Comparer avec un ballon terrestre.

#### Solution

1)

Le gradient adiabatique est donné par (1.15a), en remplaçant  $g$  par  $g_T$  :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g_T}{r}$$

Admettons en première approximation que l'atmosphère est constituée à 100% d'azote, gaz diatomique. On a donc, comme sur terre :

$$\gamma = 1,4 ; r = 288 \text{ J/kg.K}$$

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} = -1,4 \cdot 10^{-3} \text{ °C/m}$$

Comme  $dT/dz = -10^{-3} \text{ °C/m}$ , on voit que :

$$dT/dz > (dT/dz)_{ad}$$

**L'atmosphère est stable.**

L'inégalité (1.78) donne la condition de stabilité du ballon :

$$\left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} \right\} > 0$$

Pour l'hélium (§ 1.10.1) :  $\gamma_g = 1,66$

$$-1 \cdot 10^{-3} > 3,5 \times 0,4 \times (-1,4 \cdot 10^{-3}) = -1,96 \cdot 10^{-3}. \text{ La condition est satisfaite.}$$

**Le ballon est stable**

2)

Il faut d'abord connaître la masse d'hélium qui équilibre la sonde au niveau du sol. Elle est donnée par (1.65b), où  $r_g = 2060 \text{ J/kg.K}$  (§ 1.10.1):

$$M_g = \frac{M_b}{\frac{r_g}{r} - 1} = \frac{350}{\frac{2060}{288} - 1}$$

$$M_g = 57 \text{ kg}$$

Le volume  $\Omega$  du ballon est donné par (1.63b) :

$$\Omega = \frac{M_g}{\rho_g} = M_g \frac{r_g T}{p}$$

Avec  $T = 93,6 \text{ K}$  et  $p = 1,47 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  :

$$\Omega = 75 \text{ m}^3$$

3)

La nouvelle altitude d'équilibre est reliée à  $\Delta M_g$  par (1.77b) :

$$\Delta M_g \left( \frac{r_g}{r} - 1 \right) = (M_g + \Delta M_g) \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e$$

Dans le second membre, on négligera  $\Delta M_g$  par rapport à  $M_g$  :

$$\Delta M_g = \frac{M_g}{\frac{r_g}{r} - 1} \frac{1}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right\} \Delta z_e$$

D'après la question 1) :  $\left\{ \right\} = 0,96 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C/m}$ .

Pour obtenir  $\Delta z_e = 100 \text{ m}$ , il faut injecter une masse de gaz :

$$\Delta M_g = \frac{57}{6,15} \times \frac{1}{93,6} \times \frac{2060}{288} \times 0,96 \cdot 10^{-3} \times 100$$

$$\Delta M_g = 0,064 \text{ kg} = 64 \text{ g}$$

4)

♣ L'accélération initiale est obtenue à partir de (1.79a) :

$$P_a(z=0) = M_t(z=0) \left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right)_{z=0}$$

avec (1.66) :

$$M_t = M_b + M_g + \Delta M_g$$

et pour le poids apparent (1.79a) avec  $\Delta z = 0$  et  $g$  remplacé par  $g_T$  :

$$P_a(z=0) = g_T \Delta M_g \left( \frac{r_g}{r} - 1 \right)$$

Ainsi :

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{z=0} = \left(\frac{r_g}{r} - 1\right) \frac{\Delta M_g}{M_b + M_g + \Delta M_g} g_T = 1,35 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

L'ordre de grandeur est proche de celui qui a été calculé au paragraphe 1.10♥ pour un ballon terrestre.

◆ L'amortissement est caractérisé par le facteur  $N^2$  (1.80) :

$$N^2 = \frac{M_g + \Delta M_g}{M_b + M_g + \Delta M_g} \frac{g}{T} \frac{r_g}{r} \left\{ \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g} \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} \right\}$$

Avec les valeurs numériques utilisées :

$$N^2 = 1,45 \cdot 10^{-5}$$

Sur terre,  $N^2 = 3 \text{ à } 5 \cdot 10^{-4}$ . L'amortissement du mouvement est donc plus faible sur Titan. La différence tient à la fois à la pesanteur et aux propriétés des deux atmosphères.

## 2 - ÉCOULEMENTS ATMOSPHÉRIQUES

### 2.1. - Le vent et la couche limite atmosphérique

#### 2.1.1. – ORIGINE DU VENT

On appelle *vent* le mouvement de l'air atmosphérique, dans lequel on distingue un aspect global et un aspect local.

♣ *La circulation atmosphérique globale* résulte essentiellement du bilan radiatif de la surface terrestre, mais aussi de la rotation de la terre. Plus précisément, c'est la non - uniformité de ce bilan radiatif qui est en cause.

En effet, dans les régions équatoriales, l'énergie solaire absorbée est, en moyenne annuelle, de l'ordre de  $300 \text{ W/m}^2$ , et l'énergie réémise par rayonnement de l'ordre de  $230 \text{ W/m}^2$ . Dans les régions polaires, ces valeurs sont respectivement de  $50 \text{ W/m}^2$  et de  $200 \text{ W/m}^2$ . Il y a donc un excédent de  $70 \text{ W/m}^2$  pour les unes et un déficit de  $150 \text{ W/m}^2$  pour les autres. Il en résulte des gradients de température qui engendrent des mouvements dans l'atmosphère et dans les océans, lesquels contribuent à transporter de la chaleur des basses aux hautes latitudes. En l'absence de ce transport, l'écart de température entre régions équatoriales et régions polaires serait beaucoup plus grand que celui que nous connaissons.

◆ *La circulation atmosphérique locale* reflète à plus petite échelle ce qu'il se passe au niveau global : les propriétés physiques de la surface et la nébulosité étant variables d'une région à l'autre, ceci entraîne des gradients de température et de pression à l'origine de vents locaux.

#### 2.1.2. – LA COUCHE LIMITE ATMOSPHÉRIQUE

La circulation atmosphérique locale s'apparente à un écoulement de couche limite turbulente sur une paroi rugueuse (FEMM, ch. 5), avec toutefois des échelles différentes. Les accidents du relief, la végétation, les constructions, constituent un type particulier de rugosité.

♣ Le profil de vitesse dans une couche limite atmosphérique est proche du schéma général décrit dans FEMM (§ 5.1.5. et 5.3.5.1). Celle-ci comporte donc une sous-couche visqueuse, au voisinage immédiat du sol, dont l'épaisseur va de quelques millimètres à 30 ou 40 cm. Cette couche est souvent perturbée par des structures aérodynamiques tourbillonnaires de sillages qui ne doivent pas être confondues avec des structures turbulentes.

Au-dessus, on rencontre une zone de transition, une zone logarithmique, puis une couche externe, dans laquelle la loi de vitesse est généralement présentée sous forme déficitaire (FEMM, § 5.1.5.4).

L'épaisseur de la couche limite, notée  $z_\infty$ , correspond à une vitesse du vent  $U_\infty = U(z_\infty)$  qui est la vitesse de circulation atmosphérique (encore appelée *vent météo*). Elle augmente avec la rugosité de la surface terrestre. Son ordre de grandeur est de  $150 \text{ m}$  (sol très plat ou plan d'eau) à  $500 \text{ m}$  (voire  $600 \text{ m}$ ) dans le centre des grandes villes (fig. 2.1). La zone qui s'étend au-delà de  $z_\infty$  est appelée *atmosphère libre*.

Pour certaines applications (résistance au vent des ouvrages et des bâtiments,...) on utilise une loi de vitesse approchée, dite « *vent de calcul* », qui s'écrit :

$$\frac{U}{U_{10}} = k \log \frac{z + l_0}{l_0} \quad (2.1)$$

Dans cette formule,  $l_0$  est un *paramètre de rugosité* de la surface (en  $m$ ) pour lequel, en pratique, on utilise des valeurs conventionnelles, correspondant à différentes classes de rugosité :  $l_0 = 1,5 \cdot 10^{-2} m$  sur un plan d'eau ;  $5 \cdot 10^{-2} m$  sur un terrain plat ;  $0,3 m$  sur une zone rurale avec bâtiments bas, arbres, haies... ;  $1 m$  sur les zones urbanisées et les forêts ; et  $2,5 m$  dans le centre des grandes villes.

La constante  $k$  est déterminée pour chaque valeur de  $l_0$  en écrivant que  $U = U_{10}$  pour  $z = 10 m$ . Par exemple :

$$l_0 = 5 \cdot 10^{-2} m \Rightarrow k = 0,43$$

Quant à  $U_{10}$ , c'est la vitesse mesurée à  $10 m$  de hauteur et moyennée sur une durée de  $10$  minutes. Cette vitesse est souvent appelée « *vent moyen* ».

L'utilisation des références  $U_{10}$  et  $l_0$ , ainsi que d'un logarithme décimal dans (2.1) a paru plus commode à certaines agences de normalisation, mais elle n'est pas en contradiction avec la loi classique de la zone logarithmique (FEMM, 5.26c ou 5.90c).

Il existe d'autres formules d'une forme analogue à (2.1). La particularité de celle-ci est d'obtenir  $U = 0$  quand  $z = 0$ .

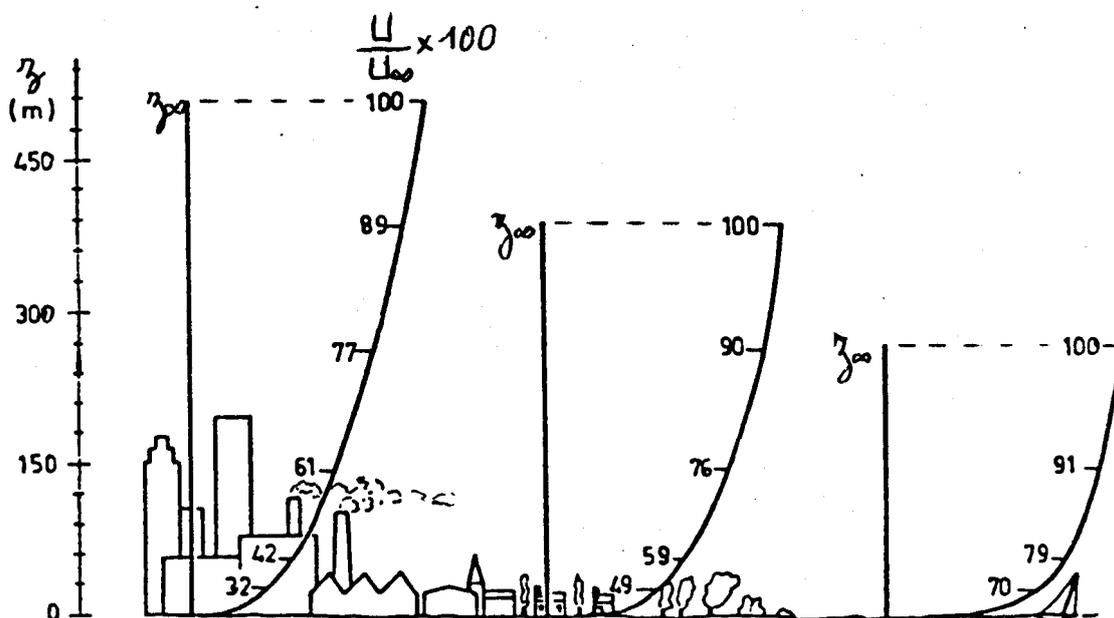


FIG. 2.1 – Profils de vitesse dans la couche limite atmosphérique selon la rugosité du terrain (d'après Davenport)

◆ L'influence d'un changement de rugosité sur la structure d'une couche limite dynamique est un problème théorique plus ardu que celui de la couche limite avec des conditions de paroi uniformes. Une nouvelle rugosité à partir de l'abscisse  $x=0$  entraîne une modification de la longueur de mélange (FEMM, § 5.2.4.), le terme  $\xi_\varepsilon$  de (5.53) étant recalculé à partir de  $x=0$ , d'où une nouvelle valeur de la viscosité turbulente  $\nu_t$  (FEMM, 5.13c). Il en résulte l'apparition d'une sous-couche dynamique, qui se développe et se substitue progressivement à la précédente couche limite (fig. 2.2). La contrainte de frottement au sol est évidemment affectée par cette modification de la surface.

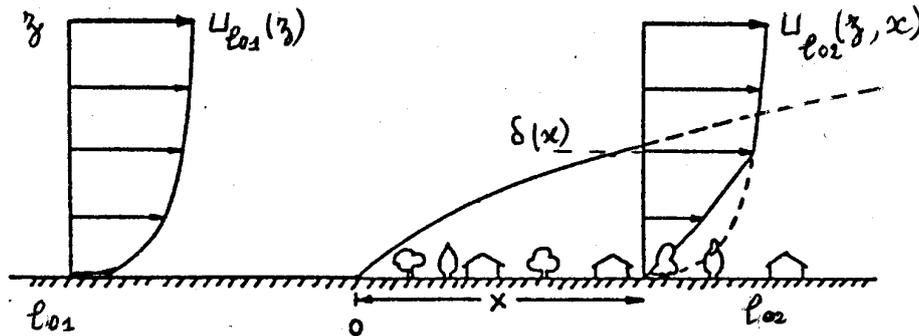


FIG. 2.2 – Influence d'un changement de rugosité ( $l_{01} \Rightarrow l_{02}$ ) sur la couche limite atmosphérique (d'après Davenport)

♥ En ce qui concerne *la turbulence atmosphérique*, sa nature est la même que dans tout écoulement turbulent, et ce qui a été dit dans le chapitre 3 de FEMM s'applique ici. Toutefois, en l'absence de confinement, les échelles des tourbillons sont très larges et vont du millimètre à plusieurs dizaines de mètres.

Notons que dans le langage courant, ce que nous appelons une *rafale* de vent n'est rien d'autre que le passage d'un tourbillon d'air, dont nous percevons facilement les effets cinétiques (§ 2.7.1 ♥).

Quant à *l'intensité de turbulence I*, (définie dans FEMM 3.82d), elle est souvent de quelques pour cent, mais peut atteindre 30% dans des vents de tempêtes.

!!! *Attention* : dans certaines publications, le *vent moyen* (synonyme de vitesse moyenne, cf. § ♣ ci-dessus) est appelé « intensité du vent ». Cette terminologie incorrecte et injustifiée peut être une source de confusion.

## 2.2. – Écoulement et stabilité d'une atmosphère stratifiée

Au paragraphe précédent, nous n'avons considéré que l'aspect dynamique du vent. Dans les faits, la couche limite dynamique atmosphérique est couplée avec la couche limite thermique, car vu l'importance relative des forces d'Archimède, nous sommes en régime de convection mixte. Mais il s'agit ici de couches limites de convection mixte *sur une surface horizontale indéfinie*, dont les propriétés seront un peu différentes de celles qui ont été observées sur une plaque plane verticale munie d'un bord d'attaque (PTC, ch. 6).

## 2.2.1. – CONVECTION MIXTE LAMINAIRE SUR UNE PAROI HORIZONTALE

Examinons d'abord ce qu'il se passe avec un écoulement laminaire.

♣ Nous partons des équations générales (PTC - 5.5) et (PTC - 5.3), valables aussi bien en convection naturelle qu'en convection mixte :

$$\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}} p + \nu \Delta \vec{V} \quad (2.2)$$

$$\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} T = a \Delta T \quad (2.3)$$

Plaçons-nous dans l'approximation bidimensionnelle. Le système de coordonnées étant ici  $\{x, z\}$ , il est d'usage de noter  $U$  et  $W$  les composantes de la vitesse  $\vec{V}$ . Les équations de projection sur  $x$  et  $z$  s'écrivent alors :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (2.4a)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} = - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (2.4b)$$

et l'équation d'énergie devient :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.4c)$$

En appliquant les hypothèses de la couche limite (FEMM, § 4.3.1. ♣, § 4.4.1.1) et (PTC, § 1.1.2), les relations précédentes se réduisent à :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2.5a)$$

$$0 = - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.5b)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.5c)$$

Les champs de vitesse et de température dépendent évidemment des conditions aux limites, mais on voit qu'ils sont faiblement influencés par la fonction « convection mixte », par rapport à la convection forcée pure.

L'effet est un peu plus marqué sur le gradient de pression vertical. En effet, la seconde équation s'écrit encore :

$$0 = - g - \rho [T(z)] \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.6)$$

ce qui n'est rien d'autre que la loi de l'hydrostatique (1.1) pour un fluide à masse volumique variable. L'influence de la température se répercute donc essentiellement sur la pression par l'intermédiaire de  $\rho$ .

◆ En ce qui concerne la stabilité thermique de l'atmosphère en écoulement laminaire, on peut la considérer en reprenant l'approche élémentaire des paragraphes 1.8.1 et 1.8.3.

Admettons que sous l'effet d'une perturbation thermique, une particule fluide de masse volumique  $\rho_p$  passe de l'altitude  $z_0$  à l'altitude  $z$ . D'après (1.31b), (1.32) et (1.38), son poids apparent est encore:

$$\begin{aligned} g(\rho - \rho_p) &= g(z - z_0) \left( \frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_p}{dz} \right) \\ &= - \frac{\rho g(z - z_0)}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial z} - \left[ \frac{dT}{dz} \right]_{ad} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

et les conclusions sont les mêmes qu'aux § 1.4 ou 1.8.3 : l'atmosphère est stable si l'on a  $\partial T / \partial z > (dT / dz)_{ad}$ , et instable dans le cas contraire. Le raisonnement s'applique également au cas d'une bouffée exogène (§ 1.6).

♥ Certes, la couche limite atmosphérique est rarement laminaire, mais elle peut s'en rapprocher lorsque l'écoulement est très lent. Cependant, même dans ce cas, on peut observer une « *turbulence atmosphérique thermique* », répondant à l'analyse faite aux § 1.6 et 1.8, et qui n'est pas exactement réductible à la turbulence dynamique, dont la structure est plus nettement tourbillonnaire. A l'origine de cette turbulence thermique (gênante pour les astronomes et pour les avions légers), on peut trouver par exemple des fluctuations de concentration en vapeur d'eau. Celles-ci vont entraîner des variations dans les échanges de chaleur par rayonnement (l'émissivité de la vapeur d'eau étant très supérieure à celle de l'air), et donc des fluctuations locales de température. Ceci explique en particulier que la turbulence thermique soit généralement plus faible dans les climats secs.

## 2.2.2. – CONVECTION MIXTE TURBULENTE SUR UNE PAROI HORIZONTALE

### ♣ *Equations de la couche limite turbulente*

A partir de FEMM (5.6) et (3.40), on établit les équations d'une couche limite horizontale turbulente, formellement analogues à celles du système (2.5), dans lesquelles  $\nu_t$  et  $a_t$  sont respectivement la viscosité turbulente et la diffusivité thermique turbulente, toutes deux fonctions de  $z$  :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial z} \right\} \quad (2.8a)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad (2.8b)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (a + a_t) \frac{\partial T}{\partial z} \right\} \quad (2.8c)$$

### ◆ *Conditions aux limites*

! *Les conditions aux limites dynamiques* sont les conditions classiques :

\*\* au sol :

- $z = 0$  ;  $U = 0$

- la rugosité  $\varepsilon$  (distincte du paramètre de rugosité  $l_0$ , § 2.1.2), dont la détermination est assez délicate. On trouvera un résumé des procédures utilisées dans [Ménégoz, 2004].

\*\* à la lisière de la couche limite :

- $z = z_\infty$  ;  $U = U_\infty$  (vent météo)

!! Les conditions aux limites thermiques sont en général :

\*\* au sol : une condition mixte qui comprend un flux radiatif, un flux convectif et un flux conductif dans le sol. En ne considérant que le flux convectif  $\varphi_p$ , celui-ci s'écrira :

$$\bullet \varphi_p = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = h (T_p - T_\infty) \quad (2.9)$$

$\lambda$  étant la conductivité thermique de l'air,  $T_p$  la température du sol et  $h$  le coefficient d'échange convectif.

\*\* à la lisière de la couche limite :

- $z = z_\infty$  ;  $T = T_\infty$

### 2.2.3. – BILAN D'ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE EN CONVECTION MIXTE

Dans le cas turbulent, il faut revenir aux bases des diverses relations de bilans pour approcher la question de la stabilité. Le bilan qui nous servira de support sera celui d'énergie cinétique turbulente (FEMM. 3.50). Cependant, étant ici en convection mixte, il nous faut remonter un peu en arrière pour traiter correctement le terme de flottabilité.

Partons de l'équation de bilan pour les corrélations (FEMM , 3.46) :

$$\begin{aligned} \overline{\vec{V} \cdot \text{grad } c v_j} &= - \overline{v_j \vec{v} \cdot \text{grad } C} - \overline{c \vec{v} \cdot \text{grad } V_j} \\ &\quad + \overline{v_j q'_{lc}} - \frac{1}{\rho} \overline{c \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \\ &\quad - (D_c + \nu) \overline{\text{grad } c \cdot \text{grad } v_j} \\ &\quad + D_c \overline{\text{div}(v_j \text{grad } c)} + \nu \overline{\text{div}(c \text{grad } v_j)} \\ &\quad - \overline{\text{div } c v_j \vec{v}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec :  $p'$  fluctuation de pression ;  $q'_{lc}$  fluctuation de la source locale de  $C$ .

En toute rigueur, il serait plus habile d'écrire le terme de source interne :  $\overline{v_j q'_{jlc}}$  (avec sommation sur l'indice  $j$ ). En convection forcée,  $q'_{lc} = -\partial p' / \partial x_j$  (FEMM, Annexe 3.A.4.1 ♥). Mais en convection mixte, on doit y ajouter le terme de pesanteur, du à la fluctuation  $\rho'$  de la masse volumique, d'où en coordonnées  $(x, z)$  :

$$q'_{jlc} = \begin{cases} -\frac{\partial p'}{\partial x} \\ -\frac{\partial p'}{\partial z} - g \rho' \end{cases} \quad (2.11)$$

Dans (2.10), il faut donc remplacer  $\overline{v_j q'_{jIc}}$  par :

$$\overline{v_j q'_{jIc}} = -u \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x} - w \frac{\partial \overline{p'}}{\partial z} - g \overline{w \rho'} \quad (2.12)$$

où  $u$  et  $w$  sont les fluctuations de vitesse selon les directions  $x$  et  $z$ .

Cette équation est d'abord appliquée à la quantité de mouvement (en faisant  $c = \rho v_k$ , FEMM, § 3.4.1.1 ♦), puis à l'énergie cinétique de turbulence  $k$  en faisant  $i = j$ . Rappelons en effet (FEMM, § 3.4.1.2) que :

$$k = \frac{1}{2} \overline{v_j v_j} = \frac{1}{2} \overline{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad (2.13)$$

(avec sommation sur l'indice  $j$ ).

En convection mixte,  $z$  étant la direction verticale ascendante, le bilan d'énergie cinétique turbulente s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \overline{\text{grad } k} &= - \overline{v_j \vec{v} \cdot \text{grad } V_j} - \frac{g}{\rho} \overline{w \rho'} \\ &\quad - \overline{v \text{ grad } v_j \cdot \text{grad } v_j} \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \overline{\vec{v} \cdot \text{grad } p'} \\ &\quad + v \overline{\text{div}(\text{grad } k)} - \frac{1}{2} \overline{\text{div } v_j v_j \vec{v}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

où  $\varepsilon = v \overline{\text{grad } v_j \cdot \text{grad } v_j}$  (avec sommation sur l'indice  $j$ ) est la dissipation turbulente (FEMM, 3.52). On rappelle que  $\rho'$  est la fluctuation turbulente de masse volumique.

#### 2.2.4. – STABILITÉ DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE

Dans cette équation (2.14), nous nous intéresserons seulement aux deux premiers termes du membre de droite. En coordonnées cartésiennes, avec  $V_j = U$ ,  $v_j = u$  et  $\vec{v} = \{u, w\}$  nous aurons :

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + W \frac{\partial k}{\partial z} = - \overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{u w} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{g}{\rho} \overline{w \rho'} + \text{autres termes} \quad (2.15a)$$

Si l'on admet que la turbulence est homogène (FEMM 3.4.5),  $\overline{u^2}$  et  $\overline{u w}$  sont du même ordre de grandeur. Comme les hypothèses de la couche limite impliquent que  $\partial U / \partial x \ll \partial U / \partial z$ , il reste :

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + W \frac{\partial k}{\partial z} = - \overline{u w} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{g}{\rho} \overline{w \rho'} + \text{autres termes} \quad (2.15b)$$

D'après la définition (FEMM 2.15a) de la dilatabilité  $\beta$  (rappelée plus haut dans la formule A 1.2), en linéarisant au voisinage d'une température  $T_0$  (donc en admettant  $\beta = cte$  dans ce voisinage), on a en régime stationnaire:

$$\rho - \rho_0 = - \rho_0 \beta (T - T_0) \quad (2.16a)$$

♪ Dans cette opération, la température de référence  $T_0$  est soit la température mesurée à  $z_0 = 10m$ , comme pour la vitesse (voir § 2.2.2 ♣), soit la température adiabatique correspondant à une pression  $p_0 = 10^5 Pa$  (§ 1.1.3).

En régime turbulent, les fluctuations de  $\rho$  et de  $T$  étant respectivement  $\rho'$  et  $\theta$ , cette relation est remplacée par :

$$\rho + \rho' - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T + \theta - T_0) \quad (2.16b)$$

d'où, en soustrayant :

$$\rho' = -\rho_0 \beta \theta \cong -\rho \beta \theta \quad (2.16c)$$

Dans le cas des gaz,  $\beta = 1/T_0$ , et (2.15b) devient :

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + W \frac{\partial k}{\partial z} = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{g}{T_0} \overline{w\theta} + \text{autres termes} \quad (2.17)$$

Au chapitre 3 de FEMM, on a introduit la viscosité turbulente  $\nu_t$  (relations 3.28) et la diffusivité turbulente  $a_t$  (relation 3.39) qui s'écrivent, avec les présentes notations :

$$-\overline{uw} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.18a)$$

$$-\overline{w\theta} = a_t \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.18b)$$

d'où il vient enfin :

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + W \frac{\partial k}{\partial z} = \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T_0} a_t \frac{\partial T}{\partial z} + \text{autres termes} \quad (2.19)$$

Au second membre, le terme en  $\nu_t$  (positif) représente l'énergie mécanique produite par le cisaillement turbulent, tandis que le terme en  $a_t$  est l'énergie de flottabilité turbulente, qui peut être positive ou négative.

♪ Les « autres termes » étant peu influencés par le gradient de température, on peut considérer que l'écoulement est **stable** si l'énergie mécanique de flottabilité contribue à diminuer la production totale d'énergie, ce qui est le cas avec un gradient local de température  $(\partial T / \partial z) > 0$ . A l'inverse, l'écoulement sera considéré comme **instable** si elle constitue une source d'énergie, c'est-à-dire avec  $(\partial T / \partial z) < 0$ .

Il est alors possible de caractériser le degré d'instabilité par le rapport de ces deux grandeurs ; c'est un nombre sans dimension, défini localement au point  $[x, z]$ , que nous appellerons « nombre de Richardson atmosphérique  $Ri_a$  » :

$$Ri_a = \frac{a_t}{\nu_t} \frac{g}{T_0} \frac{\partial T / \partial z}{(\partial U / \partial z)^2} \quad (2.20)$$

On reconnaît ici la présence du nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t = \nu_t / a_t$  (FEMM, 3.45), qui est sensiblement constant dans un certain nombre de cas classiques. Ainsi, dans une couche limite atmosphérique, les diffusivités turbulentes de quantité de mouvement et de chaleur sont très voisines, ce qui conduit à admettre :

$$\frac{\nu_t}{a_t} = Pr_t \cong 1 \quad (2.21)$$

de sorte que le nombre de Richardson atmosphérique se réduit à :

$$Ri_a = \frac{g}{T_0} \frac{\partial T / \partial z}{(\partial U / \partial z)^2} \quad (2.22)$$

Une nuance supplémentaire sera apportée à cette analyse en considérant dans (2.19) la somme des deux termes sources prédominants, sous la forme :

$$\nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T_0} a_t \frac{\partial T}{\partial z} = \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 (1 - Ri_a) \quad (2.23)$$

Il apparaît alors que cette production d'énergie mécanique est nulle lorsque  $Ri_a = 1$ , ce qui incite à introduire une distinction dans la stabilité, à savoir :

$$\begin{aligned} Ri_a > 1 & : \text{atmosphère très stable} \\ 0 \leq Ri_a \leq 1 & : \text{atmosphère stable} \\ Ri_a < 0 & : \text{atmosphère instable} \end{aligned} \quad (2.24)$$

#### 2.2.5. – ÉCHELLE DE LONGUEUR ASSOCIÉE AU CRITÈRE DE STABILITÉ

L'altitude à laquelle  $Ri_a = 1$  constitue un paramètre caractéristique que nous allons maintenant déterminer. On a donc dans ce cas  $\partial T / \partial z > 0$ , et d'après (2.22) :

$$\frac{g}{T_0} \frac{\partial T}{\partial z} = \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \quad (2.25)$$

⇐ Admettons que cette égalité soit satisfaite dans la zone logarithmique de la couche limite. Alors, le profil de vitesse s'écrit selon (FEMM, 5.26) :

$$\frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{K} \ln \xi + 5 \quad (2.26)$$

Rappelons que :

- $K$  est la constante de Karman (généralement prise égale à 0,4)
- $U_\tau = \sqrt{\tau_p / \rho}$  est la vitesse de frottement
- $\xi = z U_\tau / \nu$  est l'ordonnée adimensionnée (se prononce « ksi »)

On peut donc exprimer le gradient vertical de vitesse :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dU}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \left( \frac{U_\tau}{K} \frac{1}{\xi} \right) \frac{U_\tau}{\nu}$$

soit :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{U_\tau}{K} \frac{1}{z} \quad (2.27)$$

De même, une expression du profil de température dans la zone logarithmique est donnée par (FEMM 5.27) :

$$T^+ = \frac{1}{K} Pr_t \ln \xi + ctes \quad (2.28a)$$

avec :

$$T^+ = \frac{\rho C_p U_\tau (T_p - T)}{\varphi_p} \quad (2.28b)$$

On conduit un calcul analogue au précédent pour obtenir le gradient vertical de température :

$$\frac{\partial T^+}{\partial z} = \frac{dT^+}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{Pr_t}{K} \frac{1}{\xi} \frac{U_\tau}{v} = \frac{Pr_t}{K} \frac{v}{z U_\tau} \frac{U_\tau}{v}$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial z} = \frac{Pr_t}{K} \frac{1}{z} \quad (2.29a)$$

et aussi, d'après (2.28b) :

$$\frac{\partial T^+}{\partial z} = - \frac{\rho C_p U_\tau}{\varphi_p} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.29b)$$

La réunion de (2.29a et b) donne le gradient cherché :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\varphi_p}{\rho C_p U_\tau} \frac{Pr_t}{K} \frac{1}{z} \quad (2.30)$$

Les expressions (2.27) et (2.30) permettent de résoudre l'équation (2.25) : l'ordonnée  $z = L$  satisfaisant cette équation est telle que :

$$- \frac{g}{T_0} \frac{\varphi_p}{\rho C_p U_\tau} \frac{Pr_t}{K} \frac{1}{L} = \frac{U_\tau^2}{K^2} \frac{1}{L^2}$$

En admettant  $Pr_t = 1$  selon (2.21) il vient enfin :

$$L = - \frac{\rho C_p U_\tau^3 T_0}{K g \varphi_p} \quad (2.31)$$

Cette ordonnée  $L$ , appelée « *longueur de Monin-Obukhov* », se présente comme une échelle de longueur caractéristique de la stabilité atmosphérique.

On voit immédiatement que sa condition d'existence ( $L > 0$ ) est  $\varphi_p < 0$ , c'est-à-dire d'après (2.9) :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} > 0 \quad (2.32)$$

On observe également qu'elle est inversement proportionnelle à la valeur absolue du gradient de température au sol, et qu'elle tend vers l'infini quand  $\varphi_p \rightarrow 0$ .

Bien entendu, la condition  $Ri_a = 1$  (2.25) correspond à  $z/L = 1$ . Les conditions de stabilité et de forte stabilité s'expriment donc ainsi :

$0 < z/L \leq 1$  : atmosphère stable

$z/L > 1$  : atmosphère très stable

Donc, plus  $L$  est faible, plus vite on rencontre une situation de forte stabilité quand on s'élève.

 Le calcul précédent a été effectué sans tenir compte de la rugosité du site. Mais on a montré (FEMM, 5.90) que la prise en compte de la rugosité se traduit par l'addition d'une

constante dans les lois de vitesse et de température (2.26) et (2.28a), constante qui disparaît dans la suite du calcul, par l'effet des dérivations. La longueur de Monin-Obukhov ne dépend donc pas explicitement de la rugosité. Par contre, ses effets se font sentir dans la contrainte pariétale  $\tau_p$ , donc dans la vitesse de frottement  $U_\tau$ .

## 2.2.6. – CARACTÉRISATION DE LA STABILITÉ

♣ *L'hypothèse adiabatique* (§1.1) n'est généralement pas retenue pour la détermination du seuil d'instabilité dans un écoulement turbulent. En effet, elle implique une transformation suffisamment rapide pour se produire sans échange de chaleur. Mais, en présence de turbulence, les transferts étant sensiblement augmentés (la diffusivité turbulente  $a_t$  est beaucoup plus grande que la diffusivité moléculaire  $a$ , sauf dans la couche interne), cette hypothèse devient fragile.

Malgré tout, admettons un instant que les fluctuations turbulentes d'un gaz parfait obéissent à cette hypothèse, pour en évaluer l'impact sur la stabilité. Alors, la combinaison de la loi des gaz parfaits et de la loi de transformation isentropique conduit à la relation (1.6), qui s'écrit encore :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{T_0^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (2.33)$$

Une fluctuation  $\rho'$  de la masse volumique est associée à une fluctuation  $\theta$  de la température, d'où :

$$\frac{\rho + \rho'}{\rho_0} = \frac{(T + \theta)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{T_0^{\frac{1}{\gamma-1}}} = \frac{1}{T_0^{\frac{1}{\gamma-1}}} T^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{\theta}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Linéarisons cette expression au moyen d'un développement limité au premier ordre ; on obtient en développant :

$$\rho + \rho' = \rho_0 \frac{T^{\gamma/(\gamma-1)}}{T_0^{\gamma/(\gamma-1)}} \left(1 + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\theta}{T}\right) = \rho_0 + \rho_0 \frac{1}{\gamma-1} \frac{\theta}{T}$$

d'où l'on tire :

$$\rho' = \rho_0 \frac{1}{\gamma-1} \frac{\theta}{T} \quad (2.34a)$$

Cette relation se substituerait à (2.16c), et on voit qu'elle conduirait à remplacer la dilatabilité  $\beta = 1/T$  par une « dilatabilité adiabatique »  $\beta_{ad}$  :

$$\beta_{ad} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{T} = 2,5 \frac{1}{T} \quad (2.34b)$$

donc à remplacer le nombre de Richardson atmosphérique (2.22) par :

$$Ri_{ad} = \frac{g}{(\gamma-1) T_0} \frac{\partial T / \partial z}{(\partial U / \partial z)^2} \quad (2.34c)$$

Pour une même valeur de ce paramètre, ceci conduirait à une diminution de  $\partial T / \partial z$  d'un facteur  $\gamma - 1 = 0,4$ , mais sans modifier le seuil d'instabilité, qui reste  $\partial T / \partial z = 0$ .

◆ D'autre part, différents auteurs écrivent le nombre de Richardson atmosphérique avec la température potentielle  $\Theta$  (1.42) à la place de  $T$ , sous la forme :

$$Ri_a = \frac{g}{T_0} \frac{\partial \Theta / \partial z}{(\partial U / \partial z)^2} \quad (2.35a)$$

Le raisonnement présenté par [Sutton] entraîne difficilement l'adhésion. Une autre option pour arriver à ce résultat consiste à remplacer  $T$  par  $\Theta$  dans les équations de la couche limite turbulente, mais elle soulève quelques difficultés que nous n'aborderons pas ici, à l'exception de l'une d'elles. Car dans certaines publications on rencontre en remplacement de (2.18b) la relation :

$$-\overline{w \Theta'} = a_t \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (2.35b)$$

où  $\Theta'$  est la fluctuation de  $\Theta$ . Mais dans les expressions (1.42b) ou (1.43c) de  $\Theta$ , on voit que la seule grandeur fluctuante est  $T$ , d'où il résulte que  $\overline{w \Theta'} = \overline{w \theta}$ , ce qui semble entraîner une contradiction avec (2.18b).



### 2.3. – Modèle unidimensionnel : écoulement de Couette turbulent

Les développements précédents font appel aux approximations classiques de la couche limite. Cependant, en micrométéorologie, on adopte parfois une simplification supplémentaire, dans laquelle on considère que les propriétés de l'écoulement sont indépendantes de  $x$  (ce que l'on appelle un écoulement établi). Le modèle est donc alors strictement unidimensionnel. Ceci rappelle l'écoulement de Couette laminaire (FEMM, § 6.2.1.1) et constitue le « *modèle de Couette turbulent* », déjà cité dans l'étude de la couche limite dynamique interne (FEMM, § 5.1.3.4).

Physiquement, cette hypothèse se justifie par le fait que l'*atmosphère libre* (§2.1.2♣) joue un rôle d'entraînement tout un imposant (au moins sur une certaine distance) une épaisseur constante à la couche limite atmosphérique.

Une conséquence immédiate, déduite de l'équation de continuité, est que dans ce type d'écoulement on a :

$$W = 0 \quad (2.36)$$

Le système (2.8) se réduit alors à :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (v + v_t) \frac{\partial U}{\partial z} \right\} \\ 0 &= -g \rho [T(z)] - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (a + a_t) \frac{\partial T}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Mais ici, ces équations ne s'appliquent pas seulement à la couche interne ; elles sont valides dans la totalité de la couche limite. De plus, il n'y a pas de paroi en  $z_\infty$ , donc pas de loi de paroi. Il en résulte que dans la couche externe, où  $v_t = a_t = cte$ , les profils des grandeurs moyennes  $U$  et  $T$  sont linéaires jusqu'en  $z_\infty$ .

♪♪ Cependant, dans un tel modèle, bien que la composante verticale de la vitesse soit nulle ( $W = 0$ ), la fluctuation verticale de vitesse n'est pas nulle :  $w \neq 0$ . Les relations (2.18) sont donc conservées, tandis que (2.19) se réduit à :

$$U \frac{\partial k}{\partial x} = v_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T_0} a_t \frac{\partial T}{\partial z} + \text{autres termes} \quad (2.38)$$

Ceci ne modifie pas les deux premiers termes du membre de droite. Le nombre de Richardson  $Ri_a$  (2.22) ainsi que les conditions de stabilité sont donc inchangés. Il en est de même pour la longueur de Monin-Obukhov (2.31).

## 2.4. – Stabilité de l'atmosphère et dispersion des effluents

Parmi les conséquences pratiques de la stabilité (ou de l'instabilité) de la couche limite atmosphérique, on retiendra particulièrement celle qui a trait à la dispersion des effluents issus de cheminées industrielles ou domestiques. Certes, le nombre des grandes cheminées est en diminution, et leurs rejets sont de plus en plus filtrés. Mais outre le fait qu'elles ont un aspect emblématique, il est intéressant d'observer leurs panaches en présence de vent, lorsque c'est possible, pour en déduire l'état de stabilité de l'atmosphère.

Rappelons que lorsque la couche limite atmosphérique est turbulente, elle est réputée stable si  $Ri_a > 0$ , et instable si  $Ri_a < 0$ . Quand elle est laminaire, ou en atmosphère calme, la condition de stabilité devient :  $(\partial T / \partial z) > (\partial T / \partial z)_{ad}$ . La neutralité est caractérisée par  $Ri_a = 0$ , ou par  $(\partial T / \partial z) = (\partial T / \partial z)_{ad}$  (voir aussi § 2.6).

### 2.4.1. – STRATIFICATION INSTABLE

La figure 2.3 illustre le cas où l'atmosphère est instable. Les fluctuations sont amplifiées, et le panache s'étale verticalement de façon irrégulière. Il peut être rabattu jusqu'au sol si la hauteur de la cheminée est insuffisante, entraînant des nuisances pour les habitants et l'environnement. Cette situation, qui se produit par exemple par ciel clair en présence d'un rayonnement solaire important, est évidemment défavorable.

### 2.4.2. – STRATIFICATION NEUTRE

Dans le cas d'une atmosphère neutre (fig. 2.4), les fluctuations ne sont ni amplifiées ni amorties, et on observe un évasement régulier du panache. Celui-ci peut éventuellement atteindre le sol si la hauteur de la cheminée est insuffisante.

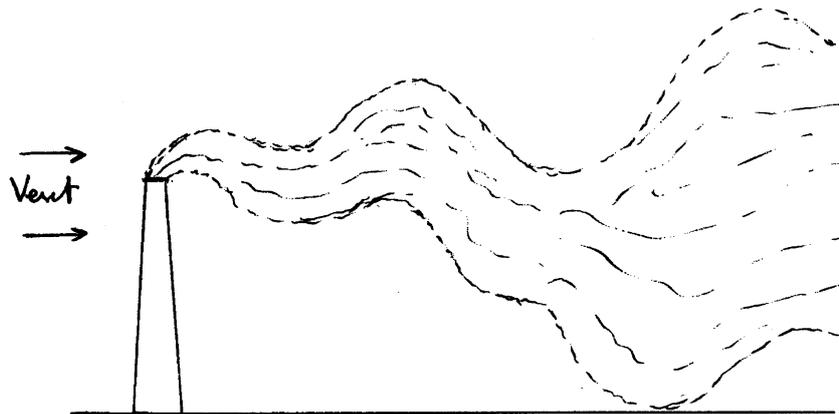


FIG. 2.3 – *Stratification instable*

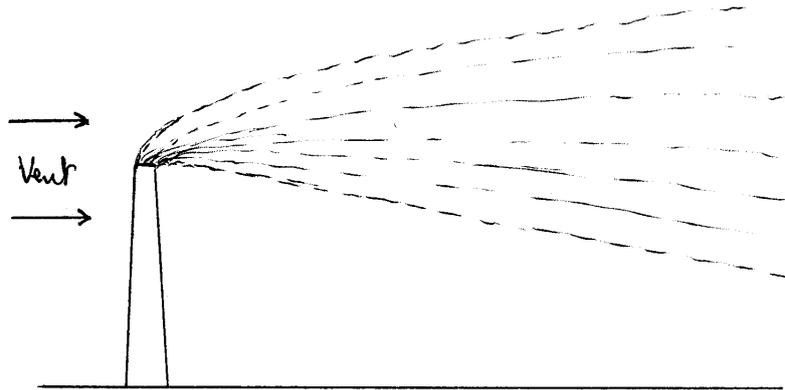


FIG. 2.4 – *Stratification neutre*

### 2.4.3. – STABILITÉ

Avec une atmosphère stable (fig. 2.5), les fluctuations verticales sont amorties, et le panache est très peu évasé. Cela peut se produire en particulier la nuit ou au lever du soleil. La situation est alors très favorable.

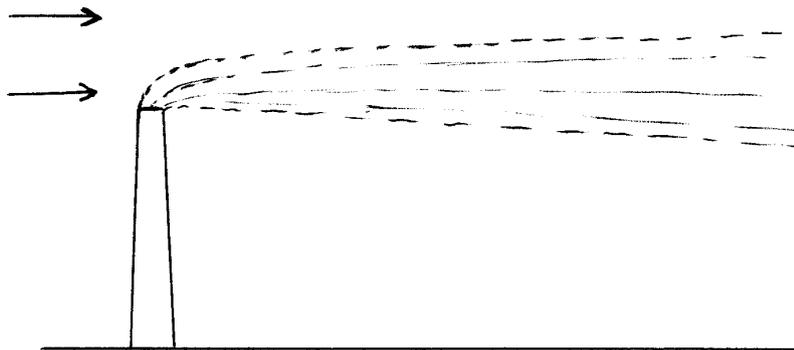


FIG. 2.5 – *Forte stabilité*

### 2.4.4. – PHÉNOMÈNE D'INVERSION

Une « *inversion* » se produit quand une couche d'air instable surmonte une couche stable (ou vice-versa).

#### ♣ *Inversion favorable*

Un exemple du premier cas est schématisé sur la figure 2.6., dans lequel la hauteur d'inversion (représentée par des tirets) se situe en dessous de l'orifice de la cheminée. L'atmosphère est instable ou neutre au-dessus, et stable près du sol.

Alors, le panache se développe verticalement dans la partie supérieure. Mais toute masse de gaz qui pénètre dans la zone stable est renvoyée dans la zone instable. Il n'y a donc pas de diffusion vers le sol.

Bien entendu, cette situation est favorable.

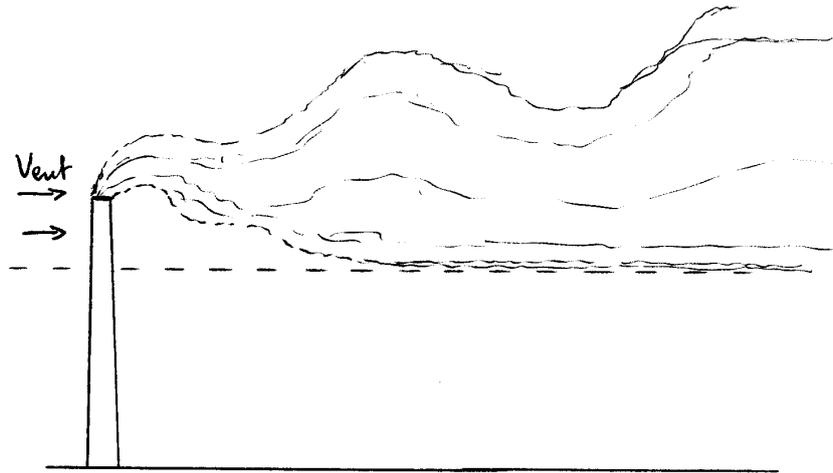


FIG. 2.6 – *Stabilité sous l'orifice de la cheminée ; instabilité au-dessus.*  
*Les tirets indiquent la hauteur d'inversion.*

◆ *Inversion défavorable : fumigation*

On a représenté sur la figure 2.6 un autre cas d'inversion : instabilité vers le sol, stabilité plus haut, la hauteur d'inversion étant au-dessus de l'orifice de la cheminée.

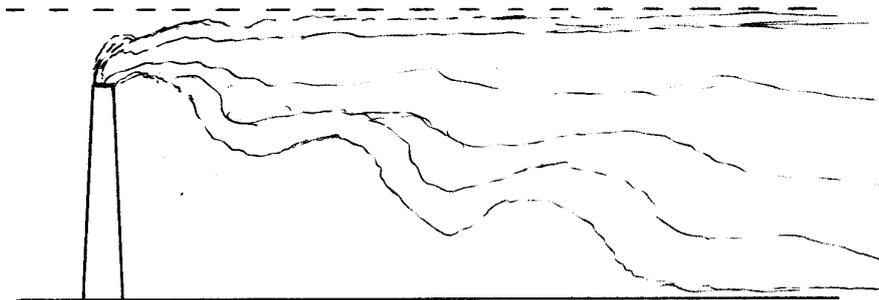


FIG. 2.7 – *Stabilité au-dessus de l'orifice de la cheminée ;*  
*instabilité en dessous.*

Dans cette situation, il n'y a pas de dispersion au-dessus de la ligne d'inversion. Toute la diffusion se fait vers le sol. Cette condition extrêmement défavorable, appelée « *fumigation* », peut être à l'origine de pollutions graves. De par leur relief, certains sites sont particulièrement propices à la fumigation (vallée de la Meuse en Belgique, villes de Mexico, de Los Angeles, ...). Elle se produit aussi au-dessus d'un plan d'eau en automne ou en hiver (l'eau étant plus chaude que le sol environnant), ou au-dessus d'une source étendue de chaleur, comme une grande agglomération.

🎵 Dans les deux cas de figure précédents, on se gardera d'identifier la hauteur d'inversion et la longueur de Monin-Obukhov. En atmosphère turbulente, la première correspond à un nombre de Richardson atmosphérique  $Ri_a = 0$ , tandis que la seconde correspond à  $Ri_a = 1$ .

## 2.5. - Structures thermoconvectives

### 2.5.1. – DONNÉES EXPÉRIMENTALES

En l'absence de vent, ou par vent très faible, on peut observer dans la basse atmosphère des cellules thermoconvectives, provoquées par exemple par des alternances de « points chauds » et de « points froids » au sol. Un mouvement ascendant se produit au-dessus d'un point chaud, tandis qu'un mouvement descendant a lieu à la verticale d'un point froid (fig. 2.8). Par exemple, les lacs et les étangs constituent des points froids au printemps ou en été (ils se réchauffent lentement), et des points chauds en automne ou en hiver (ils se refroidissent lentement).

Les courants ascendants sont particulièrement appréciés des aéronefs sans moteur et de certains oiseaux. A leur sommet, si les conditions d'humidité et de température sont convenables, un nuage de type cumulus peut se former (§ 1.7).

D'autres causes sont aussi à l'origine de courants verticaux, par exemple le franchissement d'un obstacle par le vent.

Les cellules thermoconvectives de l'atmosphère sont de même nature que les *cellules de Bénard*, dans la convection dite « de Bénard – Rayleigh » : celle-ci se produit lorsqu'une couche fluide horizontale, initialement immobile, est progressivement chauffée par le bas. Il s'agit d'un autre aspect de la stabilité, qui va maintenant être brièvement analysé.

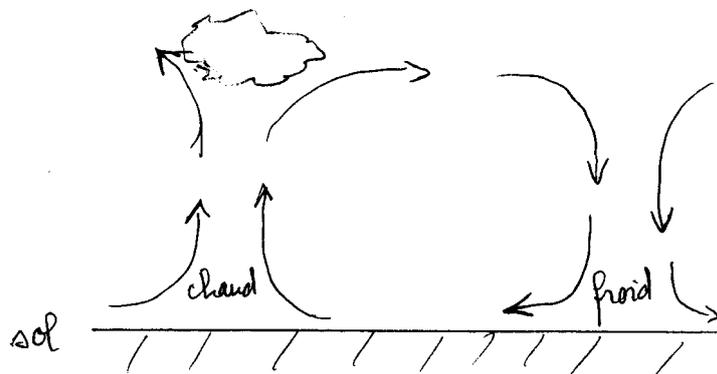


FIG. 2.8. – Structures thermoconvectives

### 2.5.2. – CALCUL APPROCHÉ DU SEUIL D'INSTABILITÉ THERMOCONVECTIVE

♣ Le mécanisme de l'instabilité thermoconvective sera examiné en régime laminaire bidimensionnel. Les équations de départ seront donc (2.4b) et (2.4c), mais écrites en régime variable, les différentes grandeurs étant maintenant dépendantes du temps (FEMM, §1.3.3), soit :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (2.39a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.39b)$$

On considère que le fluide se trouve entre deux parois horizontales d'ordonnées  $z = 0$  et  $z = h$ , portées à des températures uniformes  $T_0$  et  $T_h$ . Il est supposé chauffé par le bas, d'où :  $T_0 > T_h$ . On pose :

$$\Delta T = T_0 - T_h > 0 \quad (2.39c)$$

On notera en premier lieu que le système (2.39) possède une solution purement diffusive (caractérisée par l'indice  $d$ ), sans mouvement du fluide, telle que :

$$\begin{aligned} U_d &= W_d = 0 \\ p_d &= cte - \rho_d g z \\ T_d &= T_0 + \frac{(T_h - T_0)z}{h} = T_0 - \frac{\Delta T}{h} z \end{aligned} \quad (2.40)$$

◆ L'expérience montre qu'un mouvement convectif se déclenche à partir d'une valeur critique  $\Delta T_c$  de l'écart de température  $\Delta T$ . On peut alors considérer que la température, la pression et la masse volumique subissent de petites perturbations, respectivement  $\theta$ ,  $p'$ ,  $\rho'$ , amorties en dessous du seuil critique, et amplifiées au dessus. Dans ces conditions, les trois grandeurs précédentes s'écrivent, au voisinage du seuil :

$$\begin{aligned} T &= T_d(z) + \theta(x, z, t) \\ p &= p_d(z) + p'(x, z, t) \\ \rho &= \rho_d(z) + \rho'(x, z, t) \end{aligned} \quad (2.41)$$

De plus, toujours au voisinage du seuil, on admettra que les termes  $U (\partial W / \partial x)$  et  $W (\partial W / \partial z)$  sont des infiniment petits du second ordre. Alors l'équation (2.39a) se réduit à :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (2.42a)$$

Introduisons (2.40) et (2.41) dans (2.42a) :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho_d + \rho'} \left( \frac{\partial p_d}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)$$

🎵 On admettra également ici que le gradient fluctuant de pression est très petit devant le gradient stationnaire (hypothèse justifiée *a posteriori* par l'expérience), soit :

$$\frac{\partial p'}{\partial z} \ll \frac{\partial p_d}{\partial z} \quad (2.42b)$$

et il reste :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho_d + \rho'} \frac{\partial p_d}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)$$

ou encore, avec (2.40), en remplaçant  $\frac{\partial p_d}{\partial z} = -\rho_d g$  :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -g \frac{\rho_d + \rho' - \rho_d}{\rho_d + \rho'} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)$$

et en négligeant  $\rho'$  au dénominateur :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -g \frac{\rho'}{\rho_d} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (2.42c)$$

Les fluctuations de masse volumique et de température sont liées par la relation (2.16c) (avec ici  $\rho_0 = \rho_d$ ) :

$$\rho' = -\rho_0 \beta \theta \cong -\rho_d \beta \theta \quad (2.43)$$

de sorte que (2.42c) devient une équation aux petites perturbations :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \beta \theta g + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (2.44)$$

De la même façon, compte tenu de (2.40) et (2.41), l'équation d'énergie (1.39b) se transforme en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(T_d + \theta)}{\partial t} + U \frac{\partial(T_d + \theta)}{\partial x} + W \frac{\partial(T_d + \theta)}{\partial z} \\ = a \left( \frac{\partial^2 T_d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_d}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Au premier membre,  $T_d$  est indépendante de  $t$  et de  $x$ , tandis que  $U \partial \theta / \partial x$  et  $W \partial \theta / \partial z$  sont du second ordre, donc négligés. Au second membre,  $T_d$  est une fonction linéaire de  $z$ , son laplacien est donc nul. Si l'on prend en compte (2.40), l'équation d'énergie aux petites perturbations s'établit finalement ainsi :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = W \frac{\Delta T}{h} + a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (2.45)$$

♥ L'observation des structures thermoconvectives suggère ensuite de rechercher pour la perturbation verticale  $W$  de la vitesse une fonction de la forme :

$$W(t, x, z) = f_1(t) \left( \cos \pi \frac{x}{h} \right) \left( \sin \pi \frac{z}{h} \right) \quad (2.46a)$$

Le terme en  $x$  traduit la périodicité des cellules selon la direction  $x$ , celles-ci ayant un diamètre de l'ordre de  $h$ .

Quant au terme en  $z$ , il exprime la périodicité selon la verticale du mouvement qui fera suite à la perturbation  $W$ . En effet, si l'on suit une particule fluide autour d'une cellule (fig. 2.8), on voit que sa vitesse verticale va passer par un extrêmu positif au milieu du courant ascendant ( $z = h/2$ ), puis par zéro au sommet ( $z = h$ ), par un extrêmu négatif dans le courant descendant, et à nouveau par zéro au voisinage du sol ( $z = 0$ ).

Enfin, le rôle de représenter l'évolution d'une fluctuation est dévolu à la fonction  $f_1(t)$ , pour laquelle on cherchera d'abord une forme exponentielle :

$$f_1(t) = W_0 e^{\sigma t} \quad (2.46b)$$

de sorte que  $\sigma < 0$  correspond à un amortissement, et  $\sigma > 0$  à une amplification.

Une hypothèse analogue sera faite sur la perturbation de température  $\theta$ , à savoir :

$$\theta(t, x, z) = f_2(t) \left( \cos \pi \frac{x}{h} \right) \left( \sin \pi \frac{z}{h} \right) \quad (2.47a)$$

avec le même paramètre d'amortissement  $\sigma$  que pour la vitesse, soit:

$$f_2(t) = \theta_0 e^{\sigma t} \quad (2.47b)$$

En remplaçant (2.46) et (2.47) dans l'équation (2.44), il vient :

$$W_0 \sigma e^{\sigma t} \cos \pi \frac{x}{h} \sin \pi \frac{z}{h} = g \beta \theta_0 e^{\sigma t} \cos \pi \frac{x}{h} \sin \pi \frac{z}{h} + \nu W_0 e^{\sigma t} \left( -\frac{\pi^2}{h^2} \cos \pi \frac{x}{h} \sin \pi \frac{z}{h} - \frac{\pi^2}{h^2} \cos \pi \frac{x}{h} \sin \pi \frac{z}{h} \right)$$

et, en simplifiant :

$$W_0 \sigma = g \beta \theta_0 - 2 \nu W_0 \frac{\pi^2}{h^2} \quad (2.48a)$$

On obtient de la même façon, pour l'équation d'énergie (2.45) :

$$\theta_0 \sigma = W_0 \frac{\Delta T}{h} - 2 a \theta_0 \frac{\pi^2}{h^2} \quad (2.48b)$$

♠ Ces deux équations constituent un système homogène en  $W_0$  et  $\theta_0$ . Elles doivent satisfaire à une condition de compatibilité que l'on obtient en éliminant ces deux paramètres (par exemple en tirant  $\theta_0$  de la seconde équation pour le reporter dans la première, et en simplifiant), et qui a pour expression :

$$\left( 2 \nu \frac{\pi^2}{h^2} + \sigma \right) \left( 2 a \frac{\pi^2}{h^2} + \sigma \right) = g \beta \frac{\Delta T}{h}$$

L'écart de température critique  $\Delta T_c$  qui marque la limite entre l'état diffusif (amortissement,  $\sigma < 0$ ) et l'état convectif (amplification,  $\sigma > 0$ ) correspond à  $\sigma = 0$ , soit en isolant le coefficient numérique :

$$\frac{g \beta \Delta T_c h^3}{\nu a} = 4 \pi^4 \quad (2.49)$$

On appelle « nombre de Rayleigh », et on note  $Ra$  le groupement sans dimension :

$$\boxed{\frac{g \beta \Delta T h^3}{\nu a} = Ra} \quad (2.50)$$

Le seuil de déclenchement de l'instabilité thermoconvective est donc caractérisé par une valeur critique  $Ra_c$  de ce nombre de Rayleigh :

$$Ra_c = 4\pi^4 \cong 390 \quad (2.51)$$

### 2.5.3. – COMMENTAIRES

♣ En fait, la valeur numérique de  $Ra_c$  dépend beaucoup des conditions aux limites et de certaines approximations. Par exemple, en  $z = 0$  et  $z = h$ , on peut choisir des conditions de frontière libre, décrites par  $W = 0$  et  $\theta = 0$ . C'est ce qui a été fait implicitement dans le paragraphe précédent, où ces conditions satisfont les hypothèses (2.46) et (2.47).

Mais on peut aussi considérer que la couche fluide est confinée entre deux parois matérielles, ce qui entraîne :

$$W = \partial W / \partial z = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = h$$

et il faut alors modifier (2.46a) pour respecter cette condition. D'autres conditions aux limites sont également envisageables.

D'autre part, les expressions (2.46) et (2.47) de  $W$  et de  $\theta$  ont été construites en considérant des cellules convectives strictement cylindriques. Dans la réalité, leur forme est un peu différente, ressemblant plutôt à des carrés aux angles arrondis. La différence intervient alors dans les termes trigonométriques, où  $\pi x/h$  et  $\pi z/h$  doivent être remplacés par des fonctions adaptées  $k_1 x$  et  $k_2 z$ .

Signalons que dans le cas particulier de deux parois rigides, les résultats d'expériences réalisées avec des liquides donnent pour le nombre de Rayleigh critique la valeur :

$$Ra_c = 1708 \quad (2.52)$$

♪♪ Quoi qu'il en soit, l'essentiel n'est pas ici la valeur précise du nombre de Rayleigh critique, mais bien plutôt son existence en tant que *critère de stabilité*.

◆ Le nombre de Rayleigh a déjà été introduit dans un autre cadre (FEMM, § 2.5.3.3), celui de la similitude, en notant que :

$$Ra = Gr Pr \quad (2.53)$$

♪♪ Nous avons alors insisté sur le fait que  $Ra$  n'est pas un critère de similitude. Il est pourtant souvent utilisé pour caractériser la transition laminaire-turbulent, alors que ce rôle devrait être réservé à  $Gr$  (PTC, § 5.4.2.3), ou éventuellement au nombre de Boussinesq (Kays et Crawford, 1993, p.408).

La véritable nature du nombre de Rayleigh se révèle donc dans l'analyse précédente, comme *critère de stabilité thermoconvective*. Son caractère adimensionnel n'en fait pas pour autant un critère de similitude.

### 2.5.4. – APPLICATION A L'ATMOSPHERE

♣ Dans le cas de l'atmosphère, les conditions aux limites correspondent plutôt à la présence d'une frontière rigide (le sol) et d'une frontière libre (atmosphère libre au-dessus de la zone convective, § 2.1.2.♣). Le calcul donne alors comme valeur critique :

$$Ra_c \cong 1101 \quad (2.54)$$

mais vu la multiplicité des paramètres en jeu, cette valeur n'est qu'indicative, d'autant plus que l'étude a été effectuée en géométrie bidimensionnelle. Dans la réalité, la structure de l'écoulement est tridimensionnelle, ce qui affecte aussi la valeur numérique de  $Ra_c$ .

◆ Pour l'air, la dilatabilité est déduite de la loi des gaz parfaits :  $\beta = 1/T$  (Annexe 1.2). Voyons à partir de quel écart  $\Delta T_c$  un mouvement de convection naturelle peut survenir

dans une couche de  $100\text{ m}$  au-dessus du sol, à la température ambiante. On a donc :

$$h = 100\text{ m} ; \quad T = 290\text{ K} ; \quad \beta = 1/T = 3,45 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$$

$$\nu = 1,57 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s} ; \quad a = 2,22 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$$

En se basant sur la valeur critique (2.54) du nombre de Rayleigh, on trouve une valeur de  $\Delta T_c$  extrêmement faible (de l'ordre de  $10^{-11}\text{ K}$ ). Autrement dit, des structures thermoconvectives peuvent se former dès que le gradient de température  $dT/dz$  devient négatif (sol plus chaud que l'air). Ceci provient de l'échelle de longueur  $h$  considérée (qui intervient avec l'exposant 3 dans  $Ra$ ). On obtiendrait un seuil très différent avec une couche d'air de quelques centimètres seulement.

♥ L'hypothèse isentropique (§ 1.1) n'est pas compatible avec le mécanisme qui donne naissance aux cellules de Bénard-Rayleigh. Elle suppose en effet une évolution suffisamment rapide pour être adiabatique, c'est-à-dire sans échange de chaleur. Dans la théorie précédente, au contraire, les évolutions sont lentes et la diffusion thermique joue pleinement son rôle dans l'équation d'énergie, ce qui explique la présence de la diffusivité  $a$  dans le nombre de Rayleigh.

## 2.6. – Panorama des critères de stabilité

Plusieurs critères de stabilité ont été présentés dans les paragraphes précédents. Il peut être utile de les récapituler et de les comparer.

♣ Un premier critère peut être qualifié de « critère de stabilité archimédien ». Il est basé sur le comportement d'une particule fluide en équilibre avec son environnement, qui se trouve déplacée accidentellement : selon l'évolution de son poids apparent, elle revient (stabilité) ou elle ne revient pas (instabilité) à sa position initiale. Dans un liquide, le seuil de stabilité associé au critère archimédien est :  $\partial T / \partial z = 0$  (§ 1.8). Dans l'atmosphère, le seuil de stabilité est :  $(\partial T / \partial z) = (\partial T / \partial z)_{ad}$  (§ 1.4 et 1.8).

Ce critère représente une propriété locale.

◆ Un second critère, de nature différente, concerne la stabilité de la couche limite atmosphérique turbulente. Il est basé sur la comparaison de l'énergie turbulente de cisaillement et de l'énergie turbulente de flottabilité, et s'exprime par le nombre de Richardson par le nombre de Richardson atmosphérique  $Ri_a$  (§ 2.2.4). Le seuil de stabilité est alors :  $Ri_a = 0$ , c'est-à-dire  $\partial T / \partial z = 0$ .

Il s'agit encore d'une propriété locale.

♥ Le troisième critère de stabilité caractérise l'apparition, sous l'effet d'un gradient de température vertical, de mouvements convectifs d'ensemble dans une couche fluide initialement immobile. Il s'exprime par le nombre de Rayleigh  $Ra$ , aussi bien pour les liquides que pour les gaz (§ 2.5.2). Le seuil d'instabilité correspond à une valeur critique  $Ra_c$  de ce paramètre, qui dépend des conditions expérimentales. Dans l'atmosphère il correspond à un gradient presque nul :  $\partial T / \partial z \cong 0$ .

Ce paramètre est un critère de stabilité globale, qui concerne l'ensemble de la couche fluide.

## 2.7. – Quand le vent rencontre des obstacles

Quelques considérations pratiques sur les effets du vent compléteront les développements plus théoriques qui précèdent.

### 2.7.1. – EFFORTS EXERCÉS SUR UN OBSTACLE

#### ♣ *Traînée*

La traînée d'un obstacle a été définie dans FEMM (§ 7.1.1). C'est la force totale exercée sur l'obstacle suivant la direction de l'écoulement. Elle est la résultante des forces de pression et des forces de frottement.

#### ◆ *Forces de pression*

La répartition des forces de pression présente souvent un intérêt particulier, spécialement dans le domaine de la construction. Plus précisément, le paramètre important est la « *pression effective*  $\Delta \bar{p}$  », différence entre la pression statique moyenne  $\bar{p}$  et la pression atmosphérique  $p_a$  :

$$\Delta \bar{p} = \bar{p} - p_a \quad (2.55a)$$

La surface de l'obstacle est localement en *surpression* avec  $\Delta \bar{p} > 0$ , et en *dépression* avec  $\Delta \bar{p} < 0$ .

Soit  $U$  la vitesse moyenne du vent. Il est commode de caractériser la pression effective par un nombre sans dimension appelé « *coefficient de pression*  $C_p$  », défini par :

$$\boxed{\frac{1}{2} C_p = \frac{\Delta \bar{p}}{\rho U^2}} \quad (2.55b)$$

Ce paramètre doit être rapproché du coefficient de frottement  $C_f$  et du coefficient de traînée  $C_X$  (FEMM, ch. 5 à 7), qui sont construits d'une manière analogue. Mais il peut être positif ou négatif. La distribution de  $C_p$  sur l'enveloppe d'un bâtiment dépend évidemment de sa forme et de la direction du vent. Cependant, dans une grande majorité de cas, on a :

$$-0,7 < C_p < +0,7 \quad (2.55c)$$

On peut admettre aussi que, sauf pour des vents faibles, le coefficient de pression est indépendant du nombre de Reynolds, donc constant. Alors, pour une vitesse de vent donnée, la pression effective sera obtenue en renversant (2.55b) :

$$\Delta \bar{p} = \frac{1}{2} C_p \rho U^2 \quad (2.55d)$$

Ainsi, en un point où  $C_p = +0,5$ , avec un vent de  $36 \text{ km/h}$ , la surpression aura pour valeur, à la température ambiante ( $\rho \cong 1,2 \text{ kg/m}^3$ ) :

$$\Delta \bar{p} \cong \frac{1}{2} \times 0,5 \times 1,2 \times \left( \frac{36000}{3600} \right)^2 = 30 \text{ Pa} = 3 \text{ mmCE}$$

et si le vent passe à  $72 \text{ km/h}$  :

$$\Delta \bar{p} = 120 \text{ Pa} = 12 \text{ mmCE}$$

(pour l'expression de la pression en mètres de colonne d'eau ( $mCE$ ) ou millimètres de colonne d'eau ( $mmCE$ ), on se reportera à FEMM, définition 6.114a, ainsi qu'aux paragraphes 7.4.2 et 7.4.4).

🎵 La terminologie usuelle désigne par « *au vent* » le côté de l'obstacle qui est directement soumis à l'action du vent. Le côté opposé est dit « *sous le vent* ».

La figure 2.9 représente schématiquement la répartition de pression effective sur les murs d'une maison, dans le cas où la direction du vent s'écarte légèrement de la normale à la façade. On observe nettement deux zones localisées sur lesquelles la pression est maximale, l'une en surpression, l'autre en dépression. Mais surtout, il s'avère que seul, le côté au vent est en surpression. Les trois autres murs sont en dépression.

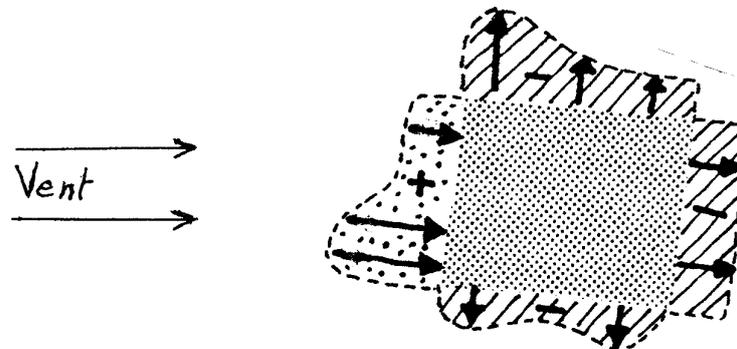


FIG. 2.9 – Répartition de pression sur les murs d'une maison.

La figure 2.10 complète la précédente en procurant un ordre de grandeur des coefficients de pression sur une maison rectangulaire à toit en double pente ( $22^\circ 30'$ ), soumise à un vent d'incidence normale. Les données numériques proviennent d'essais en soufflerie réalisés au CSTB de Nantes (J. Gandemer & coll.). Il est à noter qu'elles présentent une très légère dissymétrie, mais celle-ci rentre dans la marge d'incertitude expérimentale.

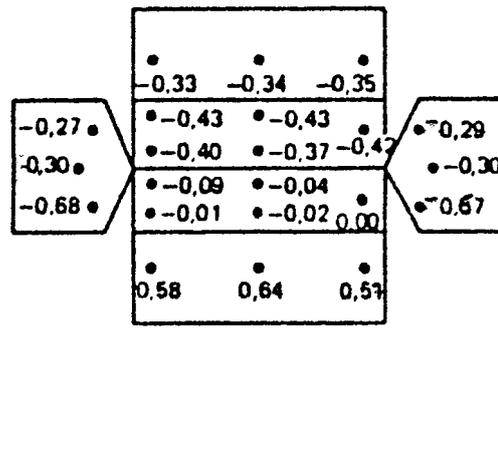


FIG. 2.10 – Coefficients de pression sur les parois extérieures d'une maison.  
 Surface développée : à droite et à gauche, pignons ; en bas et en haut, façade au vent et façade sous le vent ; au centre, les deux pans du toit.

On retiendra de ces deux figures un élément essentiel : c'est que *la plus grande partie de la surface d'un bâtiment se trouve en dépression*. Même la face au vent d'une toiture est dans cette situation tant que sa pente est inférieure à  $30^\circ$  environ. En particulier, une toiture terrasse est toujours en dépression.

!♪! Une conséquence est que, lorsque les tuiles d'un toit s'envolent sous l'effet d'un vent violent, dans la majorité des cas, ce sont les tuiles du côté sous le vent qui sont aspirées par la dépression (Annexe 2.1) (une interprétation hâtive serait d'attribuer le phénomène à l'air qui s'infiltrerait sous les tuiles du côté au vent pour les soulever, mais il n'en est rien).

D'ailleurs, dans certaines régions du monde, lorsque survient un cyclone tropical, les habitants maintiennent une porte ou une fenêtre ouverte du côté sous le vent. La dépression s'applique alors à l'intérieur du bâtiment, ce qui diminue d'autant la dépression exercée sur le toit. Par exemple, avec les données de la figure 2.10, le coefficient de pression maximal appliqué à la pente sous le vent passe de  $-0,43$  à  $\{-0,43 - (-0,34)\} = -0,09$ . Cependant, l'effort exercé sur la façade au vent est amplifié, puisque la force due à la surpression extérieure va alors s'ajouter à la force due à la dépression intérieure.

### ♥ Rafales de vent

Les désordres provoqués par le vent sur les constructions sont plus souvent dus aux effets de la turbulence qu'à ceux de la vitesse moyenne, et en particulier aux effets des grosses structures turbulentes atmosphériques, communément appelées « rafales de vent ».

Il est utile de revenir sur la notion d'intensité globale de turbulence (FEMM, § 3.4.5), définie par :

$$I = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{|\vec{V}|} \quad (2.56a)$$

Avec des vents moyens, la turbulence est relativement homogène, de sorte que :

$$\overline{u^2} \cong \overline{v^2} \cong \overline{w^2} \quad (2.56b)$$

Par contre, les rafales de vent sont plus directionnelles (même si elles s'accompagnent d'un moment cinétique important), et on admettra qu'elles s'appliquent essentiellement dans la direction  $x$  du vent. C'est donc plutôt le « *taux de turbulence* » dans la direction  $x$  (FEMM, 3.82c) qui devra être pris en compte, soit ici :

$$I_x = \frac{\sqrt{\overline{u^2}}}{U} \quad (2.57)$$

Partant de (2.55d), si l'on admet que  $C_p$  est constant, la pression instantanée  $\Delta p(t)$  due à une rafale sera donc reliée à la vitesse instantanée  $U(t)$  par :

$$\Delta p(t) = \frac{1}{2} C_p \rho [U(t)]^2 \quad (2.58)$$

Le problème pratique consiste à présent à évaluer la vitesse  $U(t)$  au passage d'une rafale. La variance  $\overline{u^2}$  n'est qu'une information partielle, puisque c'est une moyenne quadratique des fluctuations. Or, ce sont les pointes de vitesse qui doivent être prises en compte pour le dimensionnement des structures et pour de nombreuses questions de sécurité (fig. 2.11).

L'évaluation des vitesses extrêmes (notées  $\hat{U}$ ) est forcément entachée d'incertitude, car il n'existe pas de relation générale qui les relie au vent moyen et au taux de turbulence. On se repose habituellement sur une expression empirique :

$$\hat{U} = U + n\sqrt{\overline{u^2}} \quad (2.59)$$

où  $n$  est un « *facteur de pointe* » qui dépend des caractéristiques du vent, et donc en grande partie de la région géographique concernée.

La pression effective correspondante est en conséquence :

$$\Delta \hat{p}(t) = \frac{1}{2} C_p \rho \hat{U}^2 \quad (2.60)$$

Pratiquement, dans (2.59), on peut admettre que :

$$1,5 < n < 3 \quad (2.61)$$

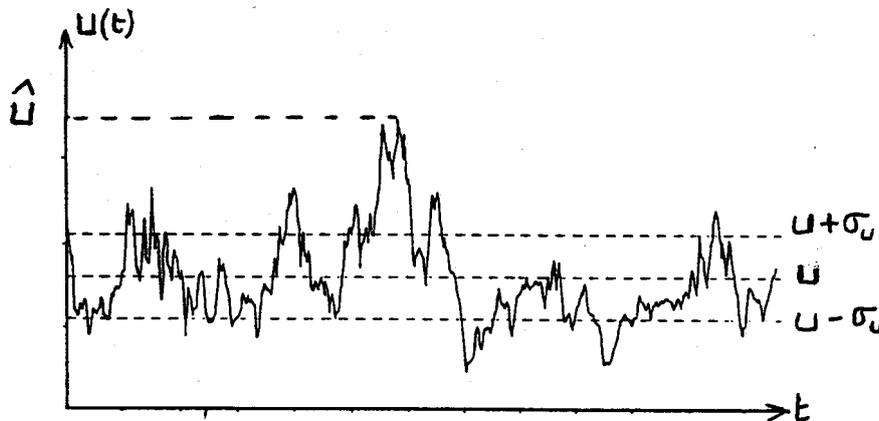


FIG. 2.11 – Vent moyen  $U$  ; écart-type de la turbulence  $\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2}}$  ; vitesse de pointe  $\hat{U}$  .

## 2.7.2. – QUELQUES OBSTACLES PARTICULIERS

Les obstacles naturels ou artificiels au vent sont d'une grande diversité, et ils font l'objet d'ouvrages spécialisés. Nous en signalons seulement quelques-uns à titre d'exemples.

### ♣ *Élévation de terrain*

Le vent qui rencontre une élévation de terrain est soumis à une forme particulière d'effet venturi (FEMM, § 7.3.1.6). Tout se passe comme si la section de passage offerte à l'écoulement de l'air était rétrécie, d'où une augmentation de vitesse au sommet, accompagnée d'une baisse de pression (fig. 2.12). La partie haute du relief est donc en dépression. Cette propriété a parfois été utilisée, dans des pays très chauds, pour la ventilation naturelle d'édifices ou de maisons, en plaçant un orifice au point haut de la construction.

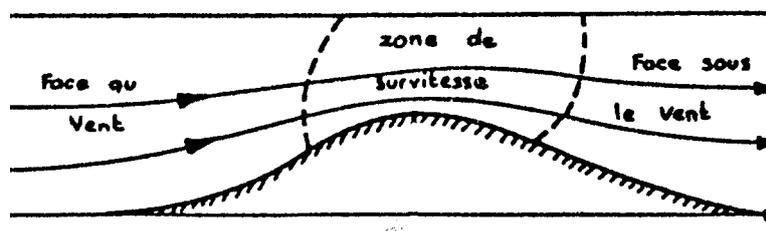


FIG. 2.12 – *Écoulement de l'air sur une élévation de terrain.*

### ◆ *Brise-vent artificiels*

Pour protéger du vent une zone de dimensions limitées, on pense parfois qu'un mur ou une paroi rigide est une solution efficace. En réalité, un écran plein ne constitue pas un bon brise-vent. Certes, il entraîne un ralentissement de la vitesse derrière l'écran, sur une distance de 2 à 3 fois sa hauteur ; mais en contrepartie, il provoque une importante survitesse à sa partie supérieure, et surtout il génère du côté sous le vent une zone tourbillonnaire, avec en particulier un rouleau d'axe horizontal, qui atténue l'effet de protection.

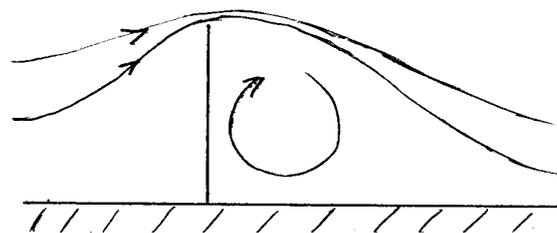


FIG. 2.13 – *Vent dévié par un écran plein*

Les *écrans ajourés*, présentant des vides régulièrement répartis, ont une efficacité très supérieure. La zone tourbillonnaire est destructurée par l'air qui traverse l'écran, dont la vitesse est sensiblement diminuée (fig. 2.14). En outre, la distance protégée est supérieure (5 à 6 fois la hauteur de l'écran). Un pourcentage de vides de 20% à 25% semble l'optimum.

!!! Cependant, il faut prendre garde au fait que l'effort aérodynamique sur un écran ajouré est presque le même que sur un écran plein (les ouvertures se comportent comme des pertes de charge singulières, cf. FEMM § 6.7.1, 6.7.3 et 7.3.1.7). Les supports, les ancrages et l'écran doivent donc présenter la même résistance mécanique, faute de quoi on les retrouve pliés, cassés ou déchirés au premier gros coup de vent. Les toiles ajourées qui protègent beaucoup d'échafaudages sont soumises aux mêmes règles, et elles sont souvent détériorées assez rapidement.

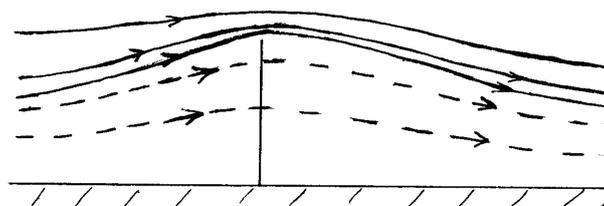


FIG. 2.14 – Protection au vent par un écran ajouré

♥ *Brise-vent végétaux*

Une bande boisée assez perméable, et large, constitue le brise-vent le plus efficace. Elle combine les effets de l'élévation de terrain et de l'écran ajouré (fig. 2.15).



FIG. 2.15 – Protection par une zone boisée.

*Chaque arbre représenté appartient à une rangée perpendiculaire au plan de la figure*

Une partie de l'air traverse la bande boisée, et elle se trouve ralentie à l'arrière, sans donner naissance à une zone tourbillonnaire. D'autre part, la dépression au sommet des arbres produit un écoulement ascendant qui diminue progressivement le débit traversant. La zone protégée peut atteindre 30 fois la hauteur de l'écran.

Les haies naturelles et les brise-vent plantés cherchent à approcher l'efficacité des bandes boisées (fig. 2.16). Une combinaison de feuillus et de cyprès, ou de roseaux, reste efficace sur l'ensemble de l'année.

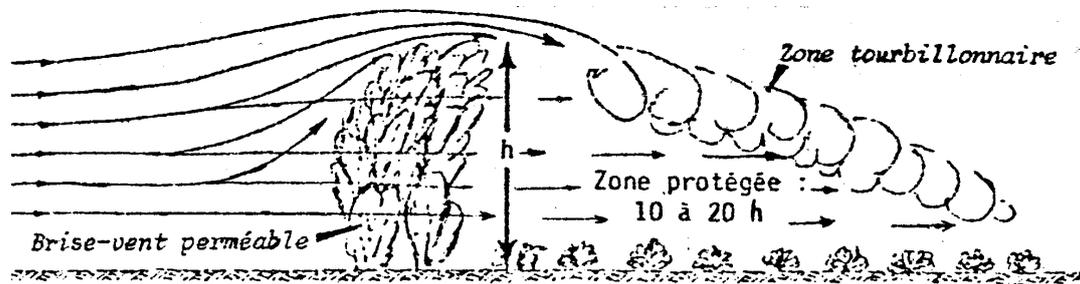


FIG. 2.16 – Protection par un brise-vent végétal

#### ANNEXE 2.1. – EXERCICE : Des tuiles dans le vent

Un toit à deux pentes, couvert de tuiles mécaniques, est soumis à un vent moyen  $U$  d'incidence normale.

Les pentes sont de  $20^\circ$  ; le coefficient de pression maximal du côté sous le vent est :  $C_p = -0,42$ . Les tuiles mécaniques normalisées ont une masse  $M = 4 \text{ kg}$ , et une surface  $S = 0,105 \text{ m}^2$ . Le taux de turbulence dans la direction du vent est  $I_x = 22\%$ , et le facteur de pointe  $n = 2,5$ . On prendra comme masse volumique de l'air  $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ .

*Question :*

A partir de quel vent moyen les tuiles risquent-elles de commencer à s'envoler ? Quelle est la vitesse de pointe correspondante ?

*Solution :*

1) Pour le soulèvement d'une tuile, la vitesse à prendre en compte est la vitesse de pointe (2.59) :

$$\hat{U} = U + n \sqrt{u^2}$$

$$\text{On donne : } I_x = \frac{\sqrt{u^2}}{U} = 0,22, \text{ d'où avec } n = 2,5:$$

$$\hat{U} = U + 2,5 \times 0,22 U$$

$$\hat{U} = 1,55 U$$

2) La force normale  $F$  exercée sur une tuile par une rafale est donnée par (2.60) :

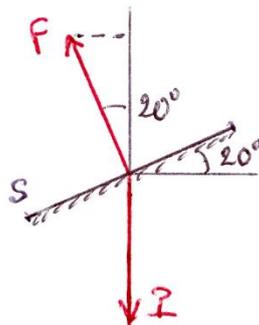
$$F = \Delta \hat{p} S = \frac{1}{2} C_p S \rho \hat{U}^2$$

$$F = \frac{1}{2} \times 0,42 \times 0,105 \times 1,25 \times (1,55 U)^2$$

$$F = 0,066 U^2$$

3) Le poids d'une tuile est :  $P = M g \cong 40 \text{ N}$ . Compte tenu de la pente du toit (voir figure), elle est soulevée si :

$$F \cos 20^\circ > P$$



soit, sachant que  $\cos 20^\circ = 0,94$  :

$$0,94 \times 0,066 U^2 > 40$$

$$U > 25,3 \text{ m/s} \cong 91 \text{ km/h}$$

La vitesse de pointe correspondante est :

$$\hat{U} = 1,55 U \cong 140 \text{ km/h}$$

*Quand la jupe à Mireille  
Haut se troussa, haut se retroussa,  
Découvrant des merveilles :  
Quel joli vent s'est permis ça ?  
C'est le zéphyr,  
N'aurait pu suffir',  
C'est pas lui non plus,  
L'aquilon joufflu,  
C'est par pour autant  
L'autan.  
Non, mais c'est le plus fol  
Et le plus magistral  
De la bande à Eole,  
En un mot le mistral.  
Il me montra sa jambe,  
Aussi, reconnaissant,  
Je lui laisse emporter  
Mes tuiles en passant.*

Georges BRASSENS – *Le chapeau de Mireille*

### 3. – ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE

#### 3.1. – Présentation

Pour faire le lien avec le paragraphe 1, imaginons que l'on ait injecté dans un récipient un mélange de gaz et de gouttes liquides. En présence d'un champ de pesanteur, une stratification va s'opérer, les gouttes tombant au fond du récipient et fusionnant pour former un domaine liquide surmonté par le gaz (le même mécanisme est à l'œuvre quand il pleut). La surface de séparation est appelée *surface libre du liquide*. Au repos, elle est plane et horizontale (du moins en première approximation ; en réalité, elle épouse la courbure de la terre). La forme du fond du récipient est ici sans influence.

Supposons maintenant que le « récipient » soit un canal dont le fond est en pente. Sous l'effet de la gravité, le liquide va se déplacer dans le sens descendant : on a réalisé *un écoulement à surface libre*. Nous verrons plus loin que, alors, cette surface libre n'est plus horizontale.

D'un point de vue mécanique, dans ce type d'écoulement, le moteur du mouvement est uniquement le champ de pesanteur, la perte d'énergie potentielle du liquide étant égale à l'énergie dissipée dans les frottements visqueux.

#### 3.2. – Caractères particuliers

##### 3.2.1. – PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES

Quand on parle d'écoulements à surface libre, les exemples qui viennent d'abord à l'esprit sont les cours d'eau naturels. Mais rentrent aussi dans cette catégorie différents types de canaux (comme ceux qui servent à l'irrigation), les réseaux d'assainissement, les films liquides (principalement utilisés comme moyens de refroidissement), et même les écoulements de verre ou de métaux fondus (dans les verreries et les aciéries).

♣ Les caractéristiques géométriques d'un écoulement à surface libre sont en premier l'*aire*  $S$  et la forme de sa section droite. Si les sections droites des écoulements naturels sont de forme assez irrégulière, les autres sections sont le plus souvent rectangulaires, trapézoïdales ou circulaires (fig. 3.1).

La *largeur de la surface libre* est notée  $l$ , la *profondeur maximale*  $h$ , et la *largeur du fond* (lorsqu'il est plat)  $b$ . La *profondeur moyenne*  $h_m$  (fig. 3.1a, hauteur d'une section rectangulaire de largeur  $l$  et de surface  $S$ ) a pour valeur :

$$h_m = S/l \quad (3.1a)$$

Parmi les écoulements à surface libre, les *écoulements en film* sont caractérisés à la fois par une faible valeur de la profondeur (de quelques microns à quelques mm) et par un faible rapport  $h_m/l$ .

Le *périmètre mouillé* est la partie du périmètre de  $S$  en contact avec la paroi. Il est désigné par  $P$ .

◆ Remarquons ensuite que les écoulements à surface libre présentent de nombreuses analogies avec les écoulements internes. Ainsi, au parag. 6.6.1.5 de FEMM, on a défini pour ceux-ci une « dimension caractéristique du conduit »  $L_c$  (formule 6.122d) :

$$L_c = \frac{\text{section } S}{\text{périmètre}} \quad (3.1b)$$

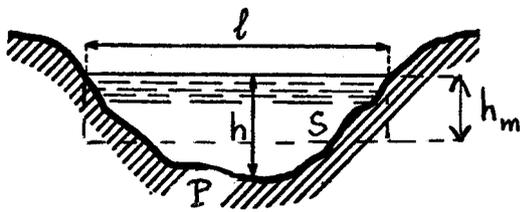
qui relie la perte de pression motrice et la contrainte moyenne de frottement sur la paroi  $\tau_{pm}$  (relation 6.123) :

$$\frac{dp^*}{dx} = - \frac{\tau_{pm}}{L_c} \quad (3.1c)$$

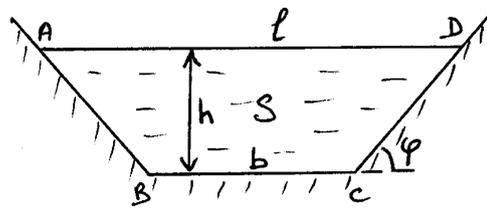
Cette dimension caractéristique est généralement remplacée dans l'usage courant par le « diamètre hydraulique »  $D_h$  qui possède une signification équivalente. Il est défini par (FEMM 6.131) :

$$D_h = \frac{4 S}{\text{périmètre}} = 4 L_c \quad (3.1d)$$

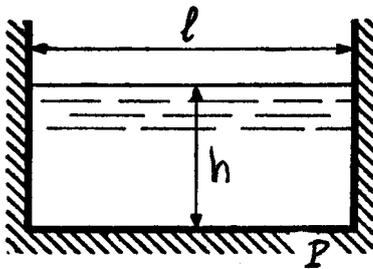
ce qui présente l'avantage de donner, pour un tube circulaire, un diamètre hydraulique égal au diamètre du tube.



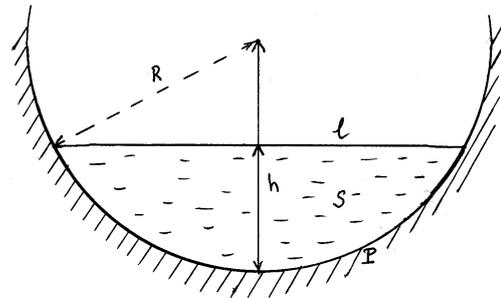
3.1. a



3.1. b



3.1. c



3.1. d

FIG. 3.1. – Caractéristiques géométriques des sections

Dans les écoulements à surface libre, le frottement pariétal s'exerce uniquement le long du périmètre mouillé  $P$  (du moins si on néglige le frottement avec le gaz ambiant, à la surface libre, cf. Annexe 3.2), et le diamètre hydraulique devient :

$$D_h = \frac{4 S}{P} \quad (3.2)$$

← On fera très attention au fait que, pour respecter une tradition ancienne, beaucoup d'auteurs posent  $D_h = 2 S/P$  (ou  $R_h = S/P$  pour le *rayon hydraulique*), soit la moitié. Ceci est discutable puisqu'on introduit ainsi une incohérence entre écoulements à surface libre et écoulements internes. En particulier, dans un conduit cylindrique, si on augmente la hauteur  $h$  jusqu'à remplir tout le tube, l'écoulement devient interne, mais avec un diamètre hydraulique égal au rayon du tube, au lieu du diamètre !

Pour les sections représentées sur la figure 1, on a respectivement :

- *Section trapézoïdale* (fig. 3.1b). Les données sont généralement la largeur  $b$  du fond, la profondeur  $h$  et l'angle  $\varphi$  que fait le talus avec l'horizontale, d'où :

$$l = b + \frac{2h}{\operatorname{tg} \varphi} \quad ; \quad P = ABCD = b + \frac{2h}{\sin \varphi} \quad ; \quad S = \frac{l}{2} (l + b) h = bh + \frac{h^2}{\operatorname{tg} \varphi}$$

$$D_h = 4 \frac{bh + \frac{h^2}{\operatorname{tg} \varphi}}{b + \frac{2h}{\sin \varphi}} \quad (3.3a)$$

- *Section triangulaire* : il suffit de faire  $b = 0$  dans les expressions précédentes.

- *Section rectangulaire* (fig. 3.1c). On a dans ce cas  $b = l$ , soit :

$$P = l + 2h \quad ; \quad S = lh$$

$$D_h = \frac{4lh}{l + 2h} \quad (3.3b)$$

Si le rapport  $h/l$  est petit (par exemple dans les écoulements en film), alors :

$$D_h \cong 4h \quad (3.3c)$$

- *Section circulaire* (fig. 3.1.d). La section de l'écoulement est appelée en géométrie un « secteur circulaire ». La largeur de la surface libre est la corde du secteur, et le périmètre mouillé en est la longueur de l'arc. Si les données sont le rayon  $R$  et la profondeur  $h$ , dans le cas où  $h < R$ , on a :

$$l = 2 \sqrt{h(2R - h)} \quad ; \quad P = 2R \operatorname{arc} \cos \frac{R - h}{R}$$

$$S = R^2 \operatorname{arc} \cos \frac{R - h}{R} - (R - h) \sqrt{h(2R - h)}$$

$$D_h = 2R - 2 \frac{(R - h) \sqrt{h(2R - h)}}{R \operatorname{arc} \cos \frac{R - h}{R}} \quad (3.3d)$$

♥ Enfin, le paramètre essentiel des écoulements à surface libre est l'angle  $\alpha$  que fait le fond du canal (direction  $x$ ) avec l'horizontale (fig. 3.2). Notons au passage que le fond du canal est appelé *radier*.

Si  $z$  est la direction verticale ascendante, *la pente  $i$*  du radier est la dénivellation  $dz$  rapportée à la distance parcourue  $dx$  (avec un signe – pour avoir une grandeur positive), soit :

$$i = -\frac{dz}{dx} = \sin \alpha \quad (3.4a)$$

Dans beaucoup de cas, cette pente est suffisamment faible ( $< 5 \cdot 10^{-2}$ , soit  $5\text{ m}/100\text{ m}$ ) pour que l'on puisse admettre :

$$i \cong \alpha \cong \text{tg } \alpha \quad \text{et} \quad \cos \alpha \cong 1 - \frac{\alpha^2}{2} \cong 1 - \frac{i^2}{2} \quad (3.4b)$$

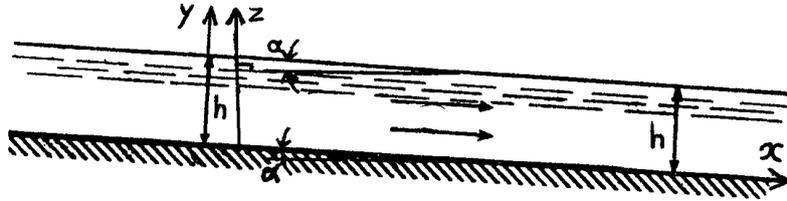


FIG. 3.2 – Pente d'un canal :  $i = \sin \alpha$

### 3.2.2. – CLASSIFICATION

Une classification schématique des écoulements à surface libre peut être établie sur la base de la profondeur  $h$ , ou plus précisément de la variation de  $h$  le long de l'écoulement. Une illustration simple en est donnée sur la figure 3.3, qui représente l'écoulement à la sortie d'un déversoir. On y distingue successivement :

- Un écoulement rapidement varié vers le seuil du déversoir (zone AB) :  $h$  varie rapidement.
- Un écoulement graduellement varié (zone BC) :  $h$  varie lentement.
- Un écoulement uniforme (zone CD) où  $h = \text{cte}$  si la pente  $i$  est elle-même constante sur une distance assez grande.
- Un écoulement rapidement varié (zone DE), consécutif à un changement de pente.
- A nouveau un écoulement uniforme ((après E) si la pente reste constante.

Bien entendu, cette classification se superpose à la distinction laminaire / turbulent, chacun des modes d'écoulement cités plus haut pouvant être laminaire, de transition, ou turbulent.

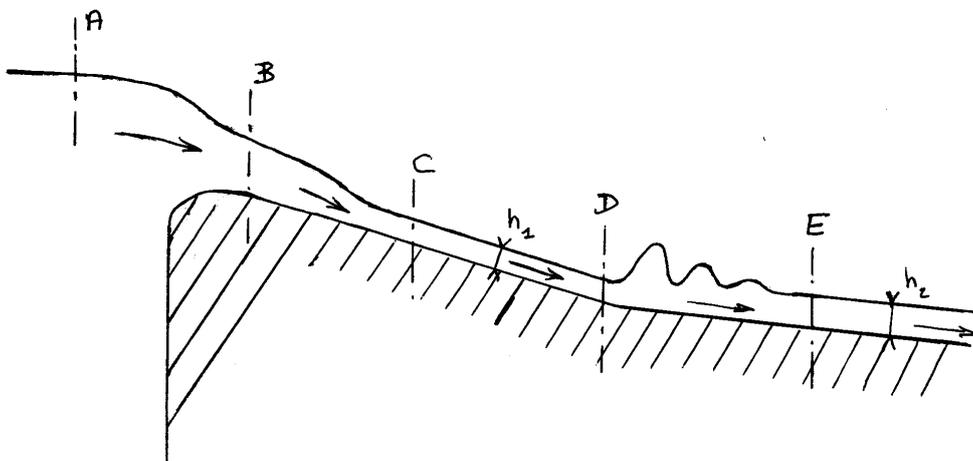


FIG. 3.3 – Principales familles d'écoulements à surface libre

### 3.2.3. – CRITÈRES DE SIMILITUDE

Les critères de similitude  $\Gamma$  impliqués dans les écoulements à surface libre ont été présentés au chapitre 2 de FEMM (§ 2.4.3.2, 2.4.3.3 et 2.4.3.5) : ce sont le *nombre de Froude*  $Fr$  (similitude relativement aux forces de pesanteur) et le *nombre de Reynolds*  $Re$  (similitude relativement aux forces de viscosité), ou plus exactement leurs inverses :

$$Fr = \frac{1}{\Gamma_g} = \frac{(V^\circ)^2}{g L^\circ} \quad ; \quad Re = \frac{1}{\Gamma_v} = \frac{V^\circ L^\circ}{\nu^\circ} \quad (3.5a)$$

où l'exposant  $^\circ$  indique une grandeur de référence.

Le *coefficient de frottement*  $C_f/2$  intervient également : c'est le critère de similitude  $\Gamma_\tau$  relatif aux forces de viscosité, mais avec référence aux gradients de vitesse (FEMM, ch. 2, §2.4.3.3) :

$$\frac{1}{2} C_f = \Gamma_\tau = \frac{\tau_p}{\rho^\circ (V^\circ)^2} \quad (3.5b)$$

Rappelons que, à l'origine de la similitude, se trouve la nécessité de réaliser des expériences sur des *modèles réduits* [Boisson, Crausse 2014] (*N.B. rien n'interdit d'envisager aussi des « modèles agrandis » si l'objet à étudier est petit*). Pour que les résultats soient transposables, il faut que le modèle réel et sa maquette soient en similitude géométrique, et que les critères de similitude aient la même valeur chez l'un et chez l'autre.

♣ Dans le cas général, comme pour les écoulements internes, il paraît naturel de prendre comme longueur de référence le diamètre hydraulique défini par (3.2), comme vitesse de référence la vitesse débitante, et comme contrainte de référence la contrainte moyenne  $\tau_{pm}$  le long du périmètre mouillé :

$$L^\circ = D_h \quad ; \quad V^\circ = V_d \quad ; \quad \tau_p = \tau_{pm} \quad (3.6a)$$

d'où :

$$Fr = \frac{V_d^2}{g D_h} \quad ; \quad Re = \frac{V_d D_h}{\nu} \quad (3.6b)$$

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_{pm}}{\rho V_d^2} \quad (3.6c)$$

◆ Cependant, la surface libre d'un liquide peut être le siège d'un phénomène ondulatoire : *les ondes de surface* (dues au vent, comme la houle, ou à un obstacle dans l'écoulement). La propagation et l'amplitude de ces ondes sont en relation directe avec la profondeur. Alors, dans le nombre de Froude, une longueur de référence égale à la profondeur moyenne ( $L^\circ = h_m$ ) paraît plus appropriée (cf. § 3.4.6.2). Quant à la vitesse de référence, s'il y a écoulement  $V_d$  peut être conservée, mais s'il s'agit d'un plan d'eau globalement immobile, on se rabattra sur la célérité  $a^\circ$  des ondes de surface. On rencontre donc aussi des « nombres de Froude » de la forme :

$$Fr = \frac{V_d^2}{g h_m} \quad \text{ou} \quad Fr = \frac{(a^\circ)^2}{g h_m} \quad (3.6d)$$

Mais attention : la cohérence de la similitude impose que les grandeurs de référence soient identiques dans les différents termes de l'équation de bilan (FEMM, ch. 2). Il faut donc introduire ces nouvelles grandeurs de référence dans le nombre de Reynolds, ce qui modifie sa valeur et surtout sa signification, car ces grandeurs ne sont pas représentatives des forces de viscosité. Sinon, les nombres de Froude définis par (3.6d) sont simplement des nombres sans dimension, ce qui n'exclut pas qu'ils aient une signification physique digne d'intérêt.

♥ Une autre question doit être considérée : à quelles conditions peut-on réaliser une similitude complète de deux écoulements à surface libre ?, c'est-à-dire faire en sorte que, pour le modèle réel (indice 1) et pour le modèle réduit (indice 2) on ait simultanément :

$$\overline{Fr}_1 = \overline{Fr}_2 \quad ; \quad \overline{Re}_1 = \overline{Re}_2 \quad (3.7a)$$

Cela s'écrit, à partir des définitions 3.5, en laissant de côté le ° pour alléger l'écriture :

$$\frac{V_1^2}{g_1 L_1} = \frac{V_2^2}{g_2 L_2} \quad \text{et} \quad \frac{V_1 L_1}{\nu_1} = \frac{V_2 L_2}{\nu_2}$$

soit :

$$\frac{V_1^2}{V_2^2} = \frac{g_1 L_1}{g_2 L_2} = \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} \frac{L_2^2}{L_1^2}$$

et, en ne considérant que les paramètres géométriques et physiques :

$$\frac{L_1}{L_2} = \left( \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} \frac{g_2}{g_1} \right)^{1/3} \quad (3.7b)$$

On voit que si les deux modèles sont réalisés sur terre ( $g_1 = g_2 = g$ ) avec le même liquide à la même température ( $\nu_1 = \nu_2$ ), la similitude complète n'est possible qu'à l'échelle « 1 » ce qui n'est plus de la similitude. A la rigueur, on pourrait envisager de chauffer le fluide de la maquette, ce qui diminuerait la viscosité, mais l'effet ne serait pas très marqué. Par contre, un modèle réduit est envisageable si on considère un écoulement en faible gravité, mais les applications sont assez limitées ...

♠ Pour la raison précédente, on est finalement condamné à se contenter d'une *similitude partielle*, en vérifiant uniquement l'égalité des nombres de Froude, ou uniquement l'égalité des nombres de Reynolds (encore faut-il pour cela s'assurer dans l'équation de bilan que le terme négligé est bien d'un ordre de grandeur inférieur à l'autre). Alors dans ce cas, il est parfaitement licite de prendre des grandeurs de référence différentes dans  $Fr$  et dans  $Re$ .

♪ On doit cependant mettre un bémol à ce qui précède, si l'on prend en compte le développement de la simulation numérique. Celle-ci permet de plus en plus s'affranchir des difficultés expérimentales, même si l'expérimentation ne doit pas être négligée, car elle restera toujours le recours ultime. Mais, excepté si l'on cherche à établir des lois générales sous forme adimensionnée, la simulation numérique présente le grand avantage de n'être soumise à aucune contrainte liée au respect de la similitude. Il suffit pour cela de travailler avec les grandeurs dimensionnées réelles.

### 3.3. – Écoulements uniformes : généralités

#### 3.3.1. – RAPPELS ET COMPLÉMENTS

Les écoulements à surface libre appelés « uniformes » sont en fait des écoulements établis, dont les propriétés ont été détaillées dans FEMM (ch. 6, § 6.1.3). Ils sont caractérisés par la propriété :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.8a)$$

où  $U$  est la composante de la vitesse dans la direction  $x$  de l'écoulement.

La présence de la surface libre ne modifie pas les conséquences de cette définition. Si  $V$  est la composante du vecteur vitesse  $\vec{V}$  dans la direction  $y$  perpendiculaire au fond du canal (fig. 3.4), on a toujours :

$$V = 0 \quad (3.8b)$$

$$S = cte \quad (3.8c)$$

Ceci implique une profondeur de liquide constante :

$$h = cte \quad (3.8d)$$

Quant à la pression, elle est encore caractérisée par :

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = cte \quad (3.8e)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0 \quad (3.8f)$$

c'est-à-dire que  $p^* = cte$  dans une section droite de l'écoulement.

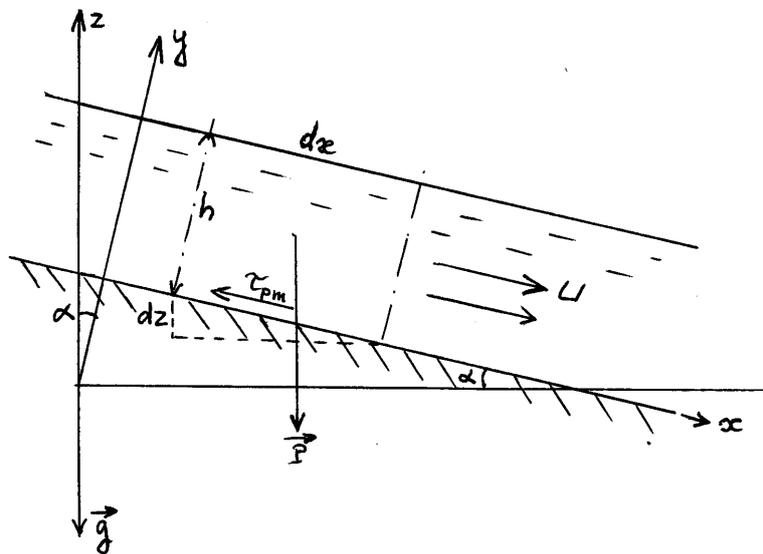


FIG. 3.4 – Écoulement uniforme.

$h = cte$  ;  $\vec{P}$  = poids du domaine liquide de longueur  $dx$

Il est utile d'apporter ici un complément concernant le champ de pression. On rappelle d'abord que la pression motrice  $p^*$  est définie par (FEMM, formule 1.37a) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p^* = \overrightarrow{\text{grad}} p - \rho \vec{g} \quad (3.10)$$

Au vu de la figure 3.4 il résulte alors de (3.8) que :

$$\clubsuit \quad \frac{\partial p^*}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \cos \alpha = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha \quad (3.11a)$$

et, d'après (3.4b), si la pente est faible :

$$\frac{\partial p}{\partial y} \cong -\rho g (1 - i^2 / 2) \quad (3.11b)$$

$$\blacklozenge \quad \frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \sin \alpha = cte$$

A la surface libre,  $p = p_a$ , donc  $(\partial p / \partial x)_{y=h} = 0$ .

Puisque  $\partial p^* / \partial x$  est indépendant de l'ordonnée  $y$ , on a en conséquence :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \text{ partout} \quad (3.12a)$$

Alors :

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = -\rho g \sin \alpha = -\rho g i \quad (3.12b)$$

et si la pente est faible :

$$\boxed{\frac{\partial p^*}{\partial x} \cong -\rho g \alpha} \quad (3.12c)$$

### 3.3.2. – APPROCHE ÉLÉMENTAIRE – PERTE DE CHARGE

Une première approche, très simple, va nous permettre d'établir une relation entre le frottement pariétal et la pente du canal.

Reportons-nous pour cela à la figure 3.4, en considérant un domaine de longueur  $dx$  limité par deux sections droites. Sa surface mouillée est  $\Sigma = P dx$  et son volume  $S dx$ .

Les forces appliquées à ce domaine sont les suivantes :

- forces de pression exercées sur les deux sections droites : elles s'équilibrent puisque  $\partial p / \partial x = 0$  (propriété 3.12a)
- forces de pression exercées sur la surface libre et sur le fond du canal : elles sont perpendiculaires à la direction  $x$
- forces de frottement exercées par la paroi : leur résultante est  $-\tau_{pm} \Sigma \vec{x}$  (en sens contraire de l'écoulement)
- poids du liquide (volume  $S dx$ ) :  $\rho S dx \vec{g}$ , vertical (noté  $\vec{P}$  sur la figure 3.4)

En l'absence d'accélération (écoulement établi), la somme des forces est égale à zéro. La projection sur  $\vec{x}$  (fig. 3.4) se réduit donc à :

$$-\tau_{pm} P dx + \rho g S dx \sin \alpha = 0 \quad (3.13a)$$

On en tire :

$$\tau_{pm} = \rho g \frac{S}{P} i \quad (3.13b)$$

et, en introduisant le diamètre hydraulique (3.1d) :

$$\tau_{pm} = \frac{1}{4} \rho g D_h i \quad (3.13c)$$

Ceci permet d'exprimer aussi le coefficient de frottement (3.6c) :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_{pm}}{\rho V_d^2} = \frac{1}{4} \frac{g D_h}{V_d^2} i \quad (3.14a)$$

où l'on retrouve le nombre de Froude (3.6b) :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{i}{4 Fr} \quad (3.14b)$$

D'autre part, le concept de *perte de charge*, analysé dans FEMM à propos des écoulements internes, conserve ici sa validité. En particulier, pour un écoulement établi, la première partie de la relation (6.116c) reste valable (FEMM, ch. 6, § 6.6.1.2). Si  $X$  est la charge exprimée en  $Pa$ , la « *perte de charge unitaire* » (en  $Pa/m$ ) a pour valeur :

$$-\frac{dX}{dx} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} = cte \quad (3.15)$$

(le signe – permettant d'avoir une perte de charge positive).

On préférera généralement utiliser une charge  $H$  exprimée en hauteur de colonne liquide, et en particulier en mètres de colonne d'eau ( $mCE$ ), définie par (FEMM 6.114a) :

$$H = \frac{X}{\rho g} \quad (3.16a)$$

Compte tenu de (3.12b), la perte de charge unitaire s'écrit donc :

$$-\frac{dH}{dx} = i \quad (3.16b)$$

Entre deux sections 1 (amont) et 2 (aval) distantes de  $L$ , la perte de charge est alors :

$$\Delta H = H_1 - H_2 = i L \quad (3.16c)$$

⇐ Dans un écoulement interne, nous avons vu (FEMM, ch. 6 et 7) que la perte de charge est déterminée par l'ensemble du circuit (dimensions, singularités, présence de pompes...). *Par contre, on observe que dans un écoulement à surface libre, la perte de charge est imposée exclusivement par la pente du canal.*

### 3.4. – Vitesse et débit dans les écoulements uniformes

#### 3.4.1 – CONDITIONS AUX LIMITES ET RÉGIMES D'ÉCOULEMENT

Les conditions aux limites qui seront utilisées pour le calcul de la vitesse et du débit sont communes aux écoulements laminaires et turbulents. Elles concernent :

- la forme de la section : on admettra que celle-ci est rectangulaire, avec un faible rapport  $h/l$ , ce qui permet de considérer l'écoulement comme *unidimensionnel*, soit :

$$U = U(y) \quad (3.17a)$$

- le fond du canal, avec la condition d'adhérence classique :

$$y = 0 \quad : \quad U = 0 \quad (3.17b)$$

- la surface libre, où deux options sont possibles :

♣ Soit on admet une condition de glissement entre le liquide et l'atmosphère ambiante, ce qui revient à négliger la contrainte de cisaillement à la surface :

$$y = h \quad : \quad \frac{dU}{dy} = 0 \quad (3.17c)$$

Le problème est alors ramené à celui d'une demi section dans un écoulement interne, puisque dans ce cas, la condition de symétrie sur le plan médian est précisément (3.17c).

♦ Soit on tient compte du cisaillement à la surface libre, ce qui impose alors de considérer que la valeur de la vitesse  $U_h = U(h)$  résulte de l'interaction de deux couches limites, dans le liquide et dans l'atmosphère, avec égalité de la vitesse et de la contrainte  $\tau_h$  de part et d'autre (l'indice  $a$  représente l'atmosphère, ou plus généralement l'ambiance) :

$$y = h \quad : \quad U = U_h \quad ; \quad \tau_h = \mu \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=h} = \mu_a \frac{dU_a}{dy} \quad (3.18)$$

Avec une atmosphère immobile (au loin,  $U_a = U_\infty = 0$ ), il y aura un léger freinage au niveau de la surface libre (fig. 3.5b). Si le vent est dans le sens de l'écoulement, on pourra se rapprocher de la condition (3.17c), voire obtenir un gradient  $dU/dy$  positif en  $y = h$  (fig. 3.5d). Dans le cas contraire (vent à contre-courant) on peut aussi rencontrer un écoulement de retour au voisinage de la surface ( $U_h < 0$ , fig. 3.5a). Des ordres de grandeur de  $\tau_h$  sont donnés en Annexe 3.2.

On remarquera l'analogie de ces différentes conditions avec l'écoulement de Couette, où les mêmes profils de vitesse se rencontrent (FEMM, § 6.2.1).

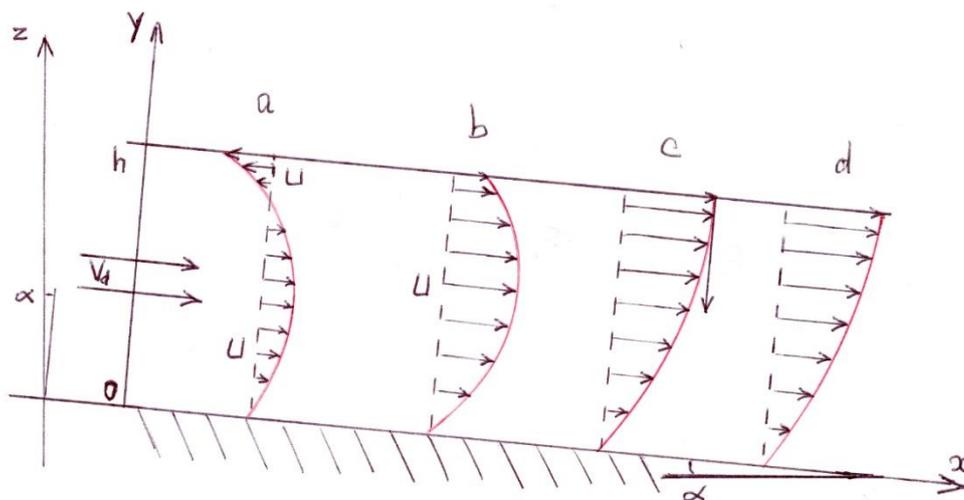


FIG. 3.5 – Profils de vitesse dans un écoulement à surface libre.  
a) et b) : vent à contre-courant ; c) : absence de vent ou condition de glissement ;  
d) : vent dans le sens du courant. Rappel : pente  $i = \sin \alpha$ .

Dans la suite, nous nous limiterons à appliquer la condition de glissement (3.17c).

Les régimes d'écoulement sont toujours caractérisés par le nombre de Reynolds (3.6b), dans lequel, compte tenu de l'hypothèse unidimensionnelle qui implique  $h \ll l$ , le rayon hydraulique est  $D_h = 4h$  (cf. 3.3c), soit :

$$Re = \frac{V_d \times 4h}{\nu} \quad (3.19)$$

Pour le régime laminaire, on pourra reprendre la condition  $Re < 2500$  recommandée pour les sections rectangulaires plates (FEMM, § 6.1.2). La paroi sera considérée hydrauliquement lisse pour  $2500 < Re < 10^4$ , et hydrauliquement rugueuse au-delà.

### 3.4.2 – ÉCOULEMENTS LAMINAIRES

L'équation de l'écoulement est la même que FEMM (6.7a) :

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

Dans l'écoulement à surface libre, le gradient de pression est donné par (3.12c) :

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = - \rho g i$$

Tous les résultats obtenus pour les écoulements internes entre deux plans parallèles (FEMM, § 6.1.3 et 6.6.1) sont immédiatement transposables ici, en tenant compte de la condition précédente, et en remplaçant la demi-hauteur  $b$  du conduit par la profondeur  $h$  de l'écoulement. On a ainsi :

- le profil de vitesse parabolique (FEMM 6.13a), correspondant au cas *c*) de la figure 3.5 ci-dessus, entre  $y = 0$  et  $y = h$  :

$$U = - \frac{\rho g i}{2 \mu} (y^2 - 2 h y) \quad (3.20a)$$

- la vitesse maximale (FEMM 6.13b), ici à la surface libre :

$$U_m = U_h = \frac{\rho g i}{2 \mu} h^2 \quad (3.20b)$$

- le débit dans la couche  $0 \leq y \leq h$ , soit la moitié du débit entre deux plans parallèles exprimé par (FEMM 6.14a) :

$$q_v = \frac{\rho g i}{3 \mu} l h^3 \quad (3.21a)$$

- la vitesse débitante dans la section, à savoir  $V_d = q_v / S = q_v / l h$  :

$$V_d = \frac{\rho g i}{3 \mu} h^2 \quad (3.21b)$$

- la contrainte à la paroi (FEMM 6.14d et 6.125) qui devient :

$$\tau_p = \rho g h i = 3 \frac{\mu V_d}{h} \quad (3.22a)$$

en conformité avec (3.13c) puisqu'ici,  $D_h = 4h$  (cf. 3.3c).

- le coefficient de frottement (identique à FEMM 6.134b) :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho V_d^2} = \frac{12 \mu}{\rho V_d D_h} = \frac{12}{Re} \quad (3.22b)$$

Il est intéressant de noter que dans un écoulement interne, ce sont la nature du circuit et l'écart de pression entrée – sortie qui sont généralement donnés, et qui conditionnent la valeur du débit. Dans un écoulement à surface libre, c'est plus souvent le contraire : le débit est imposé, et c'est la profondeur de l'écoulement qui en résulte. Alors, la formule (3.21a) est renversée pour donner :

$$h = \left( \frac{3 \mu q_v}{\rho g i l} \right)^{1/3} \quad (3.23)$$

et l'on voit que la profondeur diminue quand la pente augmente.

### 3.4.3. – ÉCOULEMENTS TURBULENTS

Lorsque l'écoulement est turbulent, on retrouve la distinction (analysée dans FEMM, ch. 6) entre paroi hydrauliquement lisse et hydrauliquement rugueuse. Comme dans le cas laminaire ci-dessus, tous les résultats obtenus pour les écoulements entre deux plans parallèles se transposent immédiatement, avec  $b$  remplacé par  $h$ ,  $D_h = 4h$  et  $\partial \bar{p}^* / \partial x = -\rho g i$  (les propriétés établies au paragraphe 3.3.1, dont 3.12b, sont valables quel que soit le régime d'écoulement ; s'il est turbulent,  $p$  est simplement remplacée par sa valeur moyenne  $\bar{p}$ ).

En particulier, la vitesse de frottement  $U_\tau = \sqrt{\tau_p / \rho}$  (FEMM 5.15b) a pour expression, sachant que  $\tau_p = \rho g h i$  (3.13c) :

$$U_\tau = \sqrt{g h i} \quad (3.24)$$

Nous nous limitons dans ce qui suit au débit et au coefficient de frottement.



*Paroi lisse*

A partir de (FEMM 6.41a) on a pour le débit :

$$q_v = l h \sqrt{g h i} \left\{ 2,5 \operatorname{Ln} \frac{h \sqrt{g h i}}{\nu} + 3,21 \right\} \quad (3.25a)$$

La détermination de  $h$  à partir de  $q_v$  demande donc ici un calcul par approximations successives.

Quant au coefficient de frottement, son expression (FEMM 6.155a) est inchangée :

$$\frac{1}{\sqrt{C_f / 2}} = 2,5 \operatorname{Ln} Re \sqrt{C_f / 2} - 0,25 \quad (3.25b)$$

◆ *Paroi rugueuse*

De même,  $\varepsilon$  étant la hauteur moyenne des aspérités de la paroi (ou pour être plus exact une *rugosité uniforme équivalente*), (FEMM 6.78) devient :

$$q_v = l h \sqrt{g h i} \left\{ 2,5 \operatorname{Ln} \frac{h}{\varepsilon} + 6,04 \right\} \quad (3.26a)$$

et pour  $C_f$  (FEMM 6.156a) :

$$\frac{l}{\sqrt{C_f / 2}} = 2,5 \operatorname{Ln} \frac{h}{\varepsilon} + 6,04 \quad (3.26b)$$

♥ *Cas général*

En suivant une démarche analogue à celle qui conduit à la formule de Colebrook pour les sections circulaires (FEMM 7.10), on peut regrouper les lois (3.25b) et (3.26b) en une seule expression approchée, valable dans tout le domaine turbulent :

$$\boxed{\frac{l}{\sqrt{C_f / 2}} = - 2,5 \operatorname{Ln} \left( 0,089 \frac{\varepsilon}{h} + \frac{1,105}{Re \sqrt{C_f / 2}} \right)} \quad (3.27)$$

Quand  $\varepsilon = 0$ , on retrouve le cas « paroi lisse », et quand  $Re \rightarrow \infty$  on retrouve le cas « paroi rugueuse ». Comme la formule de Colebrook, cette expression demande une résolution par approximations successives, puisque  $C_f$  est présent dans les deux membres.

### 3.4.4 – DÉBITANCE D'UN CANAL (CAS GÉNÉRAL, SECTION DE FORME QUELCONQUE)

Traditionnellement, on présente la relation (3.14a) sous une forme renversée, appelée « *équation de Chézy* », qui exprime la vitesse en fonction de la pente et du diamètre hydraulique, soit :

$$V_d = C \sqrt{D_h i} \quad (3.28a)$$

où  $C$  est le « *coefficient de Chézy* » :

$$C = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{g}{C_f / 2}} \quad (3.28b)$$

A partir de là, on peut exprimer le débit du fluide sous la forme :

$$q_v = S V_d = K \sqrt{i} \quad (3.29a)$$

en introduisant un nouveau paramètre  $K$  qui est la « *débitance du canal* » :

$$K = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{g D_h}{C_f / 2}} \quad (\text{en } m^3 / s) \quad (3.29b)$$

!!! Il faut se méfier de ces formulations, car elles donnent l'illusion que la vitesse et le débit sont toujours proportionnels à  $\sqrt{i}$ . Or ceci n'est vérifié qu'en régime turbulent rugueux (cf.3.26a), le plus répandu il est vrai dans les cours d'eau et les canaux. Alors, dans ce cas :

$$K = l h \sqrt{g h} \left\{ 2,5 \operatorname{Ln} \frac{h}{\varepsilon} + 6,04 \right\} \quad (3.29c)$$

Mais, en régime laminaire ou turbulent lisse, la débitance dépend aussi de  $i$  (cf. 3.21 et 3.25a), et cette notion perd alors de son intérêt.

🎵 D'un point de vue pratique, *la vitesse dans les canaux doit être limitée* pour éviter l'érosion des parois. A titre d'exemple, quelques valeurs maximales recommandées sont indiquées ci-dessous (pour plus de détails, on consultera par exemple [FAO]) :

| <i>Nature de la paroi</i> | <i>V<sub>d</sub> maximale admissible (m/s)</i> |
|---------------------------|--|
| Terres glaises            | 0,2  |
| Sable fin                 | 0,3  |
| Film plastique            | 0,6 – 0,9                                      |
| Limon                     | 0,8 – 1  |
| Gravier                   | 1,1  |
| Béton                     | 2 – 3  |

### 3.4.5. – LOIS EMPIRIQUES POUR LES PAROIS RUGUEUSES (SECTIONS QUELCONQUES)

Pour les sections rectangulaires plates ( $h/l \ll 1$ ), où  $D_h$  et  $Re$  sont donnés par (3.3c) et (3.19), la loi (3.26b) est facile à mettre en œuvre. Mais sa transposition à d'autres formes de sections est assez complexe. Aussi, avec les parois hydrauliquement rugueuses, *on la remplace par une loi empirique plus générale*, qui s'ajuste assez correctement au cas particulier de la formule (3.26b) :

$$\frac{1}{2} C_f = 0,026 \left( \frac{\varepsilon}{D_h} \right)^{1/3} \quad (3.30)$$

Dans ce cas, le coefficient de Chézy (3.28b) devient :

$$C = \frac{1}{2} \left[ \frac{g}{0,026 \left( \frac{D_h}{\varepsilon} \right)^{1/3}} \right]^{1/2}$$

soit :

$$C = 3,1 \left( \frac{D_h}{\varepsilon} \right)^{1/6} g^{1/2} \quad (3.31)$$

La vitesse exprimée par l'équation de Chézy (3.28a) est alors :

$$V_d = 3,1 \frac{D_h^{2/3} g^{1/2}}{\varepsilon^{1/6}} \sqrt{i} \quad (3.32)$$

Connaissant la rugosité moyenne pour un type de paroi donné, on obtient donc immédiatement la valeur de la vitesse, et par conséquent du débit  $q_v = S V_d$ . Malheureusement, il faut tenir compte du poids de la tradition, qui ne rime pas toujours avec simplicité. En l'occurrence (nous l'avons déjà signalé dans la remarque du § 3.2.1♦), la littérature fait généralement intervenir à la place de  $D_h$  un *rayon hydraulique*  $R_h = S/P = D_h/4$ , et à la

place de la rugosité uniforme équivalente  $\varepsilon$  un *coefficient de rugosité*  $n$  (ou *coefficient de Manning*) défini par :

$$V_d = \frac{I}{n} R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (3.33)$$

ce qui donne, en égalant (3.32) et (3.33), avec  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  :

$$n = 0,041 \varepsilon^{1/6} \quad (3.34)$$

Enfin, pour compliquer un peu plus les choses, le paramètre  $K_s = I/n$  est appelé *coefficient de Strickler*.

A titre d'exemple, voici quelques valeurs moyennes de  $\varepsilon$  et de  $n$ . On notera que si la rugosité  $\varepsilon$  est exprimée en  $m$  (ou plus souvent en  $mm$ ), le coefficient  $n$  de Manning n'a pas la dimension d'une longueur.

| Nature de la paroi | $\varepsilon$ ( mm ) | $n$    |
|--------------------|----------------------|--------|
| tôle               | 0,015                | 0,0065 |
| béton lisse        | 1                    | 0,013  |
| béton grossier     | 5                    | 0,017  |
| sol naturel        | 13                   | 0,020  |

### 3.4.6 – RÉGIME FLUVIAL ET RÉGIME TORRENTIEL

#### 3.4.6.1. – Charge spécifique d'un écoulement à surface libre

Certaines propriétés des écoulements à surface libre sont en relation avec la charge de l'écoulement. Cette grandeur a été brièvement évoquée au §3.3.2, mais rappelons-en d'abord la définition générale, donnée par (FEMM, 6.13a) pour un écoulement interne, et qui reste valable ici :

$$X(x) = p^* + \frac{\rho}{2 q_v} \int_S U^3 dS \quad (\text{en Pa}) \quad (3.35a)$$

Exprimée en mètres de colonne d'eau (*mCE*) elle devient :

$$H(x) = \frac{X}{\rho g} = \frac{p^*}{\rho g} + \frac{I}{2 g q_v} \int_S U^3 dS \quad (3.35b)$$

Il a été montré dans FEMM (voir la discussion du paragraphe 7.2.4.3, ch. 7) que, *en régime turbulent*, on peut admettre l'approximation suivante :

$$H(x) = \frac{p^*}{\rho g} + \frac{V_d^2}{2 g} \quad (3.36a)$$

Désignons par  $z_p$  l'ordonnée du fond du radier, et par  $z_a$  l'ordonnée de la surface libre (fig. 3.6) (avec  $z_a = z_p + h \cos \alpha \cong z_p + h$ ). Sachant que  $p^* = cte$  dans une section droite, on peut exprimer  $H$  à la surface libre, ce qui donne :

$$H(x) = \frac{p_a}{\rho g} + z_a + \frac{V_d^2}{2 g} = \frac{p_a}{\rho g} + z_p + h + \frac{V_d^2}{2 g} \quad (3.36b)$$

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à la partie de  $H$  qui dépend de la profondeur  $h$ , en introduisant une nouvelle grandeur, la « charge spécifique »  $H_s$  de l'écoulement, définie par :

$$H_s(x) = h + \frac{V_d^2}{2g} \quad (\text{en } m) \quad (3.37a)$$

Du fait que le débit  $q_v = S V_d$  est en général un paramètre prioritaire par rapport à la vitesse, il est plus intéressant de le faire apparaître explicitement dans l'expression de la charge spécifique, qui devient :

$$H_s(x) = h + \frac{q_v^2}{2g S^2} \quad (3.37b)$$

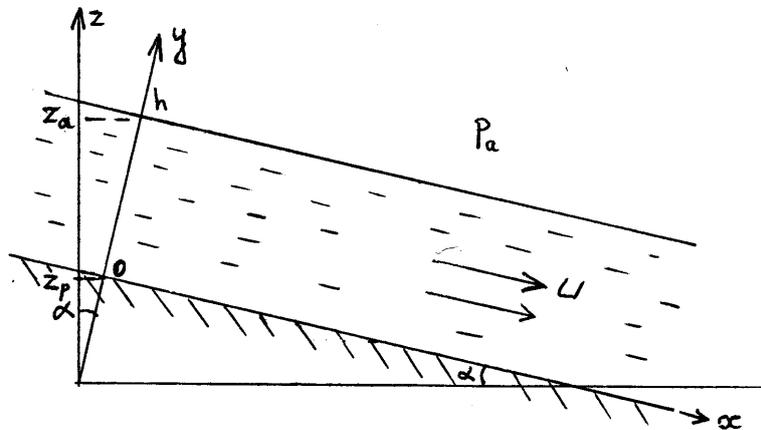


FIG. 3.6. – Données en relation avec la charge spécifique

### 3.4.6.2. – Écoulement à débit imposé

#### ♣ Vitesse critique

Examinons d'abord le cas d'un écoulement dont le débit est fixé. Comme la section  $S$  augmente avec la profondeur  $h$ , on voit que la charge spécifique est la somme d'un terme qui augmente avec  $h$  et d'un terme qui diminue. Sa dérivée est :

$$\frac{dH_s}{dh} = 1 - \frac{q_v^2}{g S^3} \frac{dS}{dh} \quad (3.38)$$

Pour une petite variation de  $h$  (fig. 3.7), la variation de  $S$  est :

$$dS = l dh \quad (3.39a)$$

d'où :

$$\frac{dH_s}{dh} = 1 - \frac{q_v^2 l}{g S^3} \quad (3.39b)$$

Ceci ouvre la possibilité d'un extrémum de  $H_s$  en fonction de  $h$ , caractérisé par :

$$\frac{dH_s}{dh} = 0 \quad \text{ou :} \quad \frac{q_v^2 l}{g S^3} = 1 \quad (3.39c)$$

Avec les sections courantes représentées sur la fig. 3.1, on peut vérifier la propriété  $d^2 H_s / dh^2 > 0$ . L'extrémum de  $H_s$  est donc un minimum, appelé « charge critique »  $H_{sc}$ .

La condition de minimum (3.39c) de la charge spécifique correspond alors à une valeur critique du rapport  $l/S^3$  tel que :

$$\frac{q_v^2}{g} \left( \frac{l}{S^3} \right)_c = 1 \quad (3.40a)$$

Puisque  $S$  et  $l$  dépendent toutes les deux de la profondeur  $h$ , la condition (3.40a) caractérise donc une « profondeur critique »  $h_c$  de l'écoulement, qui dépend du profil de chaque section. A cette profondeur critique correspondent bien entendu une « section critique »  $S_c$  et une « vitesse critique »  $V_{dc}$  :

$$V_{dc} = q_v / S_c \quad (3.40b)$$

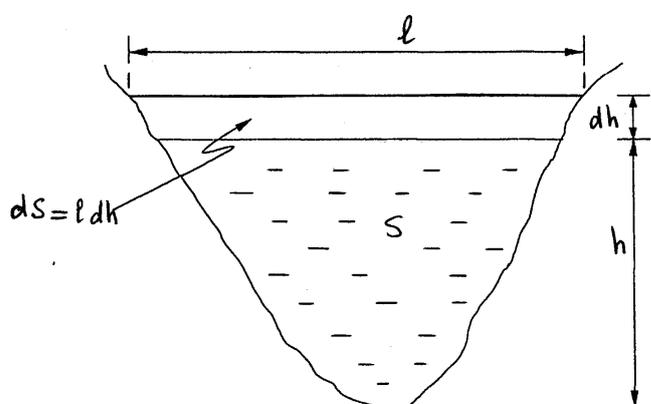


FIG. 3.7 – Variation de la section avec la profondeur

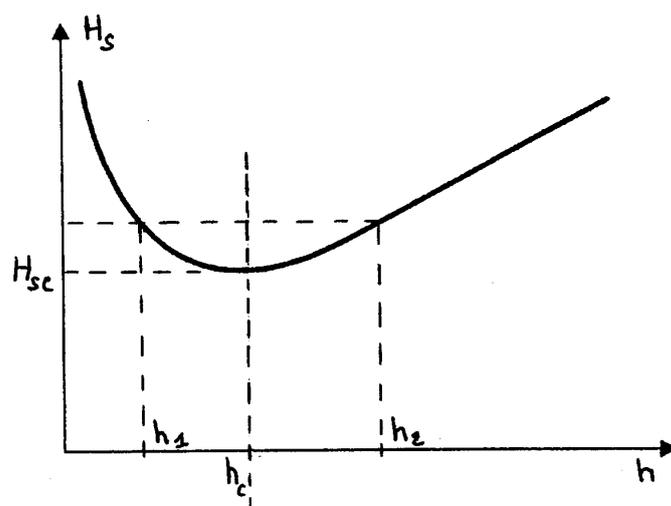


FIG. 3.8 – Profondeur critique d'un écoulement.  
A gauche de  $h_c$  : régime torrentiel. A droite de  $h_c$  : régime fluvial.

Pour toute valeur de la charge spécifique supérieure à la charge critique  $H_{sc}$ , il existe donc deux profondeurs possibles  $h_1$  et  $h_2$  pour l'écoulement ( $h_1 < h_c < h_2$ ), correspondant à des sections  $S_1$  et  $S_2$ , ainsi qu'à des vitesses  $V_{d1}$  et  $V_{d2}$  (fig. 3.8).

Le débit étant imposé, on a :

$$q_v = S_1 V_{d1} = S_2 V_{d2} \quad (3.41a)$$

Avec toutes les sections usuelles,  $S$  est une fonction croissante de  $h$ , d'où  $S_1 < S_2$ . Il en résulte que :

$$V_{d2} < V_{dc} < V_{d1} \quad (3.41b)$$

Compte tenu de ceci :

- dans le cas  $h < h_c$  :

$$V_d > V_{dc} \quad ; \quad \frac{dH_s}{dh} < 0 \quad ; \quad \frac{q_v^2 l}{g S^3} > 1 \quad (3.41c)$$

on dit que le régime d'écoulement est **torrentiel**.

- dans le cas  $h > h_c$  :

$$V_d < V_{dc} \quad ; \quad \frac{dH_s}{dh} > 0 \quad \frac{q_v^2 l}{g S^3} < 1 \quad (3.41d)$$

on dit que le régime d'écoulement est **fluvial**.

En d'autres termes, pour un même débit, l'écoulement peut être rapide et peu profond (torrentiel), ou lent et profond (fluvial). Une autre différence entre les deux sera mise en évidence plus loin.

**!!** *Attention* : on ne doit pas confondre les concepts de « régime fluvial / torrentiel » et de « régime laminaire / turbulent ». Ce sont deux notions déconnectées l'une de l'autre. Rappelons au passage que l'étude présentée ici concerne un écoulement turbulent. En régime laminaire, la relation (3.36a) est un peu différente (voir Annexes 3.3 et 3.4), mais qualitativement, les conclusions sont comparables.

Dans la littérature, la propriété (3.40a) est souvent exprimée par :

$$Fr = 1$$

Ceci est exact à la condition d'adopter pour le nombre de Froude  $Fr$  la définition (3.6d). Alors, dans ce cas, puisque (3.40a) peut encore s'écrire :

$$\frac{S_c^2 V_{dc}^2}{g} \frac{l_c}{S_c^3} = 1$$

et comme d'autre part la profondeur moyenne est définie par (3.1.a) :

$$h_m = S/l$$

on a bien, selon (3.6d) :

$$Fr = \frac{V_{dc}^2}{g h_{mc}} \quad (3.41e)$$

où :

$$h_{mc} = S_c / l_c \quad (3.41f)$$

est la profondeur critique moyenne.

Alors, l'écoulement fluvial correspond à  $Fr < 1$ , et l'écoulement torrentiel à  $Fr > 1$ .

#### ◆ *Interprétation*

Dans l'expression (3.36b) de la charge  $H$ , l'ordonnée  $z_p$  est une donnée, indépendante de la profondeur et de la vitesse ; en outre, sa valeur numérique est arbitraire puisqu'elle dépend de l'origine choisie pour  $z$ . Quant à la pression atmosphérique, elle s'applique uniformément à la surface libre. On peut donc considérer que la charge spécifique  $H_S$  représente l'énergie mécanique « utile » du fluide (par unité de volume). Alors, la configuration critique constitue un optimum, qui minimise l'énergie nécessaire pour assurer l'écoulement. En regardant la définition (3.37a), on peut dire aussi que le minimum de  $H_S$  constitue le « meilleur » compromis entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. En régime fluvial, c'est l'énergie potentielle qui est dominante, alors que l'énergie cinétique est dominante en régime torrentiel.

#### ♥ *Section rectangulaire*

Avec un canal rectangulaire (fig. 3.1c), on a  $S = lh$  (et aussi  $l = b$ , largeur du fond), d'où l'expression correspondante de (3.40) :

$$\frac{q_v^2}{g} \left( \frac{l}{l^3 h^3} \right)_c = 1 \quad (3.42a)$$

Alors,  $h_c$  ne dépend que du débit unitaire  $q_v/l$  :

$$h_c = \left( \frac{q_v}{l} \right)^{2/3} \frac{l}{g^{1/3}} \quad (3.42b)$$

d'où la section critique :

$$S_c = l h_c = \left( \frac{l q_v^2}{g} \right)^{1/3} \quad (3.43a)$$

et la vitesse critique :

$$V_{dc} = \frac{q_v}{S_c} = \left( g \frac{q_v}{l} \right)^{1/3} \quad (3.43b)$$

Pour toutes les autres sections, la profondeur critique n'a pas d'expression analytique. Son évaluation devra donc être réalisée numériquement dans chaque cas particulier.

#### ♠ *Pente critique*

Indépendamment du caractère laminaire ou turbulent de l'écoulement, on peut montrer que la configuration critique pour laquelle la charge spécifique passe par un minimum correspond aussi à une valeur critique de la pente du radier. Cette propriété est en relation avec les méandres des cours d'eau. Elle sera développée dans l'Annexe 3.3.

### 3.4.6.3. - Écoulement à charge spécifique imposée

Dans certaines circonstances, les conditions aux limites correspondent à une charge spécifique imposée. Cela se produit par exemple si l'écoulement est issu d'une vanne partiellement ouverte, en amont de laquelle la profondeur  $H_a$  est maintenue constante (fig. 3.9). Comme la vitesse est nulle dans le bassin créé par la présence de la vanne, on a d'après la définition (3.37b) :

$$H_s = H_a$$

Toujours à partir de (3.37b), on peut alors exprimer le débit aval en fonction de  $H_s$  :

$$q_v = S \sqrt{2g(H_s - h)} \quad (3.44)$$

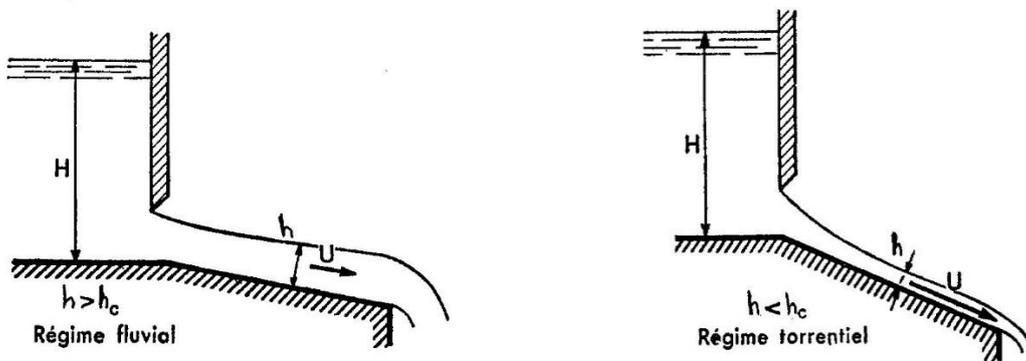


FIG. 3.9 – Régime fluvial et régime torrentiel avec charge spécifique imposée  
(d'après R. Comolet)

Si  $H_s$  est imposée, on observe d'abord que  $h$  ne peut en aucun cas être supérieur à  $H_s$ . En outre, quand  $h$  augmente, le terme sous la racine diminue, tandis que la section  $S$  augmente. On peut donc envisager un extrêmu du débit, tel que :

$$\frac{dq_v}{dh} = \frac{dS}{dh} \sqrt{2g(H_s - h)} - S \frac{1}{2} \frac{2g}{\sqrt{2g(H_s - h)}} = 0$$

soit, avec  $dS/dh = l$  (3.39) :

$$\frac{dq_v}{dh} = \frac{2gl(H_s - h) - Sg}{\sqrt{2g(H_s - h)}} = 0 \quad (3.45)$$

ce qui implique donc, en revenant à la définition de  $H_s$  :

$$2gl \left( h + \frac{q_v^2}{2gS^2} - h \right) = Sg$$

ou encore, en désignant par « configuration critique » (avec l'indice  $c$ ) la situation d'extrêmu :

$$\frac{q_{vc}^2}{g} \left( \frac{l}{S^3} \right)_c = 1$$

Cette condition est identique à (3.40). On retrouve donc le régime torrentiel ( $h < h_c$ ) et le régime fluvial ( $h > h_c$ ), mais cette fois-ci avec un maximum  $q_{vc}$  du débit pour la configuration critique. En outre, d'après (3.44),  $q_v = 0$  si  $h = 0$  (car alors  $S = 0$ ) et si  $h = H_s$  (fig. 3.10). Ainsi, pour toute valeur du débit inférieure à  $q_{vc}$ , deux profondeurs d'écoulement sont possibles, l'une  $h_1$  en régime torrentiel, l'autre  $h_2$  en régime fluvial, comme dans le cas d'un débit imposé (fig. 3.8).

Alors on peut écrire, en revenant à (3.45) et (3.41f) :

$$2g(H_s - h_c) = gh_{mc}$$

d'où, avec (3.44), un débit critique (maximum) :

$$q_{vc} = S_c \sqrt{gh_{mc}} \quad (3.46a)$$

et une vitesse critique associée :

$$V_{dc} = \sqrt{gh_{mc}} \quad (3.46b)$$

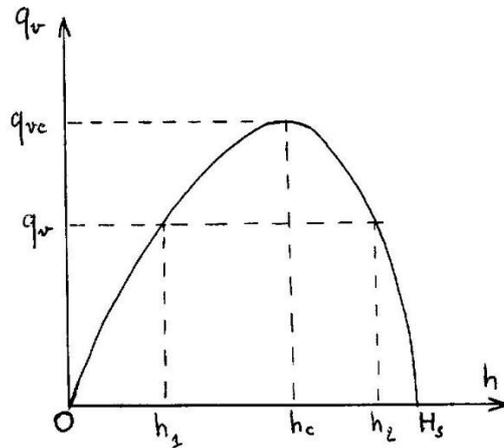


FIG. 3.10 – Profondeur critique avec charge spécifique imposée.  
Régime torrentiel pour  $h_1 < h_c$  ; régime fluvial pour  $h_2 > h_c$

#### 3.4.6.4. – SECTION ÉCONOMIQUE D'UN CANAL

Dans beaucoup de situations, le débit et la pente d'un canal sont des paramètres imposés. Il reste alors à choisir la forme et les dimensions de la section, en faisant en sorte de minimiser le coût de l'installation et de la maintenance, de manière à obtenir une « section économique ». En l'occurrence, le périmètre mouillé  $P$  semble le paramètre le plus approprié à minimiser.

On peut par exemple partir de l'expression (3.32) de la vitesse pour écrire le débit :

$$q_v = 9,71 S \frac{D_h^{2/3}}{\varepsilon^{1/6}} \sqrt{i} \quad (3.47)$$

Pour chaque type de section,  $S$  et  $D_h$  sont fonction de la profondeur et d'un paramètre géométrique. Ainsi, pour une section trapézoïdale,  $S = S(h, b)$  et  $D_h = D_h(h, b)$ . Si le débit  $q_v$ , la pente  $i$  et la rugosité  $\varepsilon$  sont fixés, l'équation (3.35) fournit une relation  $h = f(b)$ . On peut

alors calculer  $P = P(b)$ , et l'optimum  $b_{opt}$  de  $b$  sera donné par  $dP/db = 0$  (à titre de précaution, il faudra aussi vérifier que  $d^2P/db^2 > 0$ , c'est-à-dire que  $b_{opt}$  correspond bien à un minimum de  $P$ ). Mais ces opérations ne peuvent être réalisées que numériquement.

### 3.5. – Ecoulements graduellement variés

Dans un écoulement graduellement varié, le radier et la surface libre ne sont plus parallèles, de sorte que la profondeur est variable :  $h = h(x)$ . Ceci peut avoir pour origine une variation de la pente du radier, une variation de la section du canal (élargissement ou rétrécissement), ou encore une variation du débit (crue ou décrue). Alors, (3.15) n'est plus valable, car la perte de charge  $dX/dx$  n'est plus une constante. Cette configuration correspond à la notion de « perte de charge singulière » dans les écoulements internes.

#### 3.5.1. – ÉVOLUTION DE LA PROFONDEUR EN RÉGIME FLUVIAL OU TORRENTIEL

##### ♣ Cas général

Il est possible de généraliser le raisonnement suivi au parag. 3.3, qui avait abouti à l'équation d'équilibre des forces (3.13a). Observons d'abord que, dans (3.13a), en vertu de (3.12b), le terme  $\rho g S dx \sin \alpha = (dp^*/dx) S dx$  représente la variation de la force de pression sur la section droite entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

Dans le cas plus général considéré ici, cette variation de pression est égale à  $S dX$ . En effet (cf. FEMM, ch. 1, § 1.3.4.4, et ch. 6, § 6.6.1.2), la charge  $X$  est à la fois l'énergie totale du fluide par unité de volume (en  $J/m^3$ ) et la pression exercée sur la section droite de l'écoulement (exprimée en  $Pa$ , mais on se rappellera que  $Pa = N/m^2 = J/m^3$ ).

De la sorte, en remarquant que  $dX < 0$ , puisque  $X$  diminue dans le sens du courant, (3.13a) est remplacée par :

$$-\tau_{pm} P dx - S dX = 0 \quad (3.48)$$

que l'on écrira en utilisant la charge  $H$  exprimée en mètres de colonne fluide ( $X = \rho g H$ , cf. relation 3.35b), ou plutôt son gradient  $dH/dx$  :

$$-\tau_{pm} P dx - S \rho g \frac{dH}{dx} dx = 0 \quad (3.49)$$

D'après (3.36b), en régime turbulent, on a en faisant apparaître le débit  $q_v = S V_d$  :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz_p}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \frac{q_v^2}{2gS^2} \right) \quad (3.50)$$

Notons tout d'abord que le terme  $(-dH/dx)$  est aussi appelé « perte de charge unitaire » et souvent désigné par la lettre  $j$  ( $j > 0$ ) pour alléger l'écriture :

$$j = -\frac{dH}{dx} \quad (3.51)$$

D'autre part, le paramètre le plus intéressant est ici la variation  $dh/dx$  de la profondeur en fonction des différentes caractéristiques de l'écoulement exprimées dans (3.50), à savoir :

$$\frac{dh}{dx} = -j - \frac{dz_p}{dx} - \frac{d}{dx} \left( \frac{q_v^2}{2gS^2} \right) \quad (3.52)$$

Il faut maintenant regarder quelles sont les raisons physiques qui provoquent une variation de  $h$ . On en distingue trois principales :

*i* - une variation de la pente du radier :  $i \rightarrow i + di$ . Alors (cf. définitions 3.4a et fig. 3.6) :

$$\frac{dz_p}{dx} = -\sin \alpha - d(\sin \alpha) = -i - di \quad (3.53a)$$

*ii* - une variation  $dq_v$  du débit, due à des apports ( $dq_v/dx > 0$ ) ou à des pertes ( $dq_v/dx < 0$ )

*iii* - une variation  $dS$  de la section de l'écoulement. Celle-ci est due, d'une part à la variation de la profondeur ( $l dh$ ), mais aussi à la variation géométrique  $dS_g$  de la section du canal (par exemple, entre les piles d'un pont, fig. 3.11 ; ainsi, avec une section rectangulaire :  $dS_g = h dl$ ).

De la sorte, le dernier terme de (3.52) se décompose en :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{q_v^2}{2gS^2} \right) = \frac{1}{gS^2} \frac{dq_v}{dx} - \frac{q_v^2}{gS^3} \frac{dS}{dx}$$

avec :

$$\frac{dS}{dx} = l \frac{dh}{dx} + \frac{dS_g}{dx} \quad (3.53b)$$

Compte tenu de tout ce qui précède, (3.52) devient :

$$\frac{dh}{dx} = -j + i + di - \frac{1}{gS^2} \frac{dq_v}{dx} + \frac{q_v^2}{gS^3} \left( l \frac{dh}{dx} + \frac{dS_g}{dx} \right) \quad (3.53c)$$

On obtient en regroupant :

$$\frac{dh}{dx} \left( 1 - \frac{q_v^2 l}{gS^3} \right) = i + di - j - \frac{1}{gS^2} \frac{dq_v}{dx} + \frac{q_v^2}{gS^3} \frac{dS_g}{dx} \quad (3.54)$$

🎵 On notera que les trois causes de variation de  $h$  correspondent à ce que l'on a appelé, dans les écoulements internes, des singularités (FEMM, ch.7). Mais il n'existe pas ici d'équivalent du coefficient de perte de charge singulière, précisément en raison de l'auto-adaptation de la section, liée à la possibilité de variation de la profondeur.

!!! D'autre part, on est en droit d'admettre en première approximation que ces singularités ont peu d'influence sur  $j$ , et donc que, à l'instar de ce qui se passe dans un écoulement uniforme :

$$\boxed{i = j} \quad (3.55)$$

Il reste alors de (3.54) :

$$\boxed{\frac{dh}{dx} \left( 1 - \frac{q_v^2 l}{gS^3} \right) = di - \frac{1}{gS^2} \frac{dq_v}{dx} + \frac{q_v^2}{gS^3} \frac{dS_g}{dx}} \quad (3.56)$$

Il est remarquable de constater que le signe du premier terme nous ramène au cas de régime fluvial (parenthèse positive, cf. § 3.4.6.2 et 3.4.6.3) ou de régime torrentiel (parenthèse négative). De plus, au voisinage du point critique (parenthèse nulle), on voit que  $dh/dx \rightarrow \infty$  (sauf si le second membre est lui-même nul), ce qui signifie que  $h$  varie très rapidement : on est alors en présence de ce que l'on appelle un « *ressaut hydraulique* ».

Toutefois, le signe du second membre dépend de trois paramètres indépendants, et on ne peut tirer aucune conclusion générale sur la loi de variation de  $h$ . Par contre, dans trois cas particuliers, le caractère torrentiel ou fluvial conduit à des propriétés bien tranchées.

◆ *Variation de la pente du radier* ( $q_v = cte$ ,  $S_g = cte$ )

La variation de profondeur est donnée dans ce cas par :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{di}{1 - \frac{q_v^2 l}{g S^3}} \quad (3.57a)$$

- en régime torrentiel,  $h \downarrow$  quand  $i \uparrow$

- en régime fluvial,  $h \uparrow$  quand  $i \uparrow$  (3.57b)

♥ *Variation du débit* ( $i = cte$ ,  $S_g = cte$ )

Les variations de débit d'un canal à surface libre peuvent être dues à des affluents ou des dérivations, mais aussi à des apports ou à des pertes continus : crue ou décrue, pluie, condensation ou évaporation (principalement dans les écoulements en film). La variation de profondeur est alors :

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{\frac{1}{g S^2} \frac{dq_v}{dx}}{1 - \frac{q_v^2 l}{g S^3}} \quad (3.58a)$$

- en régime torrentiel,  $h \uparrow$  quand  $q_v \uparrow$

- en régime fluvial,  $h \downarrow$  quand  $q_v \uparrow$  (3.58b)

♠ *Variation de la section du canal* ( $i = cte$ ,  $q_v = cte$ )

S'il y a rétrécissement ( $dS_g/dx < 0$ ) ou élargissement du lit du canal ( $dS_g/dx > 0$ ), la variation de profondeur est exprimée par :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\frac{q_v^2}{g S^3} \frac{dS_g}{dx}}{1 - \frac{q_v^2 l}{g S^3}} \quad (3.59a)$$

- en régime torrentiel,  $h \uparrow$  quand  $S_g \downarrow$

- en régime fluvial,  $h \downarrow$  quand  $S_g \downarrow$  (3.59b)

Ce dernier cas est illustré par la figure 3.11, qui représente l'écoulement entre les arches d'un pont : le niveau diminue en régime fluvial et augmente en régime torrentiel. En cas de débit trop élevé, le régime torrentiel présente donc un risque. Mais en cas de basses eaux, c'est le régime fluvial qui peut être handicapant si le niveau devient insuffisant (pour la navigation par exemple).

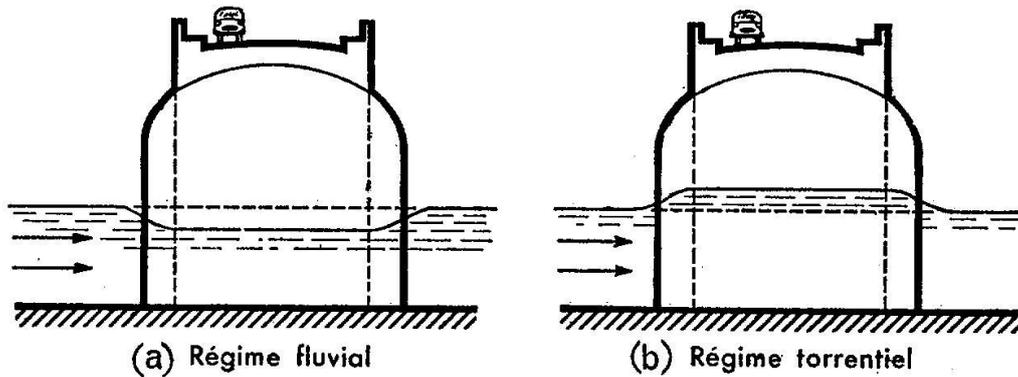


FIG. 3.11 – *Écoulement entre les piles d'un pont (rétrécissement de la section)*  
(d'après R. Comolet)

### 3.5.2. – UNE PROPRIÉTÉ DU NOMBRE DE REYNOLDS

On est en droit de se demander comment varie le nombre de Reynolds dans un écoulement graduellement varié. Revenons pour cela à sa définition :

$$Re = \frac{V_d D_h}{\nu} = \frac{q_v D_h}{\nu S}$$

Considérant que l'écoulement est isotherme ( $\nu = cte$ ) et à débit constant, la variation de  $Re$  selon  $x$  s'écrit :

$$\frac{d Re}{dx} = \frac{q_v}{\nu} \frac{d}{dx} \left( \frac{D_h}{S} \right)$$

On voit que la variation de  $Re$  dépend de l'évolution du rapport  $D_h / S$ , lui-même fonction de la forme de la section. Dans le cas général, il n'est donc pas possible de conclure.

Par contre, si la section est rectangulaire large, alors (cf. 3.3c) :

$$S = l h \quad ; \quad D_h = 4 h$$

et :

$$\frac{D_h}{S} = cte$$

soit :

$$\frac{d Re}{dx} = 0$$

!!! Dans un écoulement isotherme graduellement varié, de section rectangulaire large, où le débit est donné, le nombre de Reynolds est constant. Cette propriété est valable aussi bien en régime laminaire que turbulent, quelle que soit la loi de variation de  $h$  en fonction de  $x$  (cf. Annexe 3.1, question 1).

### 3.6. – Convection forcée dans les écoulements à surface libre

#### 3.6.1. – CONDITIONS AUX LIMITES THERMIQUES

Le thème du transfert de chaleur dans les écoulements à surface libre est peu présent dans la littérature. Pourtant, ces écoulements sont très souvent anisothermes, et sont donc le siège d'une convection thermique.

Les conditions aux limites thermiques qui peuvent être rencontrées couvrent les cinq catégories analysées dans PTC (§ 1.3). Plus précisément :

- A la paroi, les cas les plus fréquents sont :
  - Condition de 1<sup>ère</sup> espèce (température  $T_p$  imposée)
  - Condition de 2<sup>ème</sup> espèce (flux de chaleur  $\varphi_p$  imposé)
  - Condition de 4<sup>ème</sup> espèce (couplage convection – conduction, dans le fluide et la paroi)
- A la surface libre :
  - Condition de 2<sup>ème</sup> espèce (flux  $\varphi_a$  imposé)
  - Condition de 3<sup>ème</sup> espèce (coefficient d'échange avec l'ambiance  $h_a$  imposé)
  - Condition de 5<sup>ème</sup> espèce (couplage double entre le fluide et l'ambiance, impliquant deux coefficients d'échange côté fluide et côté ambiance)

#### 3.6.2. – ECOULEMENTS LAMINAIRES UNIFORMES

Sous leur aspect dynamique, les écoulements uniformes ont été présentés § 3.3 et 3.4. **On considérera ici uniquement la section rectangulaire large** (§ 3.4.1), avec la condition de glissement (3.17c) à la surface libre. Puisque, en convection forcée, la vitesse est indépendante de la température, le profil de vitesse est donné par (3.20a).

*Au point de vue thermique, on dira qu'un écoulement est uniforme si la température est indépendante de  $x$ . Il s'agit d'un cas asymptotique, rencontré lorsque les conditions aux limites sont uniformes sur une distance assez grande.*

Alors, l'équation d'énergie est donnée par exemple par PTC (3.9). Dans le cas présent, elle se réduit à :

$$\frac{d^2T}{dy^2} = 0 \quad , \quad \text{soit} \quad T = A y + B \quad (3.60a)$$

d'où une densité de flux :

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dy} = -\lambda A = cte = \varphi_p \quad (3.60b)$$

Le transfert de chaleur est donc purement conductif, avec un profil de température linéaire.

Par exemple, choisissons les conditions suivantes :

$T_p$  donnée à la paroi

$h_a$  donné à la surface libre

On a alors, d'après (3.60a), à la paroi ( $y = 0$ ) :

$$T_p = B \quad (3.61a)$$

A la surface libre ( $y = h$ ), d'après (3.60 a et b), en appelant  $T(h) = T_h$  et  $T_\infty$  la température au loin :

$$\varphi = -\lambda A = h_a (T_h - T_\infty) = -\lambda \frac{T_h - T_p}{h} \quad (3.61b)$$

On tire de la dernière égalité :

$$T_h = \frac{h h_a T_\infty + \lambda T_p}{h h_a + \lambda} \quad (3.61c)$$

d'où après calcul :

$$A = -\frac{h_a}{\lambda} (T_h - T_\infty) = -\frac{h_a}{h h_a + \lambda} (T_p - T_\infty) \quad (3.61d)$$

Dans ce cas particulier, les notations utilisées ne sont pas très heureuses. Rappelons que  $h$  est une longueur (profondeur de l'écoulement) et  $h_a$  un coefficient d'échange. Quoi qu'il en soit, il vient en appliquant (3.60a) et (3.61a) :

$$T - T_p = -\frac{h_a}{h h_a + \lambda} (T_p - T_\infty) y \quad (3.62)$$

**N.B.** Le cas d'une densité de flux  $\varphi_p$  imposée à la paroi est traité dans l'Annexe 3.1.

### 3.6.3. – ECOULEMENTS LAMINAIRES EN REGIME THERMIQUE ETABLI

Pour des écoulements internes *symétriques*, le *régime thermique établi* a été défini par les conditions suivantes (PTC, § 3.1.3) :

- 1) Régime dynamique établi (idem écoulement uniforme) (3.63a)

- 2)  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{T_p - T}{T_p - T_m} = 0$  ( $T_m$  = température de mélange, PTC § 3.1.2) (3.63b)

#### 3.6.3.1 – Adaptation aux écoulements à surface libre

Les conditions aux limites sont ici différentes à la paroi et à la surface libre. Pour que l'écoulement soit en régime thermique établi, la condition (3.63b) doit être complétée, car on doit avoir simultanément :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{T_p - T}{T_p - T_m} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{T_h - T}{T_h - T_m} \quad (3.64)$$

En décomposant la première égalité, il vient :

$$\frac{1}{T_p - T_m} \frac{\partial}{\partial x} (T_p - T) + (T_p - T) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{T_p - T_m} \right) = 0$$

et après multiplication par  $(T_p - T_m)^2$  :

$$(T_p - T_m) \frac{\partial}{\partial x} (T_p - T) = (T_p - T) \frac{\partial}{\partial x} (T_p - T_m)$$

Enfin, après développement et regroupement des termes, on obtient :

$$T_p \left( \frac{dT_m}{dx} - \frac{\partial T}{\partial x} \right) - T_m \left( \frac{dT_p}{dx} - \frac{\partial T}{\partial x} \right) = T \left( \frac{dT_m}{dx} - \frac{dT_p}{dx} \right)$$

Une condition suffisante pour que cette relation soit vérifiée est :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{dT_p}{dx} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.65a)$$

analogue à la propriété (3.38b) établie dans PTC.

Le même traitement appliqué à la seconde inégalité (3.64) donne :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{dT_h}{dx} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.65b)$$

On a donc finalement, en regroupant (3.65 a et b) :

$$\boxed{\frac{dT_m}{dx} = \frac{dT_p}{dx} = \frac{dT_h}{dx} = \frac{\partial T}{\partial x}} \quad (3.66)$$

### 3.6.3.2. – Écoulement avec flux imposé à la paroi

#### ♣ Évolution des températures selon $x$

Nous considérons ici le cas où une densité de flux de chaleur  $\varphi_p = cte$  est appliquée au fond du canal. A la surface libre, le coefficient d'échange  $h_a$  est constant.

On écrit le bilan thermique d'une tranche fluide comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  (fig. 3.12) (cf. aussi PTC, § 3.4.1) :

$$\rho C_p q_v \{T_m(x + dx) - T_m(x)\} = \{\varphi_p - h_a (T_h - T_\infty)\} l dx \quad (3.67a)$$

soit :

$$\rho C_p \frac{q_v}{l} \frac{dT_m}{dx} = \varphi_p - h_a (T_h - T_\infty) \quad (3.67b)$$

D'après (3.66), et sachant que  $T_\infty = cte$ , on a :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{dT_h}{dx} = \frac{d(T_h - T_\infty)}{dx} \quad (3.68a)$$

et en reportant dans (3.67b) :

$$\rho C_p \frac{q_v}{l} \frac{d(T_h - T_\infty)}{dx} + h_a (T_h - T_\infty) = \varphi_p \quad (3.68b)$$

Cette équation différentielle de la forme  $Ay' + By = C$  admet comme solution la solution générale de l'équation sans second membre plus une solution particulière de l'équation avec second membre.

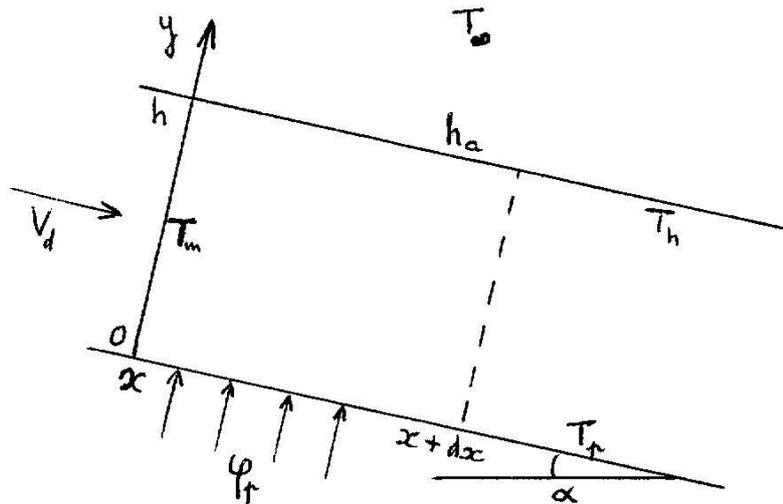


FIG. 3.12 – *Ecoulement avec flux pariétal imposé*

L'équation sans second membre s'écrit :

$$\frac{d(T_h - T_\infty)}{T_h - T_\infty} = - \frac{h_a l}{\rho C_p q_v} dx \quad (3.69a)$$

avec comme solution :

$$T_h - T_\infty = Cte \times \exp\left(- \frac{h_a l}{\rho C_p q_v} x\right) \quad (3.69b)$$

Dans l'équation avec second membre (3.68b), si  $x \rightarrow \infty$ , alors  $d(T_h - T_\infty)/dx \rightarrow 0$ . Une solution particulière est donc celle du régime uniforme (3.61b) :

$$T_h - T_\infty = \frac{\varphi_p}{h_a} \quad (3.69c)$$

La solution complète s'exprime donc ainsi :

$$T_h - T_\infty = Cte \times \exp\left(- \frac{h_a l}{\rho C_p q_v} x\right) + \frac{\varphi_p}{h_a} \quad (3.70a)$$

Il faut enfin se donner une température d'origine  $T_{h0}$  en  $x = 0$  ; alors :

$$T_h - T_\infty = T_{h0} - T_\infty = Cte + \frac{\varphi_p}{h_a}$$

d'où :

$$Cte = T_{h0} - T_\infty - \frac{\varphi_p}{h_a} \quad (3.70b)$$

La combinaison de (3.70a) et (3.70b) donne la solution complète :

$$T_h - T_\infty = \left( T_{h0} - T_\infty - \frac{\varphi_p}{h_a} \right) \exp\left( -\frac{h_a l}{\rho C_p q_v} x \right) + \frac{\varphi_p}{h_a} \quad (3.71a)$$

A partir de (3.66) et (3.68a), on obtient la variation de la température de mélange  $T_m$  selon  $x$  :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{dT_h}{dx} = -\frac{h_a l}{\rho C_p q_v} \left( T_{h0} - T_\infty - \frac{\varphi_p}{h_a} \right) \exp\left( -\frac{h_a l}{\rho C_p q_v} x \right) \quad (3.71b)$$

#### ◆ *Champ de température selon $y$*

Le champ de température est déterminé à partir de l'équation d'énergie (PTC 3.9 par exemple), qui s'écrit dans le cas présent :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.72)$$

Le champ de vitesse  $U$  est celui du régime dynamique établi (3.20a), dans lequel on introduit par commodité la viscosité cinématique  $\nu = \mu / \rho$  :

$$U = -\frac{g i}{2\nu} (y^2 - 2h y) \quad (3.73)$$

On rappelle que dans cette expression, la pente  $i = \sin \alpha$ , où  $\alpha$  est l'angle du radier avec l'horizontale (fig. 3.12). Il vient donc :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{1}{a} \frac{g i}{2\nu} (y^2 - 2h y) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.74)$$

où la profondeur  $h$  et  $\partial T / \partial x$  sont indépendants de  $y$ .

Une double intégration donne successivement :

$$i - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{a} \frac{g i}{2\nu} \left( \frac{y^3}{3} - h y^2 \right) \frac{\partial T}{\partial x} + A \quad (3.75a)$$

$$\text{A la paroi ( } y = 0 \text{), } \varphi_p = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\lambda A \quad (3.75b)$$

$$A = -\frac{\varphi_p}{\lambda} \quad (3.75c)$$

$$\text{ii - } T = -\frac{1}{a} \frac{g i}{2\nu} \left( \frac{y^4}{12} - h \frac{y^3}{3} \right) \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\varphi_p}{\lambda} y + B \quad (3.76a)$$

A la surface libre ( $y = h$ ),  $T = T_h$ , d'où :

$$T_h = -\frac{1}{a} \frac{g i}{2\nu} \left( -\frac{h^4}{4} \right) \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\varphi_p}{\lambda} h + B \quad (3.76b)$$

$$B = T_h - \frac{1}{a} \frac{g i}{8\nu} h^4 \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\varphi_p}{\lambda} h \quad (3.76c)$$

Il reste à introduire la température ambiante  $T_\infty$ , qui est généralement une donnée du problème, en éliminant  $T_h$ . Cela se fera en écrivant l'égalité des flux à la surface libre :

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=h} = h_a (T_h - T_\infty) \quad (3.77a)$$

soit, avec (3.75a) :

$$-\frac{\lambda}{a} \frac{g i}{\nu} \frac{h^3}{3} \frac{\partial T}{\partial x} + \varphi_p = h_a (T_h - T_\infty)$$

d'où l'on tire  $T_h$  :

$$T_h = T_\infty - \frac{\lambda}{h_a a} \frac{g i}{\nu} \frac{h^3}{3} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\varphi_p}{h_a} \quad (3.77b)$$

On exprime alors la constante  $B$  avec (3.76c).

Finalement,  $B$  étant déterminée, le champ de température est donné par (3.76a). Dans cette formule,  $\partial T / \partial x$  est tiré de (3.66) et (3.71b), tandis que la profondeur  $h$  a été calculée au §.3.4.2 (formule 3.23).

### ♥ Débit thermique ; température de mélange

Le débit thermique, ou débit d'énergie  $q_e$  est la quantité de chaleur transportée par unité de temps à travers une section  $S$  (PTC, 3.5a) :

$$q_e = \rho C_p \int_S T U dS \quad (3.78a)$$

Quant à la température de mélange (PTC, 3.6c), elle a pour définition :

$$T_m = \frac{1}{q_v} \int_S T U dS \quad (3.78b)$$

A partir des champs  $U$  et  $T$ , maintenant connus, leurs expressions analytiques, assez lourdes, pourront être aisément établies à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique.

#### 3.6.3.3. – Écoulement avec température imposée à la paroi

Lorsqu'une température  $T_p = cte$  est imposée au fond du canal, l'expression (3.67a) du bilan thermique sur une tranche  $dx$  n'est pas modifiée :

$$\rho C_p q_v \{T_m(x+dx) - T_m(x)\} = \{\varphi_p - h_a (T_h - T_\infty)\} l dx \quad (3.79a)$$

mais le flux  $\varphi_p$  doit maintenant être relié à la température  $T_p$  et au coefficient d'échange  $h_p$  à la paroi :

$$\varphi_p = h_p (T_p - T_m) \quad (3.79b)$$

d'où :

$$\rho C_p \frac{q_v}{l} \frac{dT_m}{dx} = h_p (T_p - T_m) - h_a (T_h - T_\infty) \quad (3.79c)$$

Cependant, la condition suffisante de régime établi (3.66) n'est pas opérationnelle ici, car elle conduit à une solution triviale qui est celle du régime uniforme ( $\partial T / \partial x = 0$  partout). Et on peut montrer qu'il en est de même avec une autre propriété établie dans PTC (formule 3.46b). Ceci est dû à la présence de la condition à la surface libre. La notion de régime thermique établi ne présente donc pas d'intérêt dans ce cas.

### ANNEXE 3.1. – PROBLEME : CONVECTION DANS UN ÉCOULEMENT EN FILM LAMINAIRE

On considère un film d'eau laminaire, de section rectangulaire large, qui s'écoule par l'effet de la pesanteur sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale (fig. A.3.1). Au niveau du seuil A, l'épaisseur du film est  $h_0$ , la vitesse (uniforme)  $U_0$  et la température (uniforme)  $T_0$ . Les coordonnées sont précisées sur la figure. L'origine des  $x$  est en A. On admettra que  $\partial U / \partial y = 0$  à la surface libre.

La paroi est chauffée uniformément sur toute sa longueur au moyen d'une densité de flux  $\varphi_p$ , ajustée pour que la température moyenne reste égale à  $T_0$ . L'atmosphère est à une température  $T_\infty$ , et la convection à la surface libre est caractérisée par un coefficient d'échange  $h_a$  donné.

Sur une distance  $d$  à partir de A, l'écoulement présente une zone d'établissement dynamique dans laquelle l'épaisseur du film est variable. Pour  $x > d$ , le régime est établi (uniforme), avec une épaisseur de film  $h = cte$ .

Le champ de température comporte trois zones : une zone d'établissement thermique, de longueur  $d_T$  ; une zone de régime thermiquement établi ; une zone uniforme où  $T$  ne dépend plus de  $x$  (la chaleur fournie par la paroi part intégralement dans l'atmosphère par conduction et convection).

Applications numériques :  $i = 10^{-2}$  ;  $T_0 = 65^\circ\text{C}$  ;  $U_0 = 3 \text{ cm/s}$  ;  $h_0 = 0,8 \text{ cm}$  ;  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$  ;  $h_a = 10 \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$ .

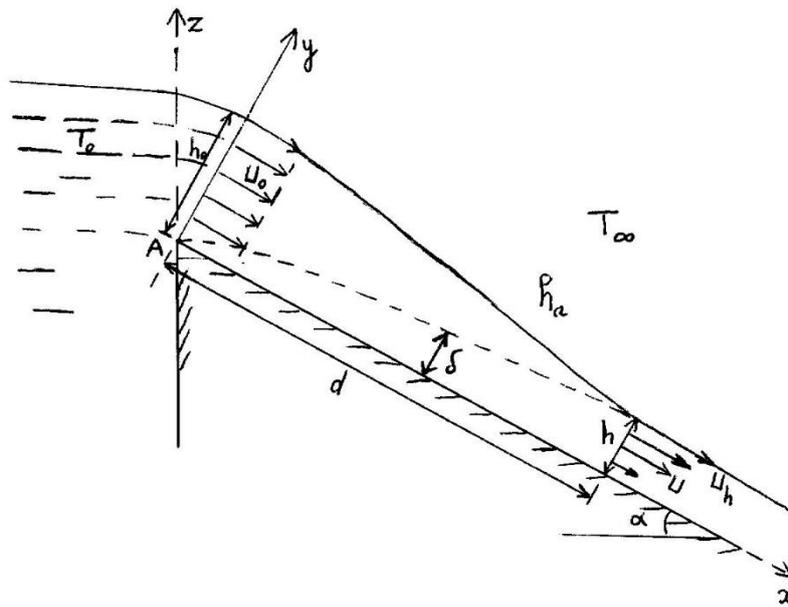


FIG. A3.1 – Écoulement en film

### Questions

1) On s'intéresse pour commencer à la zone de régime établi. Dans celle-ci, donner le profil de vitesse  $U(y)$ . Calculer l'épaisseur  $h$  en fonction des données, puis la vitesse  $U_h$  à la surface libre

Que peut-on dire du nombre de Reynolds au seuil et en régime établi ?

2) On veut maintenant évaluer l'ordre de grandeur de la longueur d'établissement  $d$ .

En schématisant le problème, on peut admettre que  $d$  est l'abscisse où l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite qui se développe à partir de  $A$  devient égale à  $h$  ( $U_h$  joue ici le rôle de la vitesse extérieure  $U_\infty$  dans un écoulement externe classique).

Calculer  $d$ .

3)

En adoptant un raisonnement analogue à celui de la question 2), déterminer l'ordre de grandeur de  $d_T$  (longueur d'établissement thermique).

4)

Dans la zone uniforme, établir le profil de température  $T(y) - T_\infty$  dans le film liquide. En déduire les expressions de  $T_h$  et  $T_p$ .

Quelle est la densité de flux  $\varphi_p$  nécessaire pour maintenir la température moyenne du film  $((T_p + T_h)/2)$  à sa valeur initiale  $T_0$  ? Calculer numériquement  $T_p$  et  $T_h$ .

## Solutions

1)

Dans un écoulement laminaire uniforme, le profil de vitesse est donné par (3.20a) (avec  $\nu = \mu / \rho$ ) :

$$U = -\frac{g i}{2 \nu} (y^2 - 2 h y) \quad (\text{A3.1.1})$$

La conservation du débit depuis le seuil A donne (par unité de largeur du canal) :

$$\frac{q_v}{l} = U_0 h_0 = \int_0^h U dy = \frac{g i}{\nu} \frac{h^3}{3} \quad (\text{A3.1.2})$$

d'où l'épaisseur du film :

$$h = \left( \frac{3 U_0 h_0 \nu}{g i} \right)^{1/3} \quad (\text{A3.1.3})$$

A la surface libre ( $y = h$ ), la vitesse  $U_h$  est obtenue par (1) :

$$U_h = \frac{g i}{2 \nu} h^2 \quad (\text{A3.1.4})$$

d'où avec (A3.3) :

$$U_h = \frac{1}{2} \left( \frac{g i}{\nu} \right)^{1/3} (3 U_0 h_0)^{2/3} \quad (\text{A3.1.5})$$

### Application numérique :

Pour l'eau à 65°C, les tables donnent comme viscosité au niveau du seuil (ET, Annexes) :  $\nu_0 = 0,45 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ . Alors, d'après (3) :

$$h = \left( \frac{3 \times 3 \cdot 10^{-2} \times 0,8 \cdot 10^{-2} \times 0,45 \cdot 10^{-6}}{9,81 \times 0,01} \right)^{1/3} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\boxed{h = 0,15 \text{ cm}} \quad (\text{A3.1.6})$$

et d'après (5) :

$$\boxed{U_h = 24,5 \text{ cm/s}} \quad (\text{A3.1.7})$$

Au seuil (cf. 3.19) :

$$Re_0 = \frac{U_0 \times 4 h_0}{\nu_0} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \times 4 \times 0,8 \cdot 10^{-2}}{0,45 \cdot 10^{-6}}$$

$$Re_0 = 2130 \quad (\text{A3.1.8})$$

Vu ce qui a été dit au § 3.4.1 ♦, l'écoulement est bien laminaire.

Quand l'écoulement devient uniforme, le débit étant conservé, on a :

$$Re = \frac{V_d \times 4 h}{\nu} \quad \text{et} \quad q_v = U_0 \times h_0 l = V_d \times h l$$

$$Re = \frac{U_0 \times 4h_0}{\nu} \quad (\text{A3.1.9})$$

D'après les données, la température de mélange est maintenue constante par le chauffage de la paroi. Donc on a  $\nu = \nu_0$ , et par conséquent  $Re = Re_0$ . Le régime reste laminaire. Ceci est en conformité avec la propriété énoncée au § 3.5.2.

2)

D'après (FEMM 4.44a), l'épaisseur d'une couche limite laminaire est :

$$\delta = 5 \left( \frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{1/2} \quad (\text{A3.1.10})$$

Quand on arrive au régime établi,  $\delta = h$ ,  $U_\infty = U_h$  et  $x = d$ .

$$d = \frac{h^2}{25} \frac{U_h}{\nu} \quad (\text{A3.1.11})$$

En remplaçant  $U_h$  et  $h$  par (5) et (3), on obtient pour la longueur d'établissement dynamique :

$$d = \frac{1}{50 \nu^{2/3}} \frac{(3U_0 h_0)^{4/3}}{(g i)^{1/3}} \quad (\text{A3.1.12})$$

Avec les valeurs numériques :

$$d = \frac{1}{50 \times (0,45 \cdot 10^{-6})^{2/3}} \frac{(3 \times 3 \cdot 10^{-2} \times 0,8 \cdot 10^{-2})^{4/3}}{(9,8 \times 0,01)^{1/3}}$$

$$\boxed{d = 5,03 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 5,03 \text{ cm}} \quad (\text{A3.1.13})$$

3)

Par analogie avec la question précédente, on admettra que la longueur d'établissement thermique  $d_T$  est la distance à laquelle l'épaisseur de couche limite thermique  $\delta_T$  atteint la valeur  $h$ . Pour ce faire, on trouve dans (PTC, 1.29) :

$$\delta_T = \frac{\delta}{Pr^{1/3}} \quad (\text{A3.1.14})$$

Avec (A3.1.10) :

$$\delta_T = 5 \left( \frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{1/2} \frac{1}{Pr^{1/3}} \quad (\text{A3.1.15})$$

soit ici :

$$h = 5 \left( \frac{\nu d_T}{U_\infty} \right)^{1/2} \frac{1}{Pr^{1/3}}$$

$$d_T = \frac{h^2}{25} \frac{U_h}{\nu} Pr^{2/3} = d Pr^{2/3} \quad (\text{A3.1.16})$$

Pour l'eau à  $T = T_0 = 65 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $Pr = 2,8$  et  $Pr^{2/3} = 1,985$

$$d_T = 5,03 \times 1,985$$

$$\boxed{d_T = 10 \text{ cm}} \quad (\text{A3.1.17})$$

4)

Dans la zone thermiquement uniforme, on a selon (3.60 a et b) (§ 3.6.2) :

$$T = A y + B \quad (\text{A3.1.19})$$

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dy} = -\lambda A = \text{cte} = \varphi_p \quad (\text{A3.1.20})$$

d'où,  $\varphi_p$  étant donné :

$$A = -\frac{\varphi_p}{\lambda} \quad (\text{A3.1.21})$$

A la surface libre :

$$T_h = A h + B = -\frac{\varphi_p}{\lambda} h + B \quad (\text{A3.1.22})$$

et aussi, avec le coefficient de convection :

$$\varphi = \varphi_p = h_a (T_h - T_\infty) \quad (\text{A3.1.23})$$

d'où :

$$\boxed{T_h = \frac{\varphi_p}{h_a} + T_\infty} \quad (\text{A3.1.24})$$

On en tire  $B$  :

$$B = T_\infty + \varphi_p \left( \frac{l}{h_a} + \frac{h}{\lambda} \right) \quad (\text{A3.1.25})$$

Avec les relations (19), (21) et (25), on obtient le profil de température dans le film :

$$T - T_\infty = \varphi_p \left( \frac{l}{h_a} + \frac{h - y}{\lambda} \right) \quad (\text{A3.1.26})$$

A la paroi,  $y = 0$  et  $T = T_p$  :

$$\boxed{T_p = T_\infty + \varphi_p \left( \frac{l}{h_a} + \frac{h}{\lambda} \right)} \quad (\text{A3.1.27})$$

On veut avoir :

$$(T_p + T_h) / 2 = T_0 \quad (\text{A3.1.28})$$

Avec (24) et (26) il vient :

$$T_\infty + \varphi_p \left( \frac{l}{h_a} + \frac{h}{\lambda} \right) + \frac{\varphi_p}{h_a} + T_\infty = 2 T_0$$

$$\boxed{\varphi_p = 2 \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{2}{h_a} + \frac{h}{\lambda}}} \quad (\text{A3.1.29})$$

Avec les données numériques (pour l'eau à  $T_0 = 65 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\lambda_0 = 0,65 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ) :

$$\varphi_p = 2 \frac{65 - 20}{\frac{2}{10} + \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{0,65}}$$

$$\boxed{\varphi_p = 445 \text{ W/m}^2} \quad (\text{A3.1.30})$$

Les températures sont données par (24) et (25) :

$$T_p = 20 + 445 \left( \frac{1}{10} + \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{0,65} \right)$$

$$\boxed{T_p = 65,5 \text{ } ^\circ\text{C}} \quad (\text{A3.1.31})$$

$$T_h = \frac{445}{10} + 20$$

$$\boxed{T_h = 64,5 \text{ } ^\circ\text{C}} \quad (\text{A3.1.32})$$

### *Commentaire*

En toute rigueur, dans la question 4), il aurait fallu se référer à la température de mélange plutôt qu'à la température moyenne. Mais elle est compliquée à calculer, et la différence aurait été insignifiante : on voit bien que l'écart de température est très faible dans le film d'eau, comparé à l'écart entre la surface libre et l'ambiance.

Concernant la valeur numérique du coefficient d'échange, voir l'Annexe 3.2. ci-dessous.

## **ANNEXE 3.2. – SURFACE LIBRE : CONTRAINTE TANGENTIELLE ET COEFFICIENT D'ÉCHANGE**

Dans nos ouvrages, l'attention du lecteur a été attirée à maintes reprises sur la nécessité d'avoir à disposition les ordres de grandeur de certains paramètres, qui sont des repères numériques indispensables. Regardons ici ce qu'il en est des conditions mécaniques et thermiques sur une surface libre. Malgré les très grandes variétés de situations, il en ressort des fourchettes de valeurs assez bien délimitées.

### **A3.2. – 1 – Contrainte tangentielle entre la surface libre et le gaz ambiant**

On assimile la surface libre à une paroi solide d'ordonnée  $y = h$ , la contrainte tangentielle étant notée  $\tau_h$ . Plusieurs approches sont alors possibles.

♣ En considérant que la couche limite ambiante est laminaire, on trouve dans le tableau FEMM 4.2 (§ 4.4.6), pour un écoulement d'air, la valeur moyenne  $\langle \tau_h \rangle$  sur l'ensemble de la zone laminaire :

- pour  $U_\infty = 3 \text{ m/s}$  :  $\langle \tau_h \rangle = 0,01 \text{ N/m}^2$
- pour  $U_\infty = 10 \text{ m/s}$  :  $\langle \tau_h \rangle = 0,11 \text{ N/m}^2$

◆ Avec une couche limite turbulente, sur une longueur égale à 10 fois l'abscisse de transition laminaire – turbulent, FEMM (§ 5.3.2.♠) donne pour le coefficient de traînée :

$$\frac{1}{2} C_{Xf} = \frac{\langle \tau_h \rangle}{\rho U_\infty^2} = 16,5 \cdot 10^{-4}$$

soit :

- pour  $U_\infty = 3 \text{ m/s}$  :  $\langle \tau_h \rangle = 0,019 \text{ N/m}^2$

- pour  $U_\infty = 10 \text{ m/s}$  :  $\langle \tau_h \rangle = 0,2 \text{ N/m}^2$

♥ Une troisième possibilité consiste à chercher la valeur locale de  $\tau_h$  dans une couche limite atmosphérique turbulente d'épaisseur donnée ( $\delta = 10 \text{ m}$  ou  $100 \text{ m}$  par exemple). Dans ce cas,  $\delta$  étant fournie par FEMM (5.67b) :

$$\delta = 0,37 \nu^{0,2} U_\infty^{-0,2} x^{0,8}$$

on en tire  $x$  en fonction de  $\delta$ , que l'on reporte dans l'expression de  $\tau_h$  (FEMM, 5.68a), ce qui donne à la fin du calcul :

$$\tau_h = 0,0226 \rho U_\infty^{1,75} \nu^{0,25} \delta^{-0,25}$$

- avec  $U_\infty = 10 \text{ m/s}$  ;  $\delta = 10 \text{ m}$ , on obtient :  $\tau_h = 0,05 \text{ N/m}^2$ .

- et avec  $\delta = 100 \text{ m}$  :  $\tau_h = 0,03 \text{ N/m}^2$

♠ Les trois estimations précédentes reposent sur le modèle classique d'une couche limite dont l'épaisseur augmente avec  $x$ . Cependant, les conditions atmosphériques correspondent plus souvent à une couche limite d'épaisseur constante, qui s'apparente à un écoulement de Couette, ou ce qui revient à peu près au même, à un demi écoulement établi entre deux surfaces parallèles distantes de  $2\delta$ . On est donc ramené à une sorte d'écoulement à surface libre, d'épaisseur  $h = \delta$ , mais dont la surface libre n'a pas d'existence matérielle.

Dans ce cas, appliquons la loi FEMM (6.156a) en considérant l'écoulement comme turbulent rugueux :

$$\frac{1}{\sqrt{C_f/2}} = 2,5 \text{Ln} \frac{b}{\varepsilon} + 6,04 \quad \text{puis :} \quad \tau_h = \frac{C_f}{2} \rho V_d^2$$

En admettant  $V_d \approx U_\infty = 10 \text{ m/s}$  (en fait, avec ce modèle,  $U_\infty$  correspondrait à  $U_{max}$  dans le plan médian, mais nous cherchons ici des ordres de grandeur et en régime turbulent ces deux vitesses sont assez proches), et une rugosité  $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$  (valeur acceptable pour un plan d'eau), on obtient :

- pour  $b = \delta = 10 \text{ m}$  :  $\tau_h = 0,154 \text{ N/m}^2$

- pour  $b = \delta = 100 \text{ m}$  :  $\tau_h = 0,094 \text{ N/m}^2$

### Conclusions

- Les résultats des différentes approches sont cohérents, et on peut admettre que dans des circonstances ordinaires,  $0,01 < \tau_h < 0,2 \text{ N/m}^2$ .

- Dans les applications, cette valeur doit être comparée à la contrainte  $\tau_p$  sur le radier, pour vérifier que l'hypothèse (3.17c) est acceptable. Sinon, le profil de vitesse doit être recalculé avec la condition (3.18) :  $\mu (dU/dy)_{y=h} = \tau_h$ .

- Rappelons que le vent (ou plus généralement le courant gazeux) peut aller en sens contraire de l'écoulement. Dans ce cas,  $\tau_h$  est négatif.

### A3.2. – 2 – Coefficient de convection

Dans les évaluations qui suivent, on considère qu'il n'y a ni évaporation ni condensation à la surface libre.

♣ Avec une couche limite ambiante laminaire, une estimation du coefficient de convection local  $h_a$  à la surface libre est donnée par PTC (1.58b) :

$$h_a = 0,460 \lambda \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} Pr^{1/3}$$

Dans le cas de l'exercice A3.1, on peut se placer en  $x = d_T$  (début du régime thermique établi). En admettant que la couche limite débute en  $x = 0$ , on vérifie d'abord que le nombre de Reynolds est inférieur à  $5 \cdot 10^5$  (FEMM, § 4.4.6). Ensuite, supposons que le milieu ambiant est immobile au loin. Il est donc entraîné près de la paroi à la vitesse  $U_h$ , ce qui revient à dire que  $U_\infty = U_h$ .

Avec les données de cet exercice, on trouve :

$$h_a \cong 4,3 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$$

ce qui est proche des conditions de la convection naturelle. La valeur  $h_a = 10 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$  donnée dans l'énoncé correspond à une vitesse extérieure  $U_\infty \cong 1,25 \text{ m/s}$ .

◆ En présence d'une couche limite atmosphérique turbulente, reprenons le raisonnement appliqué dans le paragraphe ♠ précédent. Dans les conditions adoptées, le nombre de Stanton est donné par ET (4.23) :

$$St = \frac{1}{2} C_f Pr^{-2/3}$$

d'où un coefficient de convection (ET, 4.6) :

$$h_a = St \rho C_p V_d$$

Avec  $V_d \approx U_\infty = 10 \text{ m/s}$ , on trouve :

- pour  $b = \delta = 10 \text{ m}$  :  $h_a = 18,7 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$

- pour  $b = \delta = 100 \text{ m}$  :  $h_a = 13 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$

**Pour conclure**, dans les situations usuelles, on peut dire que le coefficient de convection se situe à l'intérieur d'une fourchette  $[4 - 25] \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$ .

### ANNEXE 3.3. – LES MÉANDRES D'UN COURS D'EAU : UNE TENTATIVE D'OPTIMISATION NATURELLE

Dans l'étude des écoulements à surface libre, nous avons toujours implicitement considéré des lits rectilignes. Pourtant, de nombreux cours naturels font ce qu'on appelle des méandres. Il est intéressant de s'interroger sur la raison de ce comportement.

Revenons pour cela au concept de « charge spécifique » (3.37), ou énergie mécanique utile, nécessaire pour assurer l'écoulement (§ 3.4.6.2. ♦). On a vu que pour un débit donné, il existe toujours une profondeur de l'écoulement, dite critique, qui minimise la charge spécifique.

Nous allons montrer ici qu'il existe également une pente critique, optimale, correspondant au même minimum de l'énergie spécifique. Elle explique la forme en méandres de certains lits, qui tend à diminuer la pente du radier si celle du terrain est supérieure à la pente optimale. Cette propriété sera établie pour les régimes turbulents aussi bien que pour les régimes laminaires.

🎵 Dans ce paragraphe, par commodité, nous parlerons de « cours d'eau ». Il est bien évident que la théorie s'applique à tout type d'écoulement à surface libre (naturel ou artificiel) et à tout type de liquide newtonien.

#### A3.3. – 1 – Pente optimale en régime turbulent

Partons de la forme (3.37b) de la charge spécifique :

$$H_s = h + \frac{q_v^2}{2 g S^2} \quad (\text{A3.3 – 1})$$

Nous considérons le cas d'un lit rectangulaire ( $S = l h$ ) et d'un débit imposé. On a :

$$H_s = h + \frac{q_v^2}{2 g l^2 h^2} \quad (\text{A3.3 – 2})$$

La profondeur  $h$  dépend de la pente  $i$ , d'où  $H_s = H_s(i)$ . Calculons la dérivée de cette fonction :

$$\frac{dH_s}{di} = \frac{dH_s}{dh} \frac{dh}{di} = \left( 1 - \frac{1}{g} \left( \frac{q_v}{l} \right)^2 \frac{1}{h^3} \right) \frac{dh}{di} \quad (\text{A3.3 – 3})$$

Elle s'annule pour une valeur optimale (ou critique)  $h_c$  de la profondeur, telle que :

$$\frac{1}{g} \left( \frac{q_v}{l} \right)^2 \frac{1}{h_c^3} = 1, \quad \text{soit} \quad \boxed{h_c = \left( \frac{q_v}{l} \right)^{2/3} \frac{1}{g^{1/3}}} \quad (\text{A3.3 – 4})$$

!!! *Il est essentiel de remarquer que l'on retrouve ici le critère de transition entre régime fluvial et régime torrentiel, ainsi que l'expression (3.42b) de  $h_c$ . Mais on voit, de plus, que la profondeur critique définie au § 3.4.6 correspond à une « pente critique » (ou optimale)  $i_c$  que nous allons déterminer maintenant.*

Pour raccorder la variation de  $h$  à celle de  $i$ , revenons à la formule (3.32) qui donne la vitesse débitante en régime turbulent :

$$V_d = 3,1 \frac{D_h^{2/3} g^{1/2}}{\varepsilon^{1/6}} \sqrt{i} \quad (\text{A3.3 - 5})$$

avec ici :

$$q_v = l h V_d \text{ et } D_h = 4h \quad (\text{A3.3 - 6})$$

d'où, en remplaçant, tous calculs faits :

$$\frac{q_v}{l} = 7,8 \frac{h^{5/3} g^{1/2}}{\varepsilon^{1/6}} \sqrt{i} \quad (\text{A3.3 - 7})$$

Le débit étant fixé, on en tire  $h$  en fonction de  $i$  :

$$h = 0,29 \left( \frac{q_v}{l} \right)^{3/5} \frac{\varepsilon^{0,1}}{g^{0,3}} \frac{1}{i^{0,3}} \quad (\text{A3.3 - 8})$$

Au point de transition fluvial/torrentiel,  $h = h_c$  et  $i = i_c$ , d'où en regroupant (4) et (8) :

$$0,29 \left( \frac{q_v}{l} \right)^{3/5} \frac{\varepsilon^{0,1}}{g^{0,3}} \frac{1}{i_c^{0,3}} = \left( \frac{q_v}{l} \right)^{2/3} \frac{1}{g^{1/3}}$$

ce qui donne finalement pour valeur de la pente critique :

$$i_c = 0,016 \left( \frac{q_v}{l} \right)^{-2/9} \varepsilon^{1/3} g^{1/9} \quad (\text{A3.3 - 9})$$

🎵 Les valeurs des exposants peuvent sembler surprenantes, mais il est facile de vérifier que  $i_c$  est bien sans dimension. On voit en outre que le paramètre le plus influent est la rugosité, suivie du débit et enfin de la pesanteur. Enfin, l'effet de ces paramètres est très atténué par des exposants sensiblement inférieurs à 1.

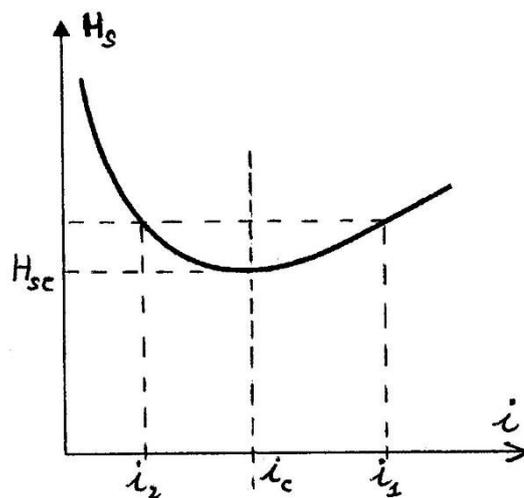


FIG. 1 – Pente critique d'un écoulement.  
A gauche de  $i_c$  : régime fluvial. A droite de  $i_c$  : régime torrentiel

Regardons maintenant le signe de  $dH_S / di$  (expression 3). La relation (8) montre que :

$$\frac{dh}{di} < 0 \quad (\text{A3.3 – 10})$$

On a donc, compte tenu de (4), (8) et (9), ainsi que de (3.41c, d) :

- *en régime fluvial*

$$h > h_c \quad \text{d'où} \quad dH_S / di < 0 \quad \text{et} \quad i < i_c \quad (\text{A3.3 – 11})$$

*La pente est inférieure à la pente critique*

- *en régime torrentiel*

$$h < h_c \quad \text{d'où} \quad dH_S / di > 0 \quad \text{et} \quad i > i_c \quad (\text{A3.3 – 12})$$

*La pente est supérieure à la pente critique*

!!! La forme (fig. 1) de la courbe  $H_S(i)$  est semblable à celle de la figure (3.8), mais dans le cas présent, le régime fluvial est à gauche du point critique, et le régime torrentiel à droite.

### **A3.3. – 2 – Aptitude d'un cours d'eau à former des méandres**

La pente critique d'un cours d'eau est donc celle qui minimise la charge spécifique, c'est à dire l'énergie mécanique nécessaire pour assurer le débit demandé.

Ainsi, lorsque la pente du terrain est supérieure à  $i_c$ , si la topographie du site et la nature du sol s'y prêtent, un écoulement naturel aura spontanément tendance à augmenter la distance parcourue pour que la pente du radier se rapproche de la pente optimale, donc à zigzaguer. C'est ainsi que se créent les méandres, qui illustrent une tendance spontanée de la nature à minimiser la consommation d'énergie. Dans les ouvrages artificiels, il sera recommandé de choisir une pente voisine de  $i_c$ , quitte à fractionner le lit par des tronçons en escalier comme on le fait souvent avec les canaux d'irrigation.

*On peut donc dire que, si le régime est torrentiel ( $i > i_c$ ), le cours d'eau est apte à former des méandres (« méandrabile » serait grammaticalement correct, mais assez laid).*

Par contre, si la pente du terrain est inférieure à la pente optimale, le tracé rectiligne est le plus approprié, toute augmentation de la longueur du trajet se traduisant par une augmentation de  $H_S$  (pour  $i < i_c$ , la charge spécifique augmente quand  $i$  diminue).

*En régime fluvial, un cours d'eau est donc en principe inapte à former des méandres.*

Bien entendu, ces propriétés simples peuvent être démenties dans les faits, si le relief du terrain impose sa forme au lit du cours d'eau. Il peut ainsi interdire des méandres à un régime torrentiel et en imposer à un régime fluvial, mais ceci est d'une autre nature.

Quelques exemples particulier vont illustrer cette question, mais uniquement pour donner des ordres de grandeur.

♣ *La Seine*

Très approximativement, son débit moyen à Paris est de  $330 \text{ m}^3/\text{s}$  pour une largeur moyenne de  $100 \text{ m}$ , soit  $q_v/l \cong 3,30 \text{ m}^3/\text{s.m}$ . Entre Paris (altitude  $27 \text{ m}$ ) et Rouen (altitude  $2 \text{ m}$ ), la distance est de  $120 \text{ km}$ , d'où une pente moyenne :

$$i = 25/120000 = 2.10^{-4}$$

A partir de (9), avec  $\varepsilon = 1,3.10^{-2} \text{ m}$  (sol naturel), on obtient :

$$i_c \cong 3,7.10^{-3}$$

La pente du lit est très inférieure à la pente critique. Le régime est donc fluvial, et naturellement rectiligne. Les méandres de la Seine semblent donc imposés par le relief.

◆ *La Loire*

Le débit moyen à Blois est de  $350 \text{ m}^3/\text{s}$  pour une largeur de  $200 \text{ m}$ , ce qui donne  $q_v/l \cong 1,75 \text{ m}^3/\text{s.m}$ . La pente moyenne entre Orléans et Blois est :

$$i \cong 4.10^{-4}$$

d'où avec  $\varepsilon = 1,3.10^{-2} \text{ m}$ , (9) donne :

$$i_c \cong 4,3.10^{-3}$$

Là encore le cours est fluvial et naturellement rectiligne, mais le relief n'impose pas de méandres et laisse donc sa liberté au fleuve.

♥ *Méandres de plaine (fig. 2)*

Pour qu'une rivière puisse déployer naturellement des méandres, il faut une grande surface sans relief et dépourvue d'obstacles. La figure 2 en donne un exemple.

La vue aérienne ne permet pas d'apprécier la pente moyenne du terrain, mais le débit peut être estimé autour de  $q_v/l \cong 1,5 \text{ m}^3/\text{s.m}$ , avec une profondeur de l'ordre de  $0,5 \text{ m}$ , alors que la pente critique  $h_c = 0,6 \text{ m}$  d'après (6), ce qui correspond à un régime torrentiel. En conservant toujours une rugosité standard  $\varepsilon = 1,3.10^{-2} \text{ m}$ , on en déduit une pente critique :

$$i_c \cong 4,5.10^{-3}$$

La rivière ne serait donc pas très loin du point critique,  $i$  étant un peu supérieure à  $i_c$ . Aussi, vu l'allongement du trajet par rapport à la ligne droite, on peut estimer la pente naturelle du terrain autour de  $2.10^{-2}$  à  $2,5.10^{-2}$ , ce qui est plausible.

♠ *Méandres de montagne (fig. 3)*

La figure 3 montre un exemple assez rare de « *méandres en épingle à cheveux* » sur un torrent de montagne. Ce type de méandre n'est possible que si la vallée est assez large et présente une pente relativement uniforme.

Le torrent est peu profond, et on peut estimer  $h = 0,12 \text{ m}$  en moyenne, avec une vitesse de l'ordre de  $3 \text{ m/s}$ , d'où  $q_v/l \cong 0,36 \text{ m}^3/\text{s.m}$ .

La rugosité moyenne équivalente est ici considérable, vu le lit de roches et de graviers, probablement de l'ordre de  $0,035\text{ m}$ , ce qui donne une pente critique :

$$i_c \cong 8.10^{-3}$$

et une profondeur critique :

$$h_c \cong 0,24\text{ m}$$

Le régime est bien torrentiel ( $h < h_c$ ). Le cours d'eau est apte à former des méandres.

L'image de la figure 3 donne un ordre de grandeur de la pente du torrent ( $i = 7.10^{-2}$  à  $8.10^{-2}$ ) et de celle du sol (environ  $20.10^{-2}$ ). Le cours d'eau a donc trouvé une pente intermédiaire entre la pente critique et la pente du terrain. En outre, il faudrait tenir compte des virages, qui s'apparentent à des pertes de charge singulières, et qui contribuent à augmenter la longueur équivalente du radier (cf. méthode d'équifriction, FEMM § 7.7.5), donc à diminuer la pente, et à la rapprocher de  $i_c$ .



FIG. 2 – Méandres de plaine. La rivière vient du fond (en haut de la photo) et reçoit un affluent venant de la droite (les dépôts d'alluvions se font toujours dans l'intérieur des coudes ; leur position indique donc le sens de l'écoulement).  
Péninsule du Kamtchatka. Photo de l'auteur.



FIG. 3 – Méandres en « épingles à cheveux » sur un terrain en forte pente.  
Patagonie chilienne. Photo de l'auteur.

### A3.3. - 3 – Pente optimale en régime laminaire

La distinction entre régime fluvial et régime torrentiel est presque toujours réservée aux écoulements turbulents. Mais elle concerne également les écoulements laminaires, généralement en films minces (ruissellement d'eau (à la suite de pluies) ou de liquides divers (à la suite d'accidents par exemple) sur un plan à faible pente).

Pour étudier l'influence du débit et de la pente, il faut revenir à la définition (3.35b) de la charge de l'écoulement :

$$H(x) = \frac{X}{\rho g} = \frac{p^*}{\rho g} + \frac{l}{2 g q_v} \int_S U^3 dS \quad (\text{A3.3 - 13})$$

Lorsque le régime est laminaire (FEMM, § 7.2.4.3), on peut admettre l'approximation suivante :

$$H(x) = \frac{p^*}{\rho g} + 1,5 \frac{V_d^2}{2 g} \quad (\text{A3.3 - 14})$$

soit, dans le cas d'un lit rectangulaire ( $S = lh$ ) :

$$H_s = h + \frac{1,5 q_v^2}{2 g l^2 h^2} = h + 0,75 \frac{q_v^2}{g l^2 h^2} \quad (\text{A3.3 - 15})$$

La différence avec (2) provient du profil de vitesse  $U$  qui n'est pas le même en régime laminaire et en régime turbulent. A ceci près, le raisonnement suivi au parag. 1 peut être repris sans modification. Ainsi, (3) et (4) deviennent respectivement :

$$\frac{dH_S}{di} = \frac{dH_S}{dh} \frac{dh}{di} = \left( 1 - \frac{1,5}{g} \left( \frac{q_v}{l} \right)^2 \frac{1}{h^3} \right) \frac{dh}{di} \quad (\text{A3.3-16})$$

$$\frac{1,5}{g} \left( \frac{q_v}{l} \right)^2 \frac{1}{h_c^3} = 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{h_c = 1,14 \left( \frac{q_v}{l} \right)^{2/3} \frac{1}{g^{1/3}}} \quad (\text{A3.3-17})$$

!!! Autrement dit, la distinction entre régime fluvial et régime torrentiel n'est pas limitée aux écoulements turbulents ; elle est présente aussi dans les écoulements laminaires, où existe également une profondeur critique  $h_c$ . On y retrouve les deux cas :

$$h > h_c : \quad \frac{dH_S}{dh} > 0 \quad \text{régime fluvial} \quad (\text{A3.3-18})$$

$$h < h_c : \quad \frac{dH_S}{dh} < 0 \quad \text{régime torrentiel}$$

En outre, la profondeur critique a presque la même expression qu'en régime turbulent (avec un coefficient 1 dans (4) et 1,14 dans (17)).

Par contre, la *pente critique* correspondant à  $h_c$  ne dépend pas des mêmes paramètres. En effet, en régime laminaire, la loi de variation de  $h$  en fonction de  $i$  est donnée par (3.23) :

$$h = \left( \frac{3\mu}{\rho g i} \frac{q_v}{l} \right)^{1/3} \quad (\text{A3.3-19})$$

d'où, en introduisant la viscosité cinématique  $\nu = \mu / \rho$  :

$$i = \frac{3\nu}{g h^3} \frac{q_v}{l} \quad \text{et} \quad i_c = \frac{3\nu}{g h_c^3} \frac{q_v}{l} \quad (\text{A3.3-20})$$

soit, avec (17) :

$$\boxed{i_c = 2\nu \left( \frac{q_v}{l} \right)^{-1}} \quad (\text{A3.3-21})$$

🎵 Enfin, (19) montre que  $dh/di < 0$ . A partir de (16) et (17), on retrouve donc les propriétés (11) et (12) :

$$\text{- en régime fluvial, } dH_S / di < 0 \quad \text{et} \quad i < i_c \quad (\text{A3.3-22})$$

*La pente est inférieure à la pente critique*

$$\text{- en régime torrentiel, } dH_S / di > 0 \quad \text{et} \quad i > i_c \quad (\text{A3.3-23})$$

*La pente est supérieure à la pente critique*

A titre d'exemple, dans l'écoulement en film de l'Annexe 3.1,  $q_v / l = U_0 h_0 = 0,24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s.m}$ . On en déduit  $i_c = 0,5 \cdot 10^{-2}$ . Comme la pente donnée est  $i = 1 \cdot 10^{-2}$ , le film est en régime torrentiel, et serait donc apte à former des méandres.

### ANNEXE 3.4. – RELATION ENTRE PENTE CRITIQUE ET NOMBRE DE REYNOLDS

Comme on l'a déjà noté au § 3.6.4.2 ♣, il n'y a pas de relation directe entre régime laminaire/turbulent et régime fluvial/torrentiel. Essayons quand même d'introduire quelques repères communs.

Dans le cas d'un lit rectangulaire large (ou plat, cf. 3.19), le nombre de Reynolds est :

$$Re = \frac{V_d \times 4h}{\nu} = \frac{q_v}{S} \frac{4h}{\nu} = \frac{q_v}{l h} \frac{4h}{\nu}$$

$$Re = \frac{4}{\nu} \frac{q_v}{l} \quad (\text{A3.4-1})$$

♣ *En régime laminaire :*

On doit avoir  $Re < 2500$ , soit :

$$\frac{q_v}{l} < 625 \nu \quad (\text{A3.4-2})$$

et, d'après (A3.3 - 19) :

$$h < \left( \frac{3 \nu}{g i} \right)^{\frac{1}{3}} (625 \nu)^{\frac{1}{3}}$$

$$h < 12,3 \left( \frac{\nu^2}{g i} \right)^{\frac{1}{3}} = h_{max} \quad (\text{A3.4-3})$$

D'autre part, on a obligatoirement, d'après (A3.3 - 17) :

$$h_c = 1,14 \left( \frac{q_v}{l} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{g^{1/3}} < 1,14 \frac{(625 \nu)^{\frac{2}{3}}}{g^{1/3}}$$

$$h_c < 83 \frac{\nu^{2/3}}{g^{1/3}} = h_{cmax} \quad (\text{A3.4-4})$$

- Si  $h_{max} > h_c$ , le régime peut être fluvial ( $h_c < h < h_{max}$ ) ou torrentiel ( $h < h_c$ ), cf. (A3.3 - 18). Alors :

$$h_{max} > h_c \Rightarrow 12,3 \left( \frac{\nu^2}{g i} \right)^{\frac{1}{3}} > 1,14 \left( \frac{q_v}{l} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{g^{1/3}}$$

ce qui signifie une condition sur la pente :

$$i < 1256 \nu^2 \left( \frac{q_v}{l} \right)^{-2}$$

En particulier, la transition laminaire/turbulent ( $q_v / l < 625 \nu$ ) correspond à une valeur  $i_{ct}$  de la pente critique (A3.3 - 21) :

$$i_{ct} = \frac{2 \nu}{625 \nu} = 3,2 \cdot 10^{-3} \quad (\text{A3.4-5})$$

- Si  $h_{max} < h_c$ , le régime ne peut être que torrentiel ( $h < h_{max}$ ). La condition précédente est inversée.

◆ *En régime turbulent*

Une analyse similaire est réalisable en remplaçant (A3.3 – 19) par (A3.3 – 8). Nous ne la détaillerons pas.

Retenons simplement de tout ceci que les combinaisons laminaire – turbulent / fluvial – torrentiel sont multiples, et que chaque configuration doit être traitée au cas par cas.



d'après Ph. Gelluck – Le chat

## Bibliographie

- BOISSON H-C., CRAUSSE P. – *De l'aérodynamique à l'hydraulique : un siècle d'études sur modèles réduits*. Cepadues - Editions (2014)
- COMOLET R. – *Mécanique expérimentale des fluides, T.II*. Masson, 1976.
- CSTB – *Climatologie*. Edité par Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (1992)
- DAVENPORT A.G. – The spectrum of horizontal gustiness near the ground in high winds. *Q. J. Roy. Met. Soc.*, 87, p. 194-211 (1961)
- GANDEMER J. – Inconfort dû au vent aux abords des bâtiments : concepts aérodynamiques. *Cahiers du CSTB*, 1384, N°170 (1976)
- FAO – Production piscicole dans les canaux d'irrigation, [www.fao.org](http://www.fao.org)
- GROSSETETE C. – *Mécanique des fluides*. Ellipses (1997)
- KAIMAL J.C., FINNIGAN J.J. – *Atmospheric boundary layer flows*. Oxford Univ. Press (1994)
- KAVIANY M. - *Principles of convective heat transfer*. 2ème édition. Springer-Verlag (2001)
- KAYS W.M., CRAWFORD M.E. — *Convective heat and mass transfer*. 3ème édition. Mc Graw Hill (1993)
- MENEGOZ M. – *Etude de la couche limite atmosphérique sur le glacier de l'Antizana et estimation des flux turbulents*. Université J. Fourier, Grenoble (2004)
- MOREAU R. – *L'air et l'eau*. EDP-Sciences (2013)
- PADET J. (Coord.) – *Environnement microclimatique et habitat*. Actes du congrès de la Sté Française des Thermiciens, SFT 79. Reims (1979)
- PIELOU E.C. – *Fresh water*. The University of Chicago Press (1998)
- RIERA J.D., DAVENPORT A.G. – Wind effects on buildings and structures. *Jubileum Conf. on Wind effects and structures*, Porto Alegre, Brésil (1998)
- RUBIN H., ATKINSON J. – *Environmental fluid mechanics*. CRC Press (2001)
- SUTTON J. – *Micrometeorology*. Mc-Graw Hill (1953)
- TOKANO T. & al. - Methane drizzle on Titan. *Nature*, 442, p.432-435 (2006)
- THUAL O. – *Hydrodynamique de l'environnement ; ch.4*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique (2010)

### Rappels de nomenclature:

Dans le texte, on a eu recours à des abréviations pour désigner les ouvrages de J. Padet disponibles sur le site de la SFT :

- FEMM : pour *Fluides en Ecoulement, Méthodes et Modèles*
- ET : pour *Echangeurs Thermiques*
- PTC : pour *Principes des Transferts Convectifs*

# Index alphabétique des matières

## A

Anticyclone, 1.4.  
Archimède, 1.2;  
Atmosphère neutre, 1.4; 1.8.3; 2.4.2.

## B

Brise-vent, 2.7.2.

## C

Charge spécifique, 3.4.6 ; A 3.3  
Coefficient de dilatation volumique, A 1.1  
Coefficient de frottement, 3.2.3  
Coefficient de pression, 2.7 ; A 2.1.  
Convection forcée, 3.6 ; A 3.1  
Convection mixte laminaire, 2.2.1.  
turbulente, 2.2.2 ; 2.2.3.  
Convection de Bénard-Rayleigh, 2.5  
Couche de mélange, 1.8.3;

## D

Débitance d'un canal, 3.4.4  
Degré hygrométrique, 1.7.  
Délestage d'un ballon, 1.9.4 ; 1.10.  
Diamètre hydraulique, 3.2.1  
Dilatabilité, 1.8.2; A 1.1; A 1.2 ; 2.2.4 ; 2.5.4.

## E

Ecoulement de Couette, 3.4.1  
turbulent, 2.3.♥  
Ecoulement en film, 3.2.1♣; A 3.1  
Energie cinétique turbulente, 2.2.3

## G

Gradient adiabatique, 1.1.3; 1.4; 1.9 ; A 1.3 ; 2.2 ;  
2.4.

## I

Intensité de turbulence, 2.1 ; 2.7.1♥  
Inversion atmosphérique, 2.4.4

## L

Longueur de Monin-Obukhov, 2.2.5 ; 2.4.4  
Longueur d'établissement dynamique / thermique,  
A 3.1

## M

Méandres, A 3.3

## N

Nombre de Froude, 3.2.3 ; 3.4.6.2  
de Prandtl turbulent, 2.2.4  
de Rayleigh, 2.5.2♠ ; 2.5.3 ; 2.5.4.  
de Reynolds, 3.2.3 ; 3.4.1♦ ; 3.5.2 ; A 3.4  
de Richardson atmosphérique, 2.2.4 ; 2.3

## P

Pente critique (optimale), A 3.3 ; A 3.4  
Périmètre mouillé, 3.2.1  
Perte de charge, 3.3.2  
Perte de charge unitaire, 3.5.1  
Poids apparent, 1.2 ; 1.8.1 ; 2.2.1♦ ; 1.9.2 ; 1.9.3 ;  
1.9.4.  
Pression sur un bâtiment, 2.7.1 ; A 2.1.  
Profondeur critique, 3.4.6

## R

Rafales de vent, 2.7.1♥ ; A 2.1  
Régime fluvial, torrentiel, 3.4.6.2 ; 3.4.6.3 ; 3.5.1 ;  
A 3.3 ; A 3.4  
Régime thermique établi, 3.6.3 ; A 3.1  
Ressaut, 3.5.1  
Rugosité, 2.1.2 ; 2.2.5 ; 3.4.3 ; 3.4.5.

## S

Similitude, 3.2.3  
Stabilité, 1.4; 1.8; 2.2.4; 2.4 ; 2.5.2  
d'un ballon, 1.10 ; A 1.3.  
Stratification volumétrique, A 1.2.  
Surface libre, 3.4.1 ; A 3.1 ; A 3.2

## T

Taux de turbulence, 2.7.1.♥ ; A 2.1.  
Température potentielle, 1.8.4 ; 2.3  
Thermocline, 1.9.3.  
Turbulence, 2.1.2; 2.2  
thermique, 2.2.1.♥ .

## V

Vent extrême, 2.7.1♥; A 2.1.  
Vent moyen, 2.1; A 2.1